ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΗΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ (κεφ. 2)

ορισμοί

Γνησίως αύξουσα: σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της λέγεται μια συνάρτηση f όταν για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in \Delta$ με $\chi_1 < \chi_2$ ισχύει $f(\chi_1) < f(\chi_2)$.

Γνησίως φθίνουσα: σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της λέγεται μια συνάρτηση f όταν για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in \Delta$ με $\chi_1 < \chi_2$ ισχύει $f(\chi_1) > f(\chi_2)$.

Γνησίως μονότονη: λέγεται μια συνάρτηση f όταν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Ολικό μέγιστο : παρουσιάζει μια συνάρτηση f σε ένα σημείο χ_o του πεδίου ορισμού της Α, όταν $f(x) \leq f(x_o)$ για κάθε $\chi \in$ Α.

Ολικό ελάχιστο : παρουσιάζει μια συνάρτηση f σε ένα σημείο χ_o του πεδίου ορισμού της Α ,όταν $f(x) \geq f(x_o)$ για κάθε $\chi \in$ Α.

Άρτια λέγεται μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, όταν για κάθε $\chi \in$ Α ισχύει:

$-\chi \in$ Α και $f(-\chi) = f(\chi)$.

Η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα ψ΄ψ.

Περιττή λέγεται μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, όταν για κάθε $\chi \in$ Α ισχύει:

$-\chi \in$ Α και $f(-\chi) = -f(\chi)$.

Η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων..

Η **f(x)=g(x)+c, c>0** προκύπτει από **κατακόρυφη μετατόπιση** της g(x) κατά c μονάδες προς τα πάνω, και η **f(x)=g(x)-c, c>0** κατά c μονάδες **π**ρος τα κάτω.

Η **f(x)=g(x-c) ,c>0** προκύπτει από **οριζόντια μετατόπιση** της g(x), κατά c μονάδες προς τα δεξιά και η **f(x)=g(x-c) ,c>0** κατά c μονάδες προς τα αριστερά.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ (κεφ. 3)

Τριγωνομετρικός κύκλος είναι ο κύκλος που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, ακτίνα ρ=1 και έχει οριστεί θετική και αρνητική φορά των τόξων (προσανατολισμένος κύκλος).

Αντίθετες γωνίες

ημ(-θ) = -ημθ,	**συν(-θ) = συνθ,**	**εφ(-θ) = -εφθ,**	**σφ(-θ) = -σφθ**

Γωνίες με άθροισμα 180^o (παραπληρωματικές)

ημ(180^o-θ)=ημθ,	**συν(180^o-θ)= -συνθ,**	**εφ(180^o-θ)= -εφθ,**	**σφ(180^o-θ)= -σφθ**

Γωνίες που διαφέρουν κατά 180^o

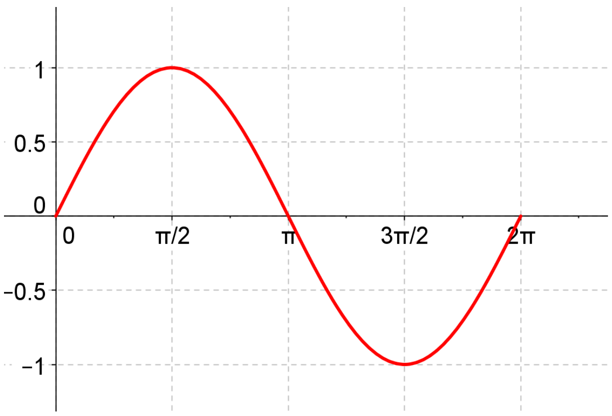
ημ(180^o+θ)=-ημθ,	**συν(180^o+θ)= -συνθ,**	**εφ(180^o+θ)= εφθ,**	**σφ(180^o-θ)= σφθ**

Γωνίες με άθροισμα 90^o (συμπληρωματικές)

ημ(90^o-θ)=συνθ,	**συν(90^o-θ)=ημθ,**	**εφ(90^o-θ)=σφθ,**	**σφ(90^o-θ)=εφθ**

Περιοδική συνάρτηση λέγεται μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A όταν υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός T ο οποίος και λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης, τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει: $\mathbf{x + T \in A}$, $\mathbf{x - T \in A}$ και $\mathbf{f(x+T) = f(x-T) = f(x)}$

Η συνάρτηση **f(x)=ημχ**



Πεδίο ορισμού: R

Σύνολο τιμών: [-1, 1]

Περίοδος: T=2π

(μελέτη στο διάστημα [0, 2π]):

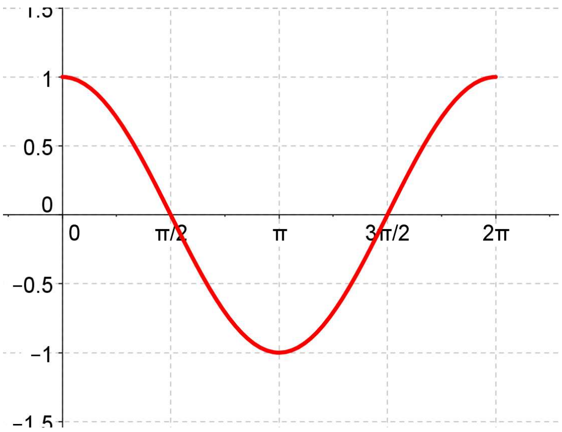
Μονοτονία: γν. αύξουσα στα [0, π/2] και [3π/2, 2π]

γν. φθίνουσα στο [π/2, 3π/2]

Ακρότατα: μέγιστο για χ=π/2, το ημ(π/2)=1

ελάχιστο για χ=3π/2, το ημ(3π/2)= -1

Η συνάρτηση **f(x)=συνx**



Πεδίο ορισμού: R

Σύνολο τιμών: [-1, 1]

Περίοδος: Τ=2π

<u>(μελέτη στο διάστημα [0, 2π]):</u>

Μονοτονία: γν. φθίνουσα στο [0, π] και

γν. αύξουσα στο [π, 2π].

Ακρότατα: μέγιστο για χ=0 και χ=2π το συν0=συν2π=1

ελάχιστο για χ=π, το συνπ= -1

Τριγωνομετρικές εξισώσεις

ημχ = ημθ ⇔ χ=2κπ+θ ή χ=2κπ+π-θ , $\kappa\in\mathbb{Z}$

συνχ = συνθ ⇔ χ=2κπ+θ ή χ=2κπ-θ , $\kappa\in\mathbb{Z}$

εφχ = εφθ ⇔ χ=κπ+θ , $\kappa\in\mathbb{Z}$

σφχ = σφθ ⇔ χ=κπ+θ , $\kappa\in\mathbb{Z}$

Βασικές τριγ. εξισώσεις

ημx = 0 ⇔ x = κπ ημx = 1 ⇔ x = 2κπ+π/2 ημx = -1 ⇔ x = 2κπ+3π/2

συνx = 0 ⇔ x = κπ+π/2 συνx = 1 ⇔ x = 2κπ συνx = -1 ⇔ x = 2κπ+π

εφx = 0 ⇔ x = κπ σφx = 0 ⇔ x = κπ+π/2 (κ∈Z)

επίσης ισχύουν : $\varepsilon\phi x = \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$, $\sigma\phi x = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$, εφx·σφx =1 , $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ (κεφ.4)

ορισμοί

Γενική μορφή πολυωνύμου: $\alpha_\nu\chi^\nu + \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2}\chi^{\nu-2} +\ldots+\alpha_1\chi + \alpha_0$, **ν θετικός ακέραιος.**

Συντελεστές πολυωνύμου : $\alpha_\nu ,\alpha_{\nu-1} ,\ldots\alpha_1 , \alpha_0$ (μπορεί να είναι και παραμετρικοί)

Όροι πολυωνύμου : $\alpha_\nu\chi^\nu$, $\alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1}$, …, $\alpha_1\chi$, α_0

Σταθερός όρος : α_0 (ό,τι δεν πολλαπλασιάζεται με το χ)

Βαθμός πολυωνύμου : **ν** (ο μεγαλύτερος εκθέτης του χ)

Σταθερό πολυώνυμο: $P(\chi) = c$, (c σταθερός αριθμός) **είναι μηδενικού βαθμού αν $c\neq0$.**

Μηδενικό πολυώνυμο: $P(\chi) = 0$, για κάθε $\chi\in R$. **Δεν ορίζεται ο βαθμός του.**

(το μηδενικό είναι και σταθερό)

Ανηγμένη μορφή : η τελική μορφή που παίρνει το πολυώνυμο όταν γίνουν όλες οι δυνατές πράξεις.

Αριθμητική τιμή : η τιμή που παίρνει το πολυώνυμο όταν αντικατασταθεί το χ με έναν αριθμό

Ρίζα πολυωνύμου : ο αριθμός που το μηδενίζει

Ίσα πολυώνυμα : όταν οι συντελεστές των ομοιόβαθμων όρων τους είναι ίσοι.

Πολυώνυμα σε γενική μορφή:

1ου βαθμού : $\alpha\chi+\beta$, $\alpha\neq0$. 2ου βαθμού : $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$, $\alpha\neq0$. 3ου βαθμού : $\alpha\chi^3+\beta\chi^2+\gamma\chi+\delta$, $\alpha\neq0$ κ.ο.κ.

Ταυτότητα διαίρεσης (Τ. Δ.) : $\Delta(\chi) = \delta(\chi)\cdot\pi(\chi) + \upsilon(\chi)$

Όπου $\Delta(\chi)$ ο διαιρετέος , $\delta(\chi)$ ο διαιρέτης , $\pi(\chi)$ το πηλίκο και $\upsilon(\chi)$ το υπόλοιπο.

Ο βαθμός του $\upsilon(\chi)$, αν δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο, είναι μικρότερος από το βαθμό του $\delta(\chi)$ και όχι απαραίτητα από το βαθμό του $\pi(\chi)$.

Το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(\chi):(\chi-\rho)$ είναι το $\upsilon=P(\rho)$

ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

1. **$P(\rho)=0$**
2. **το ρ είναι ρίζα του $P(\chi)$**
3. **το $\chi-\rho$ είναι παράγοντας του $P(\chi)$**
4. **το $\chi-\rho$ διαιρεί το $P(\chi)$**
5. **το $P(\chi)$ διαιρείται με το $\chi-\rho$**
6. **η διαίρεση $P(\chi):(\chi-\rho)$ είναι τέλεια**
7. **το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(\chi):(\chi-\rho)$ είναι 0**

Οι παραπάνω προτάσεις θα αντικαθιστούνται με την 1η: $P(\rho)=0$ η οποία είναι αλγεβρική έκφραση και μπορεί να δουλευτεί.

αποδείξεις

1. Το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(\chi):(\chi-\rho)$ είναι το $\upsilon=P(\rho)$

Από την Τ.Δ. έχω : $P(\chi)=(\chi-\rho)\cdot\pi(\chi)+\upsilon$ για $\chi=\rho$ θα έχω: $P(\rho)=0\cdot\pi(\rho)+\upsilon=\upsilon$

2. Το $\chi-\rho$ είναι παράγοντας του $P(\chi)$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(\chi)$

Ευθύ: Έστω ότι το $\chi-\rho$ είναι παράγοντας του $P(\chi)$,τότε θα ισχύει: $P(\chi)=(\chi-\rho)\cdot\pi(\chi)$

άρα $P(\rho)=0\cdot\pi(\rho)=0$ δηλ. το ρ είναι ρίζα του $P(\chi)$.

Αντίστροφα: Έστω ότι το ρ είναι ρίζα του $P(\chi)$ τότε: $P(\rho)=0$ δηλ. $\upsilon=0$ όπου υ το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(\chi):(\chi-\rho)$. Από την Τ.Δ. έχω : $P(\chi)=(\chi-\rho)\cdot\pi(\chi)+\upsilon$ δηλ. $P(\chi)=(\chi-\rho)\cdot\pi(\chi)$ από την οποία φαίνεται ότι το $\chi-\rho$ είναι παράγοντας του $P(\chi)$.

3. Αν μία πολυωνυμική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές , έχει ρίζα έναν ακέραιο αριθμό $\rho\neq 0$, τότε ο αριθμός αυτός είναι διαιρέτης του σταθερού όρου.

Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu\chi^\nu+\alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1}+\alpha_{\nu-2}\chi^{\nu-2}+\ldots+\alpha_1\chi+\alpha_0=0$ και $\rho\neq 0$ η ακέραιη ρίζα της.

Τότε $\alpha_\nu\rho^\nu+\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1}+\alpha_{\nu-2}\rho^{\nu-2}+\ldots+\alpha_1\rho+\alpha_0=0 \Leftrightarrow (\alpha_\nu\rho^{\nu-1}+\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-2}+\alpha_{\nu-2}\rho^{\nu-3}+\ldots+\alpha_1)\rho+\alpha_0=0 \Leftrightarrow$

$\kappa\cdot\rho+\alpha_0=0$ (όπου $\kappa=\alpha_\nu\rho^{\nu-1}+\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-2}+\alpha_{\nu-2}\rho^{\nu-3}+\ldots+\alpha_1$ ακέραιος , σαν άθροισμα ακεραίων)

άρα $\alpha_0=-\kappa\rho$. Η τελευταία ισότητα ακεραίων σημαίνει ότι το ρ διαιρεί τον α_0

ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ - ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ (κεφ. 5)

Ορισμοί

- $a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}}$ όπου: α>0 , μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος.
- **Η $f(x) = \alpha^x$ ορίζεται στο R** (δηλ. έχει πεδίο ορισμού το R), **όταν α>0.**

  Αν α>1 είναι γν. αύξουσα , αν α<1 είναι γν. φθίνουσα και αν α=1 είναι σταθερή στο R, f(x)=1 .
- **Εκθετική συνάρτηση με βάση το α** είναι **η $f(x) = \alpha^x$ με α>0 και $\alpha \neq 1$**

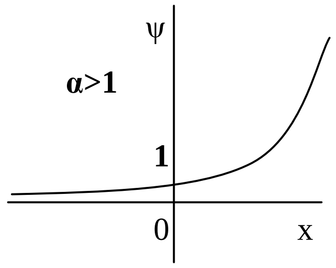
  πεδίο ορισμού : R **σύνολο τιμών : $(0, +\infty)$.**

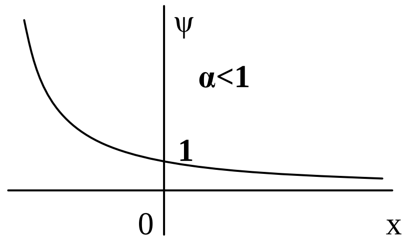
  Σημεία τομής με τους άξονες: τέμνει μόνο τον ψ΄ψ στο (0 , 1)

  Μονοτονία: αν α>1 είναι γν. αύξουσα , αν α<1 είναι γν. φθίνουσα

  Ασύμπτωτες: αν α>1 είναι ο ημιάξονας Οχ΄ , αν α<1 είναι ο ημιάξονας Οχ

  Γραφική παράσταση :





- **Ο αριθμός e** : $e = \lim_{\nu \to +\infty} (1 + \frac{1}{\nu})^{\nu} \simeq 2,718$

➢ **Εκθετική συνάρτηση** λέγεται **η $f(x) = e^x$** (όμοια με την $f(x) = \alpha^x$ με α>1)

- **Λογάριθμος του θ με βάση το α** όπου **θ>0 και α>0 με** $\alpha \neq 1$**,** ονομάζεται η μοναδική λύση της εξίσωσης $\alpha^x = \theta$ και συμβολίζεται με $\log_\alpha\theta$ δηλ. ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_\alpha\theta$
- **Δεκαδικός λογάριθμος: logθ** δηλ. όταν η βάση α=10. άρα $\log_{10}\theta = \log\theta$
- **Νεπέρειος λογάριθμος: lnθ** δηλ. όταν η βάση α=e . άρα $\log_e\theta = \ln\theta$

Άμεσες συνέπειες του ορισμού του $\log_\alpha\theta$ **(θ>0 και α>0 με $\alpha \neq 1$)**

$\log_\alpha\alpha = 1$	$\log_\alpha\alpha^x = x$	$a^{\log_\alpha\theta} = \theta$	$\log_\alpha 1 = 0$
$\log 10 = 1$	$\log 10^x = x$	$10^{\log\theta} = \theta$	$\lambda o\gamma 1 = 0$
$\ln e = 1$	$\ln e^x = x$	$e^{\ln\theta} = \theta$	$\ln 1 = 0$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ ($\theta, \theta_1, \theta_2 > 0$ και α>0 με $\alpha \neq 1$, $\kappa \in R$)

- $\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$
- $\log_\alpha(\theta_1/\theta_2) = \log_\alpha\theta_1 - \log_\alpha\theta_2$
- $\log_\alpha\theta^\kappa = \kappa \cdot \log_\alpha\theta$ (* ειδικά αν $\theta \neq 0$ τότε: $\log_\alpha\theta^{2\kappa} = 2\kappa \cdot \log_\alpha|\theta|$)

- $\log_\alpha \sqrt[\nu]{\theta} = \frac{1}{\nu}\log_\alpha \theta$
- $\log_\alpha \frac{1}{\theta} = -\log_\alpha \theta$

➤ **Λογαριθμική συνάρτηση** είναι η **f(x) = $\log_\alpha$x** με **α>0 και $\alpha \neq 1$**

Πεδίο ορισμού: $(0,+\infty)$ **Σύνολο τιμών: R**

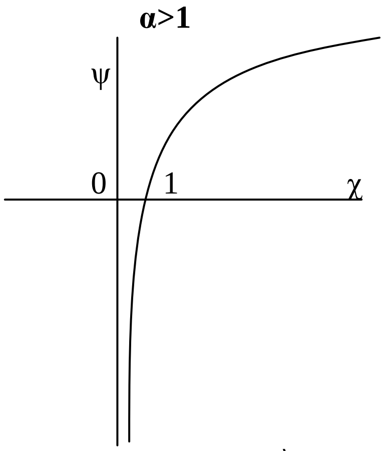
Σημεία τομής με τους άξονες: τέμνει μόνο τον χ΄χ στο (1 , 0)

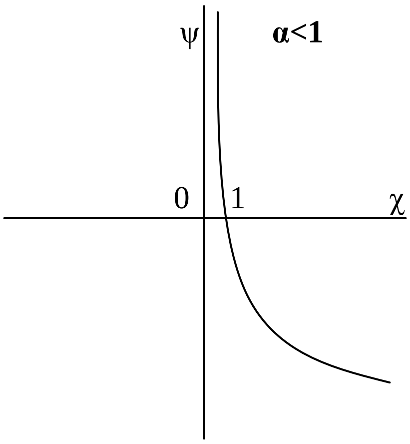
Συμμετρία: είναι συμμετρική με την g(x) = α^x ως προς τη διχοτόμο ψ=χ της γωνία χΟψ.

Μονοτονία: αν α>1 είναι γν. αύξουσα , αν α<1 είναι γν. φθίνουσα

Ασύμπτωτες: αν α>1 είναι ο ημιάξονας Οψ΄ , αν α<1 είναι ο ημιάξονας Οψ

Γραφική παράσταση:





\

αποδείξεις:

1. Αν θ_1 ,θ_2 >0 και α>0 με $\alpha \neq 1$,ν.δ.ο. $\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$

Απόδειξη:

Έστω $\log_\alpha\theta_1 = x_1$ και $\log_\alpha\theta_2 = x_2$ (1), τότε από ορισμό έχουμε: $\alpha^{x_1} = \theta_1 \; \kappa\alpha\iota \; \alpha^{x_2} = \theta_2$

Επομένως :

$$\alpha^{x_1}\cdot\alpha^{x_2} = \theta_1\cdot\theta_2 \Leftrightarrow \alpha^{x_1+x_2} = \theta_1\cdot\theta_2 \overset{\alpha\pi o\ o\rho\iota\sigma\mu o\ \lambda o\gamma\alpha\rho\iota\theta\mu o\upsilon}{\Longleftrightarrow} x_1 + x_2 = \log_\alpha(\theta_1\cdot\theta_2) \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2 = \log_\alpha(\theta_1\cdot\theta_2)$$

2. Αν θ >0 και α>0 με $\alpha \neq 1$, κ∈R ν.δ.ο. $\log_\alpha\theta^\kappa = \kappa\cdot\log_\alpha\theta$

Απόδειξη:

Έστω $\log_\alpha\theta$ = x (1) τότε : $\alpha^x=\theta$ άρα και $(\alpha^x)^\kappa = \theta^\kappa \Leftrightarrow \alpha^{x\kappa} = \theta^\kappa \Leftrightarrow \kappa x = \log_\alpha\theta^\kappa$ (από ορισμό λογαρίθμου)

$\Leftrightarrow \kappa \log_\alpha\theta = \log_\alpha\theta^\kappa$ (από την (1))