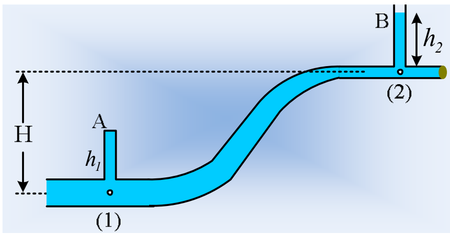
Τμήμα ενός δικτύου ύδρευσης



Στο σχήμα βλέπετε ένα τμήμα ενός δικτύου ύδρευσης, όπου στα οριζόντια τμήματα έχουμε σωλήνες με σταθερές διατομές A_1=12cm^2 και A_2=3cm^2. Οι δυο σωλήνες απέχουν κατακόρυφα κατά H=0,8m, ενώ έχουμε προσαρμόσει πάνω τους δυο λεπτούς κατακόρυφους σωλήνες Α και Β. Το δεξιό άκρο του λεπτού σωλήνα έχει κλειστεί με τάπα και το νερό στον ανοικτό σωλήνα Β έχει ανέβει σε ύψος h_2=0,5m. Ο Α σωλήνας είναι κλειστός και πλήρης νερού με ύψος h_1=0,4m.

i) Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκεί το υγρό στην τάπα, καθώς και η πίεση στο άνω μέρος του σωλήνα Α.

Ανοίγουμε την τάπα, οπότε το νερό εξέρχεται στην ατμόσφαιρα. Μόλις αποκατασταθεί μόνιμη ροή, μπορούμε να γεμίσουμε ένα δοχείο όγκου 2,4L σε χρόνο 20s.

ii) Να βρεθεί το ύψος του νερού στον ανοικτό σωλήνα Β.

iii) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του νερού στο σημείο (1), στο κάτω μέρος του κλειστού σωλήνα Α.

iv) Πόση πίεση επικρατεί στο άνω μέρος του σωλήνα Α; (η διάμετρος κάθε σωλήνα θεωρείται πολύ μικρή, οπότε θεωρούμε ότι σε όλα τα σημεία της διατομής κάθε σωλήνα, η πίεση είναι η ίδια).

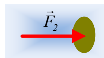
v) Να εξετάσετε ποιες ακριβώς ενεργειακές μεταβολές έχουμε, κατά τη μετάβαση από τη θέση (1) στη θέση (2), ενός μικρού όγκου νερού ΔV=1cm^3.

Το νερό θεωρείται ιδανικό ρευστό πυκνότητας ρ=1.000kg/m^3, g=10m/s^2, ενώ η ατμοσφαιρική πίεση είναι ίση με $p_{ατ}$=10^{5}Pa.

Απάντηση:

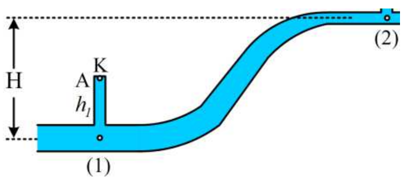
i) Η πίεση στο κάτω άκρο του κατακόρυφου σωλήνα Β, (ίση με την πίεση στην αριστερή πλευρά της τάπας) είναι ίση:

$$p_2=p_{ατ}+\rho g h_2=10^5Pa+1.000\cdot 10\cdot 0,5Pa=105.000Pa.$$



Αλλά τότε το νερό ασκεί στην τάπα δύναμη μέτρου:

$$F_2=p_2\cdot A_2=105.000\cdot 3\cdot 10^{-4}N=31,5N$$



Αν πάρουμε ένα σημείο Κ στην άνω βάση του σωλήνα Α και το σημείο (2) στο κάτω μέρος του σωλήνα Β, τα δυο σημεία βρίσκονται στο ίδιο ρευστό, που ισορροπεί, οπότε η διαφορά πίεσης μεταξύ τους θα είναι:

$$p_K-p_{(2)}=\rho g y \rightarrow$$

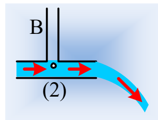
$$p_K = p_1 + \rho g(H - h_1) = 105.000Pa + 1.000 \cdot 10 \cdot (0{,}8 - 0{,}4)Pa = 109.000Pa.$$

Για την παροχή του δικτύου, όπως μετριέται μόλις αποκατασταθεί μόνιμη ροή, έχουμε:

$$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} = A_2 \upsilon_2 \rightarrow$$

$$\upsilon_2 = \frac{\Delta V}{A_2 \Delta t} = \frac{2.400cm^3}{3cm^2 \cdot 20s} = 40cm/s = 0{,}4m/s$$

ii) Στην έξοδο του λεπτού σωλήνα, η πίεση είναι ίση με την ατμοσφαιρική, παραμένει δε σταθερή σε όλα τα σημεία του οριζόντιου σωλήνα, ο οποίος έχει σταθερή διατομή, συνεπώς και σταθερή ταχύτητα ροής. Οπότε και η πίεση στο σημείο (2), θα είναι ίση με την ατμοσφαιρική και το νερό δεν θα ανέλθει στο σωλήνα Β.



iii) Αλλά εφαρμόζοντας την εξίσωση της συνέχειας για τις διατομές (1) και (2) των σωλήνων, παίρνουμε:

$$A_1 \upsilon_1 = A_2 \upsilon_2 \rightarrow \upsilon_1 = \frac{A_2 \upsilon_2}{A_1} = \frac{3cm^2 \cdot 0{,}4m/s}{12cm^2} = 0{,}1m/s$$

iv) Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων (1) και (2), κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής, παίρνοντας:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho \upsilon_1^2 = p_2 + \rho g H + \frac{1}{2}\rho \upsilon_2^2 \quad \text{(a)}$$

$$p_1 = p_2 + \rho g H + \frac{1}{2}\rho \upsilon_2^2 - \frac{1}{2}\rho \upsilon_1^2 = p_2 + \rho g H + \frac{1}{2}\rho\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right) \rightarrow$$

$$p_1 = 10^5 P\alpha + 1.000 \cdot 10 \cdot 0{,}8 P\alpha + \frac{1}{2}1000\left(0{,}4^2 - 0{,}1^2\right)P\alpha = 108.075 P\alpha$$

Αλλά για τη διαφορά πίεσης μεταξύ του σημείου Κ (στην άνω βάση του κατακόρυφου σωλήνα Α) και του σημείου (1) ισχύει (η στήλη του νερού εντός του σωλήνα Α ισορροπεί):

$$p_{(1)} - p_K = \rho g y \rightarrow$$

$$p_K = p_1 - \rho g h_1 = 108.075Pa - 1.000 \cdot 10 \cdot 0{,}4Pa = 104.075Pa.$$

v) Στην εξίσωση Bernoulli περιγράφονται οι ενεργειακές μεταβολές, αφού έχουμε αύξηση της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου, όπως και αύξηση της δυναμικής του ενέργειας. Η αύξηση αυτή της μηχανικής ενέργειας του νερού πραγματοποιείται μέσω του έργου, που παράγεται στον συγκεκριμένο όγκο, λόγω διαφοράς πίεσης. Ας το δούμε λίγο αναλυτικότερα.

Η αύξηση της κινητικής ενέργειας είναι:

$$\Delta K = \frac{1}{2}\Delta m \cdot \upsilon_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m \cdot \upsilon_1^2 = \frac{1}{2}\rho \Delta V \cdot \upsilon_2^2 - \frac{1}{2}\rho \Delta V \cdot \upsilon_1^2 = \frac{1}{2}\rho\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right) \cdot \Delta V$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}1.000\left(0{,}4^2 - 0{,}1^2\right) \cdot 1 \cdot 10^{-6} J = 7{,}5 \cdot 10^{-5} J$$

Η αντίστοιχη αύξηση της δυναμικής ενέργειας είναι:

$$\Delta U = (\Delta m)gH - 0 = \rho gH \cdot \Delta V \rightarrow$$

$$\Delta U = (1.000 \cdot 10 \cdot 0{,}8 \cdot 10^{-6} J = 800 \cdot 10^{-5} J$$

Ενώ στον παραπάνω όγκο νερού, κατά την μεταφορά του από την θέση (1) στη θέση (2), παρήχθη (από το υπόλοιπο υγρό), έργο:

$$W_{1\rightarrow 2} = (p_1 - p_2) \cdot \Delta V \rightarrow$$

$$W_{1\rightarrow 2} = (108.075 - 100.000) \cdot 10^{-6} J = 807{,}5 \cdot 10^{-5} J$$

Αλλά και γενικότερα, από την εξίσωση Bernoulli (a) παίρνουμε:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho \upsilon_1^2 = p_2 + \rho gH + \frac{1}{2}\rho \upsilon_2^2 \rightarrow p_1 - p_2 = \rho gH + \frac{1}{2}\rho \upsilon_2^2 - \frac{1}{2}\rho \upsilon_1^2 \rightarrow$$

$$(p_1 - p_2) \cdot \Delta V = \rho gH \cdot \Delta V + \frac{1}{2}\rho(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) \cdot \Delta V \rightarrow$$

$$W_{1\rightarrow 2} = \Delta K + \Delta U$$

dmargaris@gmail.com