Πότε δημιουργείται στάσιμο κύμα;

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδεται ένα κύμα με εξίσωση:

$$y=A\cdot ημ(ωt-2πx/λ)$$

Το παραπάνω κύμα μπορεί να συμβάλει με ένα δεύτερο κύμα που διαδίδεται στο ίδιο μέσο, με εξίσωση:

α) $y_1 = A\cdot ημ(ωt+2πx/λ)$

β) $y_2 = -A\cdot ημ(ωt+2πx/λ)$

γ) $y_3 = A\cdot ημ2π(t/T+x/λ+ ¼)$

δ) $y_4 = A\cdot ημ(ωt-2πx/λ-π/3)$

i) Σε ποιες περιπτώσεις θα έχουμε σχηματισμό στάσιμου κύματος στο ελαστικό μέσον;

ii) Σε ποια ή ποιες περιπτώσεις το στάσιμο κύμα που θα σχηματισθεί θα έχει κοιλία στη θέση x=0;

iii) Στις περιπτώσεις που δεν σχηματίζεται στάσιμο κύμα, ποιο θα είναι το αποτέλεσμα της συμβολής;

Απάντηση:

i) Οι εξισώσεις των κυμάτων y_1, y_2 και y_3 περιγράφουν κύματα ίδιου πλάτους και ίδια συχνότητας που κινούνται αντίθετα από το κύμα y. Το αρχικό μας κύμα y διαδίδεται προς την θετική κατεύθυνση, ενώ αυτά προς την αρνητική. Συνεπώς και στα τρία όταν συμβάλουν με το αρχικό κύμα θα σχηματίζεται στάσιμο κύμα. Το κύμα y_4 διαδίδεται προς την θετική κατεύθυνση και δεν διαδίδεται αντίθετα με το αρχικό κύμα, οπότε η συμβολή δεν θα οδηγήσει σε στάσιμο κύμα.

ii) Το α) κύμα θα δώσει στάσιμο με κοιλία στη θέση x=0 (βλέπε θεωρία σχολικού βιβλίου).

Το β) κύμα γράφεται $y_2= A\cdot ημ(ωt+2πx/λ+π)$, οπότε με βάση την αρχή της επαλληλίας θα πάρουμε:

$$y_σ = y + y_2 = A\cdot ημ\left(ωt - 2π\frac{x}{λ}\right) + A\cdot ημ\left(ωt + 2π\frac{x}{λ} + π\right) \rightarrow$$

$$y_σ = 2A\cdot συν\frac{ωt + 2π\frac{x}{λ} + π - ωt + 2π\frac{x}{λ}}{2}\cdot ημ\frac{ωt + 2π\frac{x}{λ} + π + ωt - 2π\frac{x}{λ}}{2} \rightarrow$$

$$y_σ = 2A\cdot συν\left(2π\frac{x}{λ} + \frac{π}{2}\right)\cdot ημ\left(ωt + \frac{π}{2}\right) = -2A\cdot ημ\left(2π\frac{x}{λ}\right)\cdot συν(ωt)$$

Η τελευταία εξίσωση μας δίνει πλάτος του στάσιμου:

$$A_β = \left|-2A\cdot ημ\left(2π\frac{x}{λ}\right)\right| = 2A\cdot\left|ημ\left(2π\frac{x}{λ}\right)\right|$$

Όπου για x=0 μας δίνει $A_β=0$, σχηματίζεται δηλαδή δεσμός στην θέση x=0.

Το γ) κύμα, δουλεύοντας με την ίδια λογική, θα πάρουμε:

$$y_\sigma = y + y_3 = A \cdot \eta\mu\left(\omega t - 2\pi\frac{x}{\lambda}\right) + A \cdot \eta\mu\left(\omega t + 2\pi\frac{x}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$$

$$y_\sigma = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\omega t + 2\pi\frac{x}{\lambda} + \frac{\pi}{2} - \omega t + 2\pi\frac{x}{\lambda}}{2} \cdot \eta\mu\frac{\omega t + 2\pi\frac{x}{\lambda} + \frac{\pi}{2} + \omega t - 2\pi\frac{x}{\lambda}}{2} \rightarrow$$

$$y_\sigma = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{x}{\lambda} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Αλλά τότε πλάτος του στάσιμου είναι:

$$A_\gamma = \left|2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{x}{\lambda} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

Όπου για x=0 μας δίνει $A_\gamma = \left|2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = A\sqrt{2}$ δεν σχηματίζεται δηλαδή ούτε δεσμός ούτε κοιλία στην θέση x=0.

Άρα μόνο η συμβολή με το κύμα y_1 θα μας δώσει στάσιμο με κοιλία στη θέση x=0.

iii) Με βάση την αρχή της επαλληλίας για τη συμβολή των κυμάτων με απομακρύνσεις y και y_4 έχουμε:

$$y_{o\lambda} = y + y_4 = A \cdot \eta\mu\left(\omega t - 2\pi\frac{x}{\lambda}\right) + A \cdot \eta\mu\left(\omega t - 2\pi\frac{x}{\lambda} - \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow$$

$$y_{o\lambda} = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\omega t - 2\pi\frac{x}{\lambda} - \frac{\pi}{3} - \omega t + 2\pi\frac{x}{\lambda}}{2} \cdot \eta\mu\frac{\omega t - 2\pi\frac{x}{\lambda} - \frac{\pi}{3} + \omega t - 2\pi\frac{x}{\lambda}}{2} \rightarrow$$

$$y_{o\lambda} = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \cdot \eta\mu\left(\omega t - 2\pi\frac{x}{\lambda} - \frac{\pi}{6}\right) = A\sqrt{3} \cdot \eta\mu\left(\omega t - 2\pi\frac{x}{\lambda} - \frac{\pi}{6}\right)$$

Η τελευταία εξίσωση είναι εξίσωση ενός τρέχοντος κύματος, το οποίο διαδίδεται προς την θετική κατεύθυνση με την ίδια συχνότητα και το ίδιο μήκος κύματος με τα αρχικά και απλά έχοντας πλάτος $A\sqrt{3}$.

dmargaris@gmail.com