Μαρία Χάλκου

Ἡ διδασκαλία τῶν Ἐμβαδῶν στὸν Βυζαντινὸ καὶ τὸν Μεταβυζαντινὸ Ἑλληνισμό

Περίληψη

Σὲ αὐτὴν τὴν εἰσήγηση παρουσιάζονται συνοπτικὰ ἐπιλεγμένα τμήματα τῶν προτάσεων γιὰ τὴ διδασκαλία τοῦ κεφαλαίου τῶν Ἐμβαδῶν βάσει δύο ἑλληνικῶν χειρογράφων τοῦ 15ου καὶ τοῦ 18ου αἰ. μ. Χ. Ἐξάγονται συμπεράσματα ποὺ ἀφοροῦν στὴν σχέση τῶν προτάσεων διδασκαλίας μὲ τὶς ἰδιαιτερότητες καὶ τὶς ἀνάγκες τῆς κοινωνίας τῆς ἑκάστοτε ἐποχῆς στὴν ὁποία ἀπευθύνονται. Δίδεται ἐπίσης ἡ εὐκαιρία νὰ γίνουν συγκρίσεις μεταξὺ τῶν μεθοδολογιῶν τῶν δύο ἐποχῶν, ἀλλὰ καὶ τῆς κάθε μίας ξεχωριστὰ μὲ αὐτὲς ποὺ χρησιμοποιοῦνται σήμερα στὴν Β΄ θμια Ἐκπαίδευση.

Εἰσαγωγή

Ἡ παροῦσα μελέτη ἀφορᾶ κατ' ἀρχὰς στὸν κώδικα 65[1] τοῦ 15ου αἰ. ὁ ὁποῖος εἶναι ἕνα βυζαντινὸ χειρόγραφο ποὺ εὑρίσκεται στὴν Ἐθνικὴ Βιβλιοθήκη τῆς Αὐστρίας, καὶ στὸν κώδικα 72[2] τοῦ 18ου αἰ. τῆς Βιβλιοθήκης τῆς Δημητσάνας. Στὸ ἄρθρο αὐτὸ παρουσιάζω ἐπιλεκτικὰ δείγματα ἀπὸ τὸ κεφάλαιο τῶν Ἐμβαδῶν, ὅπως καταγράφεται στὰ δύο χειρόγραφα, γιὰ να δοθεῖ ἡ δυνατότητα τῆς μελέτης τῶν μεθόδων διδασκαλίας ἀλλὰ καὶ τῆς σύγκρισης μὲ τὶς σύγχρονες τῆς Β΄ θμιας Ἐκπαίδευσης. Ἐπισημαίνω ὅτι ὁ ἀνώνυμος κώδικας 65 προοριζόταν, ὅπως κατέδειξε ἡ ἔρευνα, για διδασκαλία σὲ τάξεις μὲ ἀκροατήριο διαφόρων εἰδικοτήτων καὶ ἡλικιῶν, ἐνῶ ὁ κώδικας 72 ἐγράφη ἀπὸ τὸν Νικηφόρο Θεοτόκη καὶ ἀπευθυνόταν σὲ μαθητὲς τοῦ σημερινοῦ Γυμνασίου καὶ Λυκείου.

Τὰ Ἐμβαδὰ σύμφωνα μὲ τὸν κώδικα 65 τοῦ 15ου αἰ.

Ἡ δωδεκάτη ἑνότητα τοῦ κώδικα 65 τοῦ 15ου αἰ. (κεφ. 201-226) περιλαμβάνει κατ' ἀρχὰς ὑπολογισμοὺς ἐμβαδῶν διαφόρων γεωμετρικῶν σχημάτων. Κατὰ τὸν συγγραφέα, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, τοῦ ὁποίου εἶναι γνωστὴ ἡ ἀκτίνα, μπορεῖ νὰ εὑρεθεῖ ἂν ὑψώσουμε τὴν περίμετρο στὸ τετράγωνο καὶ διαιρέσουμε τὸ ἀποτέλεσμα μὲ τὸ 4π, τὸ ὁποῖο θέτει ἴσο μὲ 12 4/7. Ὁ συγγραφέας ὑπολογίζει κατόπιν τὰ ἐμβαδὰ κανονικῶν πολυγώνων (40-γώνου, 30-γώνου, 20-γώνου, 7-γώνου, κ.λ.π.)[3]. Ἡ μέθοδός του εἶναι ἴδια μὲ αὐτὴν ποὺ δίνει γιὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου, μὲ μόνη διαφορὰ ὅτι μεταβάλλει κάθε φορὰ τὸν ἀριθμὸ μὲ τὸν ὁποῖο διαιρεῖ τὸ τετράγωνο τῆς περιμέτρου τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ἀναλόγως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν του. Στὰ σχόλιά μου ἐπὶ τῶν κεφαλαίων 211 καὶ 212, ὑπολόγισα τὰ ἐμβαδὰ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου μὲ πλευρὲς 3 1/3 καὶ 4 ἀντιστοίχως, καὶ οἱ τιμές τους βρέθηκαν κατὰ προσέγγιση ἴσες πρὸς 28,87 καὶ 27,6 ἀντιστοίχως. Μὲ τὴ μέθοδο τοῦ συγγραφέα τὰ ἴδια ἐμβαδὰ ἰσοῦνται πρὸς 29 1/6 καὶ

---

[1] Ἀνωνύμου, Ἀριθμητική, Ἔκδ. Μαρία Χάλκου (Τὸ Μαθηματικὸ Περιεχόμενο τοῦ Codex Vindobonensis phil. Gr. 65 τοῦ 15ου αἰ. Εἰσαγωγή, Ἔκδοση καὶ Σχόλια), ΚΒΕ τοῦ ΑΠΘ, Θεσσαλονίκη 2006.

[2] Ἀνωνύμου, Μαθηματάριον, Ἔκδ. Μαρία Χάλκου (Ἡ Διδασκαλία τῶν Μαθηματικῶν στὴν Ἑλλάδα κατὰ τὰ τελευταῖα χρόνια τῆς τουρκοκρατίας σύμφωνα μὲ τὸν κώδικα 72 τοῦ 18ου αἰ. τῆς Βιβλιοθήκης τῆς Δημητσάνας, Εἰσαγωγή, Ἔκδοση καὶ Σχόλια), Ἀθήνα 2009.

[3] Γιὰ τὸ 7-γωνο καὶ τὸ 9-γωνο ὁ συγγραφέας χρησιμοποιεῖ τὸ "ἐξ ἀναλόγου" τῶν ἐμβαδῶν τῶν 8-γώνου καὶ 6-γωνου, καὶ 10-γώνου καὶ 8-γώνου ἀντιστοίχως. Ὁ τρόπος κατασκευῆς κανονικοῦ 7-γώνου ὑπάρχει σὲ πραγματεία τοῦ Ἀρχιμήδη, τὴν ὁποία ἀνακάλυψε ὁ C. Schoy. Βλ. *Ἀρχιμήδους Ἅπαντα,* ἐκδ. Ε. Σταμάτη, ΤΕΕ, Ἀθῆναι 1974, σελ. 78-101. V. d. Waerden, *Ἀφύπνιση,* σελ. 266.

27 1/12 ἀντιστοίχως. Πιθανὸν στὴν περίπτωση τοῦ ἑξαγώνου τὸ σφάλμα νὰ γίνεται σκοπίμως[4]. Βέβαια δὲν πρόκειται γιὰ μεγάλη διαφορά, ἀλλὰ λαμβανομένου ὑπόψη, ὅτι ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἀγροτεμαχίου ἐξαρτᾶτο καὶ ὁ ἀναλογῶν σὲ αὐτὸ φόρος[5], τότε πιθανότατα νὰ ἦταν τὰ λάθη ἐσκεμμένα, δεδομένου ὅτι στὸ Βυζάντιο δὲν εἶχαν κατορθώσει νὰ βροῦν ἄλλη φορολογίσιμη ὕλη πλὴν τῆς γῆς[6].

Οἱ ἀνωτέρω ὑπολογισμοὶ ἰσχύουν γιὰ ὁρισμένα κανονικὰ πολύγωνα. Ὅταν πρόκειται ὅμως γιὰ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου, τραπεζίου, τετραγώνου, ρόμβου καὶ τριγώνου, οἱ ὑπολογισμοὶ εἶναι ἴδιοι μὲ τοὺς σημερινούς, καὶ τίποτε δὲν μαρτυρεῖ, ὅτι σχετίζονται μὲ τὴν φορολογία. Δηλαδή, ἐπὶ παραδείγματι, ὅταν ἐπρόκειτο γιὰ εὔφορη γῆ σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μὲ διαστάσεις 20 ἐπὶ 15 οὐργίες, τότε οἱ Βυζαντινοί ὑπολόγιζαν τὸ γινόμενο 15.20=300 μοδία. Ὅταν ὅμως ἐπρόκειτο γιὰ ἄγονη γῆ τοῦ ἰδίου σχήματος μὲ διαστάσεις 30 ἐπὶ 20 οὐργίες, τότε θεωροῦσαν τὸ ἐμβαδὸν ἴσο μὲ (20.30)/200=3 μοδία[7].

Ὅσον ἀφορᾶ στὶς ἐπιρροὲς τὶς ὁποῖες δέχθηκε ὁ συγγραφέας μας, φαίνεται νὰ σχετίζονται μὲ τὰ *Μετρικὰ* τοῦ Ἥρωνα τοῦ Ἀλεξανδρέα, τὰ προβλήματα τῶν ὁποίων χαρακτηρίζονται ἀπὸ τὴν ἴδια φιλοσοφία μὲ αὐτὴ τοῦ χειρογράφου μας. Ἡ λύση τους βασίζεται σὲ θεωρήματα τοῦ Εὐκλείδη καὶ τὰ κλάσματα συμβολίζονται μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ποὺ συμβολίζονται στὸ χειρόγραφο μας[8]. Ἐξ ἄλλου καὶ ἡ γεωμετρία τῶν φόρων[9] βασίζεται στὸ ἔργο τοῦ Ἥρωνα ἂν καὶ διαφέρει ὡς πρὸς τὸ ὅτι οἱ ὑπολογισμοὶ δὲν γίνονται μὲ ἀκρίβεια (διαφορὰ θεωρίας- πρακτικῆς). Σημειωτέον ὅτι ὁ Ἥρων πρῶτος χρησιμοποιεῖ τὸ σχοινίον καὶ τὴν οὐργία[10].

Στὰ ἔργα τὰ ὁποῖα πιθανὸν νὰ ἐπιρρέασαν τὸν συγγραφέα πρέπει νὰ συμπεριληφθοῦν α) Τὰ *Ἐπιπεδομετρικά* τοῦ Διοφάντου. Ὑπάρχει ἡ ἄποψη, ὅτι τὸ ἔργο αὐτὸ δὲν ἀνήκει στὸν Διόφαντο, ἀλλὰ εἶναι μεταγενέστερο βυζαντινό, βασισμένο στὰ *Γεωμετρούμενα καὶ Στερεομετρούμενα* τοῦ Ἥρωνα[11]. β) Ἡ *Σύνοψη περὶ μετρήσεως καὶ μερισμοῦ τῆς γῆς* (γεωδαισία) τοῦ Ἰωάννη Πεδιάσιμου, ἡ ὁποία βασίζεται σὲ ἔργα τοῦ Εὐκλείδη, τοῦ Ἥρωνα τοῦ Ἀλεξανδρέα, καὶ τοῦ Ἥρωνα τοῦ Βυζαντίου[12]. Τὸν 14[ον] αἰ. ὁ Ἰσαὰκ Ἀργυρὸς (ἔμμεσος μαθητὴς τοῦ Θεοδώρου Μετοχίτη), ἔγραψε ἐγχειρίδιο γεωδαισίας[13] παρόμοιο μὲ τὰ ψευδοηρώνεια κείμενα[14]. Ἀναφέρω ἐπίσης τὸν Ἀλ

4 Lefort et al., *Géom. fisc Byz.*, σελ. 11.
5 Καλλιγᾶ, *Μελέται,* σελ. 257, 258.
6 *ὅ. π.*, σελ. 294.
7 Ὁ ὅρος "μοδίο" χρησιμοποιεῖτο γιὰ τὴν ἐκτίμηση τῆς γῆς, δηλαδὴ θεωροῦσαν, ὅτι ἡ γῆ ἑνὸς μοδίου ἀντιστοιχεῖ σὲ 40 λίτρες καὶ δέχεται περίμετρο 200 οὐργίες (κάθε λίτρα ἔχει 5 οὐργίες). Ὁ δὲ "μόδιος" ἔχει 480 οὐγγίες ἢ 2880 ἑξάγια. Τὸ δὲ 1 ἑξάγιο ἔχει 24 ξυλόκοκκα, καὶ τὸ 1 ξυλόκοκκο ἔχει 5 σιτόκοκκα.Ἕνα ἀγροτεμάχιο σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μὲ διαστάσεις 1 καὶ 2 σχοινία, εἶχε προφανῶς ἐμβαδὸν ἴσο μὲ 2. Διαιροῦσαν τὸ 2 μὲ τὸ 2, εὕρισκαν ἀποτέλεσμα ἴσο μὲ 1, καὶ ἔλεγαν ὅτι αὐτὸς ὁ τόπος εἶναι γῆ ἑνὸς μοδίου. Βλ. Lefort et al., *Géom. fisc Byz.*, σελ. 40, 44, 45.
8 *ὅ. π.*, σελ. 28.
9 Κατὰ τὸν Μιχαὴλ Ψελλό, ἀκόμα καὶ σὲ γεωδαιτικὲς μετρήσεις ἔπρεπε νὰ χρησιμοποιεῖται μόνο ἡ γεωμετρία τῆς τετρακτύος, τὴν ὁποία θεωροῦσαν ὡς ἐπιστήμη. Τὴν ἴδια γνώμη εἶχε καὶ ὁ Ἰωάννης Πεδιάσιμος. ὅ. π., σελ. 250, 251.
10 Τὸ σχοινίο ἔχει 10 οὐργίες, ὅταν πρόκειται γιὰ γῆ δεύτερης ποιότητας, καὶ 12 οὐργίες γιὰ γῆ τρίτης ποιότητας. Συνήθως τὸ σχοινίο εἶχε 10 οὐργίες στὴ Θράκη καὶ 12 οὐργίες στὶς χῶρες τῆς Ἀνατολῆς. ὅ. π., σελ. 253.
11 Heath, *Hist. Gr. Math.*, τόμ. II, σελ. 453.
12 Στὸ ἔργο του ὁ Πεδιάσιμος δὲν κατορθώνει νὰ κρύψει, πόσο δυσνόητα φαίνονταν τὰ ἔργα τῶν προγόνων του. Βλ. Hunger, *Βυζ. Λογ.*, τόμ. III, σελ. 47.
13 Ἡ γεωδαισία, ὡς κλάδος τῆς ἀριθμητικῆς διδασκόταν καὶ στὸ Πανδιδακτήριο τῆς Κωνσταντινούπολης. Οἱ χρησιμοποιούμενοι τύποι ἐφαρμόζονταν μηχανικὰ καὶ χωρὶς ἀπόδειξη. Βλ. Vogel, *Βυζ. Ἐπιστ.*, σελ. 808.

Χουαρίζμι, ὁ ὁποῖος συνέθεσε ἔργο ὅπου περιέχονται προβλήματα μέτρησης ἐκτάσεων καὶ γενικῶν γεωμετρικῶν ὑπολογισμῶν[15], καὶ τὸν Φιμπονάτσι, ὁ ὁποῖος ἔγραψε σχετικὰ μὲ τὸ ἐμβαδὸν πολυγώνων, κύκλου, παραλληλογράμμου, τραπεζίου, τριγώνου, τετραγώνου, ρομβοειδοῦς, κ.λπ. καὶ ὑπολόγιζε τὶς πλευρὲς κανονικοῦ πενταγώνου καὶ δεκαγώνου[16].

Στὸ κεφάλαιο 222 ὁ συγγραφέας ἀναφέρεται καὶ σὲ ἐμβαδὰ συνθέτων σχημάτων. Τὰ σχήματα αὐτὰ ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἄλλα ἁπλούστερα, τῶν ὁποίων τὸ ἐμβαδὸν ὑπολογίζεται μὲ τὶς μεθόδους ποὺ ἔχει ἤδη περιγράψει στὰ ἀντίστοιχα κεφάλαια. Παρατηρεῖ δέ, πὼς δὲν ὑπάρχει σύνθετο σχῆμα τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν νὰ μὴν ὑπολογίζεται μὲ αὐτὲς τὶς μεθόδους. Ὡς γνωστόν, οἱ Βυζαντινοὶ ὑπολόγιζαν κατὰ προσέγγιση τὸ ἐμβαδὸν ἐκτάσεων ἀκανονίστου σχήματος, βάσει τῆς περιμέτρου τους. Ὡς παράδειγμα ἀναφέρω μὴ κυρτὸ πολυγωνικὸ σχῆμα μὲ πλευρὲς 30, 8, 10, 20, 80, 2, 1, 5, 68 σχοινία. Ἡ περίμετρός του εἶναι ἴση μὲ 224 σχοινία. Ἀφαιροῦσαν 1 σχοινίο γιὰ κάθε 20 σχοινία "λόγω τῶν ὑπερβολῶν καὶ τῶν ἐλλείψεων". Θὰ ἔπρεπε νὰ εἶχαν λοιπόν: 224-11=213. Ἀντ' αὐτοῦ, ὅμως, ἀφαιροῦσαν τὸ 11 ἀπὸ τὸ 223 καὶ εἶχαν 212 σχοινία. Κατόπιν ἔκαναν τὶς ἑξῆς πράξεις: 212/2=106, 106/2=53, 53.53=2809 σχοινία, ἢ 1404 1/2 μοδία[17]. Αὐτὴ ἡ προσεγγιστική τους μέθοδος ἀποσκοποῦσε στὴν ἀλλοίωση τοῦ ἀποτελέσματος γιὰ φορολογικοὺς λόγους. Ὁ συγγραφέας μας λοιπόν, ἢ ἀγνοεῖ τὴν συγκεκριμένη μέθοδο, ἢ τὴν παραλείπει σκοπίμως. Ἡ σκόπιμη παράλειψη θὰ μποροῦσε νὰ ἐξηγηθεῖ, ἂν μὲ τὸ ἔργο του ἀπέβλεπε σὲ διδακτικοὺς σκοποὺς μᾶλλον, μολονότι αὐτὸ περιέχει καὶ ἐφαρμογὲς τῆς θεωρίας, καθὼς καὶ πρακτικὰ προβλήματα τῆς καθημερινῆς ζωῆς. Πιθανὸν νὰ ἀπευθυνόταν σὲ μαθητὲς σχολείου καὶ σὲ ἐπαγγελματίες (π.χ. ἐμπόρους, χειροτέχνες, πρωτομάστορες στὶς οἰκοδομές[18], ὀπτικούς, ἀρχιτέκτονες, κ.λπ.), οἱ ὁποῖοι οὐδεμία σχέση εἶχαν μὲ τὴ φορολογία καὶ τὶς πρακτικές της[19].

Στὴ συνέχεια ἀναφέρω τὶς ἐκφωνήσεις τῶν προβλημάτων ποὺ σχετίζονται μὲ τὰ ἐμβαδὰ ὅπως παρουσιάζονται στὸν κώδικα 65.

σα' Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι κύκλον καὶ εἰδέναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σβ' - σιβ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν σφαιροειδοῦς σχήματος γωνιῶν 40, 30, 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 5, καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σιγ' Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι ἐμβαδὸν τετραγώνου ἰσοπλεύρου ὀρθογωνίου καὶ παραλληλογράμμου πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σιδ' Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι τετραγώνου τραπεζίου ἐμβαδὸν πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σιε' Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι ρόμβου ἐμβαδὸν πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

---

[14] Τὸ ἔργο αὐτὸ τοῦ Ἰ. Ἀργυροῦ εἶναι ἀνέκδοτο. ὅ. π., *σελ. 814*. Hunger, *Βυζ. Λογ.*, σελ. 57. Πολλὰ ἔργα ποὺ ἀποδίδονταν στὸν Ἥρωνα εἶναι ἔργα Βυζαντινῶν μὲ τόσο πολλὲς προσθῆκες, ὥστε νὰ μὴν εἶναι δυνατὴ πάντοτε ἡ ἐκτίμηση σχετικὰ μὲ τὴ γνησιότητά τους. Βλ. Drachmann-Mahoney, *Hero*, σελ. 311.

[15] Boyer-Merzbach, *Ἱστ. Μαθ.*, σελ. 256.

[16] Vogel, *Fibonacci*, σελ. 609.

[17] Lefort et al., *Géom. fisc Byz.,* σελ. 71.

[18] Hunger, *Βυζ. Λογ.*, σελ. 27.

[19] Lefort et al., *Géom. fisc Byz*., σελ. 31, 253.

Ὑπῆρχαν ὅμως καὶ τεχνικὲς σχολές, τὶς ὁποῖες ἵδρυσε ὁ Κωνσταντίνος Θ Μονομάχος, ὅπως ὑποδηλώνουν χωρία τῆς "νεαρᾶς τοῦ 1047", προκειμένου νὰ ἐνισχύσει τὴν τάξη τῶν ἐμπόρων καὶ τῶν βιοτεχνῶν. Βλ. Σταυρούλα Χονδρίδου, *Ὁ Κωνσταντίνος Θ Μονομάχος καὶ ἡ εἰσαγωγὴ τῆς τεχνικῆς ἐκπαίδευσης,* Πρακτικὰ Α΄ Συνεδρίου Βυζαντινολόγων Ἑλλάδος καὶ Κύπρου, Ἰωάννινα 1999, σελ.151.

σις' Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι ρομβοειδοῦς σχήματος ἐμβαδὸν πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σιζ' Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι ἰσοπλεύρου τργώνου σχήματος ἐμβαδὸν πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σιη' Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι ἰσοσκελοῦς τριγώνου ὀξυγωνίου ἐμβαδὸν καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀμβλυγώνιου πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σιθ' Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι τριγώνου σκαληνοῦ σχήματος ἐμβαδὸν πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σκ' Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν ἰσοπλεύρου καὶ ἰσοσκελοῦς οὐ πεπληρωμένου τριγώνου, ἀλλ' ἐλάττως ἔχοντος, καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σκα' Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν ἑξαγώνου ἐκ δύο τριγώνων ἰσοπλεύρων συντεθήμενον καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σκβ' Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν ἐκ διαφόρων σχημάτων συντεθήμενον καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σκγ' Περὶ τοῦ ποίου ἐστὶ πολυχωρεστέρου σχήματος.

σκδ' Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ἡ τούτων ζήτησις χρήσιμος εἰς γεωδαιτικὰς παραδόσεις μοδισμῶν.

σκε' Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι οἴκου τινὸς ἔδαφος πόσων οὐργιῶν ἐστί , καὶ ἄλλα τινὰ ὅμοια τούτου ζητήματα.

σκς' Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι πόσας ἐλάττονας πόλεις ἔχει δέξασθαι τὸ ἐμβαδὸν τῆς μείζονος πόλεως.

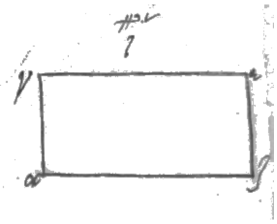
Τὰ Ἐμβαδὰ σύμφωνα μὲ τὸν κώδικα 72 τοῦ 18ου αἰ.

Θεωρεῖται βέβαιον, ὅτι ὁ Ν. Θεοτόκης χρησιμοποιοῦσε τὰ ἔργα: 1) Tacquet, Elementa geometricae....., 2) Ozaman, Les elements d' Euclide demontrés d' une manière nouvelle et facile, par M. Audriene, Paris 1746, καὶ 3) Ch. Wolf, Elementa Matheseos universae, vol. I, Ἄλλη 1713. Μάλιστα αὐτὸ τὸ τελευταῖο τὸ εἶχε προσαρμόσει γιὰ τὶς σχολικὲς ἀνάγκες παρουσιάζοντάς το μὲ μορφὴ περιληπτική[20]. Κατ' οὐσίαν ἀκολουθεῖ, ἂν καὶ δὲν ἀντιγράφει ἀκριβῶς τὴν πορεία ποὺ ἀκολούθησε ὁ Εὐκλείδης κατὰ τὴ συγγραφὴν τῶν βιβλίων του. Παρουσιάζει μὲ περισσότερη ἀνάλυση τὶς ἀποδείξεις τοῦ Εὐκλείδη, μὲ ἀποτέλεσμα ἡ συλλογιστική του νὰ εἶναι πλήρως κατανοητὴ καὶ αὐτὸ ἀποκτᾶ ἰδιαίτερη σημασία, ἂν ἀναλογιστεῖ κανεὶς ὅτι τὸ ἔργο του προοριζόταν γιὰ να διδαχθεῖ στοὺς μαθητὲς κάποιων σχολείων τῆς τουρκοκρατούμενης Ἑλλάδας.

Στὴ συνέχεια παραθέτω δείγματα ἀπὸ τοὺς ὁρισμοὺς καὶ ὁρισμένες προτάσεις, ὅπως προέκυψαν μετὰ τὴ μεταγραφὴ τοῦ κώδικα 72, καθὼς καὶ τὰ ἀντίστοιχα μαθηματικὰ σχόλια.

Ὁρισμοί.

[20] Καρὰς Γιάννης, *Οἱ ἐπιστῆμες στὴν τουρκοκρατία*, ἐκδ. βιβλιοπωλείου τῆς Ἑστίας καὶ Κέντρου Νεοελληνικῶν Ἐρευνῶν, Ἀθήνα 1992, τόμ. Ι *Τὰ Μαθηματικά*, σελ. 92.

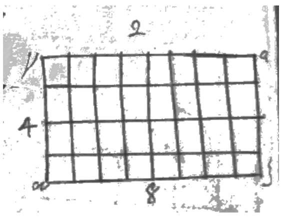


$1^{ος}$: Πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον, ὃ καὶ ὀρθογώνιον καλεῖν εἰώθασιν, οἷον τὸ αγεζ περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν, οἷον τῶν γα, αζ· τούτων ἡ μὲν τὸ ὕψος, ἡ δὲ τὴν βάσιν, ἢ ἡ μὲν τὸ μῆκος, ἡ δὲ τὸ πλάτος τοῦ ὀρθογωνίου ἐμφαίνει (σχ. 1).

Σχόλιον

Γίνεται τὸ ὀρθογώνιον ἤτοι τοῦ ὕψους αγ ἐπὶ τὴν βάσιν αζ, ἢ τοὔμπαλιν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος φερομένης. Ἔνθέν τοι ὡς ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ ὕψους καὶ τῆς βάσεως τὸ τοῦ ὀρθογωνίου χωρίον ἐννοοῦμεν γίνεται· ἐὰν γὰρ τό, τε ὕψος (σχ. 2) αγ, καὶ τὴν βάσιν αζ εἰς μέρη ὁποσαοῦν ἴσα ἀλλήλοις διέλῃς, οἷον τὸ μὲν εἰς 4, τὴν δὲ εἰς 8, τοσαῦτα ἔσονται τὰ τετράγωνα τὰ ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ αγεζ περιεχόμενα, εἴθουν ἐκ τοσούτων τετραγώνων ἔγκειται ἡ τοῦ ὀρθογωνίου αγεζ ἐπιφάνεια ὅση μονάδες ἐν τῷ γινομένῳ ἐκ τοῦ 4 καὶ τοῦ 8, ὅπερ ἐστὶ 32.

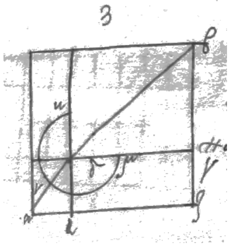
Σημαίνομεν δὲ τὸ ὀρθογώνιον λέγοντες, τὸ ὑπὸ τῶν αγ.γε, (στίζοντες δηλονότι ἐν τῷ μεταξὺ τῶν αγ.γε, ὅπερ τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐμφαίνει) ἢ τὸ αγ, εξ, ἢ τὸ αε, ἢ τὸ γξ.



Σημείωσις

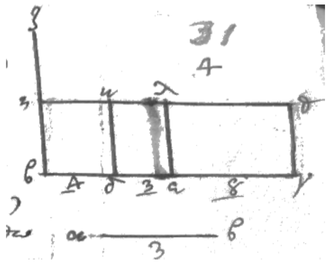
Τὰ μὲν α, β, γ, καὶ τὰ ἑξῆς στοιχεῖα τὴν ὁποιανοῦν ἐμφαίνει ποσότητα· τὸ δὲ = τὴν ἰσότητα, οἷον (30β) τὸ α= β σημαίνει ὅτι τὸ α ἴσον ἐστὶ τῷ β. Τὸ δὲ α+β, τὸ α σὺν τῷ β εἴθουν τὸ κεφάλαιον τῶν α καὶ β. Τὸ δὲ α-β, τὸ α ἀφαιρεθέντος τοῦ β, τουτέστι τὴν διαφορὰν τὴν μεταξὺ τοῦ α καὶ β. Λέγεται δὲ τὸ μὲν + μᾶλλον ἢ πλέον, τὸ δὲ - ἧττον ἢ μεῖον. Τὸ δὲ $\bar{α}^2$, ἢ $\overline{αγ}^2$, τὸ τετράγωνον ἐμφαίνει τὸ ἀπὸ τοῦ α, ἢ τὸ ἀπὸ τῆς αγ εὐθείας, συντομίας δὲ χάριν τούτοις χρώμεθα τοῖς σημείοις.

$2^{ος}$: Παντὸς παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ ἓν παραλληλόγραμμον ὁποιονοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι γνώμων καλείσθω, εἴθουν τοῦ παραλληλογράμμου αβ ἓν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμον τὸ γε σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι θδ, δζ, γνώμων καλεῖται, καταγγέλλεται δὲ διὰ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας κλμ (σχ. 3).



$3^{ος}$: Ὕψος παντὸς σχήματος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀγομένη κάθετος.

Πρότασις $1^{η}$



Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσαδηποτοῦν τμήματα τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου, καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ βγ ὡς ἔτυχε κατὰ τὰ δ, ε σημεῖα. Λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ (31α) τῶν αβ, βγ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῶν αβ, βδ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν αβ, βε, καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ τῶν αβ, εγ (σχ. 4).

Κατασκευή

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ β σημείου τῇ βγ πρὸς ὀρθὰς ἡ βζ καὶ κείσθω τῇ αβ ἴση ἡ βη, καὶ διὰ μὲν τοῦ η ἤχθω ἡ ηθ παράλληλος τῇ βγ, διὰ δὲ τῶν δ, ε, γ, αἱ δκ, ελ, γθ τῇ βη παράλληλοι.

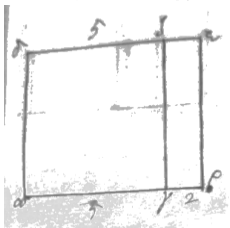
Δεῖξις

Τὸ βθ ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τοῖς βκ, δλ, εθ ὀρθογωνίοις, ἀλλὰ τὸ βθ ὀρθογώνιον ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν αβ, βγ (ἴση γὰρ ἡ αβ τῇ βη), τὰ δὲ βκ, δλ, εθ, ὑπὸ τῶν αβ, βδ, καὶ αβ, βε (ἴση γὰρ ἡ δκ τῇ βη, ἤτοι τῇ αβ) καὶ αβ, εγ (ἴση γὰρ ἡ ελ τῇ βη, ἤτοι τῇ αβ) περιέχεται. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ περιεχόμενον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῶν αβ, βδ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν αβ, δε, καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ τῶν αβ, εγ.

Πρότασις 2α

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρων τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα ἡ αβ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ γ. Λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν βα, αγ περιεχομένου ὀρθογω(31β)νίου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης αβ τετραγώνῳ (σχ. 5).



Κατασκευή

Ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον τὸ αβεδ καὶ ἤχθω διὰ τοῦ γ ὁποτέρᾳ τῶν αδ, βε, παράλληλος ἡ γζ.

Δεῖξις

Τὸ τετράγωνον αε= γε+αζ, ἀλλὰ τὸ μὲν αε ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης αβ τετράγωνον, τὸ δὲ γε, τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ περιεχόμενον ὀρθογώνιον (ἴση γὰρ ἡ αδ τῇ αβ)· τὸ δὲ αζ τὸ ὑπὸ τῶν αβ, αγ. Τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βγ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν αβ, αγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης αβ τετραγώνῳ.

Μαθηματικὰ Σχόλια

2ο Βιβλίο[21]

Ὁρισμοί

[21] Στὸ σημεῖο αὐτὸ ὁ συγγραφέας γράφει ὅτι στὶς 18 Σεπτεμβρίου 1779, ἡμέρα Τετάρτη, ἀρχίζουν τὴν Γεωμετρία.

1^{ος}: Ὁρίζει τὴ βάση καὶ τὸ ὕψος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου.

Τὰ μεγέθη αὐτὰ τὰ ὁρίζει καὶ ὡς μῆκος καὶ πλάτος ἀντίστοιχα.

Σχόλιον

Ἐξηγεῖ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου δὲν ἀλλάζει ἂν θεωρήσουμε τὴ βάση ὡς ὕψος καὶ τὸ ὕψος ὡς βάση (ὁ χωρισμὸς τοῦ παραλληλογράμμου σὲ τετράγωνα μὲ πλευρὰ ἴση μὲ τὴ μονάδα εἶναι καὶ στὶς δύο περιπτώσεις ὁ ἴδιος).

Τὸ παραλληλόγραμμο προσδιορίζεται εἴτε ἀπὸ τὸ ΑΓ.ΓΕ[22], εἴτε ἀπὸ ΑΓ, ΕΞ, εἴτε ἀπὸ τὴ διαγώνιο ΑΕ, εἴτε ἀπὸ τὴ διαγώνιο ΓΞ.

Σημείωση

Ὁρίζει τὰ α, β, γ, ὡς σύμβολα "ποσότητας", τὸ = ὡς σύμβολο ἰσότητας δύο ποσοτήτων α καὶ β, τὸ + ὡς σύμβολο ἀθροίσματος δύο ποσοτήτων α καὶ β, τὸ - ὡς σύμβολο διαφορᾶς τους, τὸ μὲν $\overline{\alpha}^2$ ὡς "τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τοῦ α" καὶ τὸ $\overline{\alpha\gamma}^2$ ὡς τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου μὲ πλευρὰ ΑΓ.

2^{ος}: Ὁρίζει τὸν "γνώμονα παραλληλογράμμου ΑΒ" ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν παραλληλογράμμων ΓΕ, ΘΔ, ΔΖ, τὸ ὁποῖο "καταγγέλεται" διὰ τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου ΚΛΜ.

3^{ος}: Τὸ ὕψος σχήματος ὁρίζεται ὡς ἡ κάθετος ἀπὸ τὴν κορυφὴ πρὸς τὴν βάση.

Πρότασις 1^{η}

Τὸ ὀρθογώνιο τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ, καὶ ΑΒ, ΔΕ[23], καὶ ΑΒ, ΕΓ περιεχομένων παραλληλογράμμων (Τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μὲ βάση ΒΓ καὶ ὕψος ΑΒ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν παραλληλογράμμων ποὺ ἔχουν ὕψος ΑΒ καὶ βάσεις ΒΔ, ΔΕ[24], ΕΓ).

Κατασκευή

Θεωρεῖ τὴ ΒΖ κάθετη στὴν ΒΓ καὶ ΒΗ=ΑΒ. Ἀπὸ τὸ Η φέρει τὴν ΗΘ παράλληλη πρὸς τὴν ΒΓ, καὶ ἀπὸ τὰ Δ, Ε, Γ, τὶς ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ παράλληλες τῆς ΒΗ.

Δεῖξις

Τὸ ὀρθογώνιο ΒΘ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων ΒΚ, ΔΛ, καὶ ΕΘ. Ἀλλὰ τὸ παραλληλόγραμμο ΒΘ εἶναι τὸ περιεχόμενο ὑπὸ τῶν ΑΒ καὶ ΒΓ (ἀφοῦ ΑΒ=ΒΗ), τὸ ΒΚ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ, τὸ ΔΛ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΔΕ[25], καὶ τὸ ΕΘ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΕΓ. Ἄρα τὸ ὀρθογώνιο τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ, καὶ ΑΒ, ΔΕ, καὶ ΑΒ, ΕΘ περιεχομένων παραλληλογράμμων.

Πρότασις 2^{α}

Ἐὰν Γ τυχὸν σημεῖο εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ, ΑΒΕΔ τετράγωνο, καὶ ΓΖ κάθετη στὴν ΑΒ, τότε τὰ ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα "τὰ ὑπὸ τῆς ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ΓΒ ἀντίστοιχα", εἶναι "ἴσα" μὲ τὸ τετράγωνο ΑΒΕΔ.

Δεῖξις

---

[22] Ὁρίζει τὸ σύμβολο «.» ὡς σύμβολο τῆς πράξης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

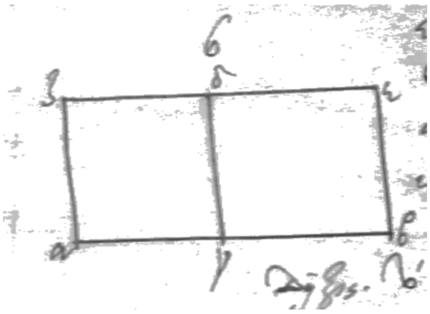
[23] Ὁ συγγραφέας γράφει ΒΕ ἀντὶ γιὰ ΔΕ ποὺ εἶναι τὸ ὀρθό.

[24] Τὸ αὐτό.

[25] Τὸ αὐτό.

Τὸ ΑΒ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ΓΕ καὶ ΑΖ. Ἀλλὰ τὸ ΑΕ εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνο, τὸ ΓΕ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενο ὀρθογώνιο καὶ τὸ ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ. Ἄρα τὰ ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα "τὰ ὑπὸ τῆς ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ΓΒ ἀντίστοιχα", εἶναι "ἴσα" μὲ τὸ τετράγωνο ΑΒΕΔ.

Πρότασις 3η



Θεωρεῖ εὐθεῖα ΑΒ καὶ Γ τυχὸν σημεῖο αὐτῆς. Τότε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ καὶ ΒΓ περιεχόμενο ὀρθογώνιο εἶναι ἴσο μὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΓ ὀρθογωνίου σὺν τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνου.

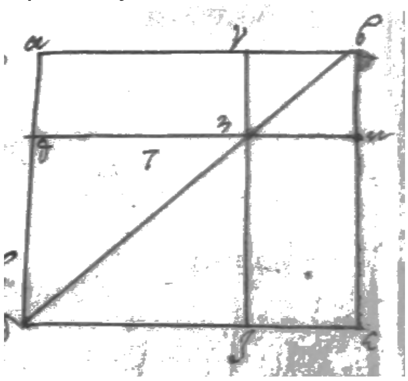
Κατασκευή

Κατασκευάζει τὸ τετράγωνο ΓΔΕΒ καὶ προεκτείνει τὴν ΕΔ μέχρι τὸ Ζ. Ἀπὸ τὸ Α φέρει τὴν ΑΖ παράλληλη στὶς ΓΔ καὶ ΒΕ.

Δεῖξις

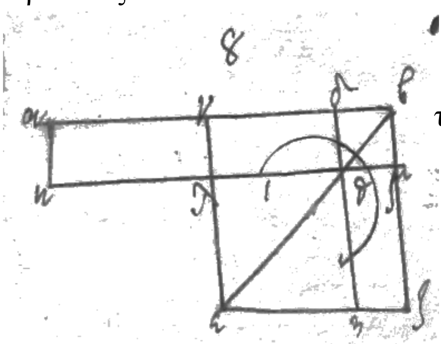
Τὸ ΑΕ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ΑΔ καὶ ΓΕ. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιο ΑΕ περιέχεται μεταξὺ τῶν ΑΒ καὶ ΒΓ, τὸ ΑΔ μεταξὺ τῶν ΑΓ καὶ ΓΒ, καὶ τὸ ΓΕ εἶναι τὸ τετράγωνο μὲ πλευρὰ τὴν ΓΒ. Ἄρα τὸ ὀρθογώνιο τὸ περιεχόμενο μεταξὺ τῶν ΑΒ καὶ ΒΓ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ὀρθογώνιο ποὺ περιέχεται μεταξὺ τῶν ΑΓ, ΓΒ προστιθέμενου καὶ τοῦ τετραγώνου μὲ πλευρὰ τὴν ΓΒ.

Πρότασις 4η



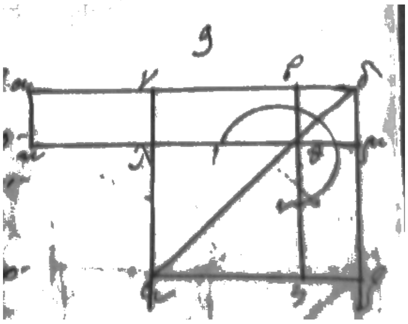
Ἔστω Γ τυχὸν σημεῖο εὐθείας ΑΒ. Τότε τὸ τετράγωνο μὲ πλευρὰ ΑΒ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων μὲ πλευρὲς τὶς ΓΑ καὶ ΓΒ προστιθεμένου τοῦ διπλασίου τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου ποὺ περιέχεται μεταξὺ τῶν ΑΓ καὶ ΓΒ.

Πρότασις 5η



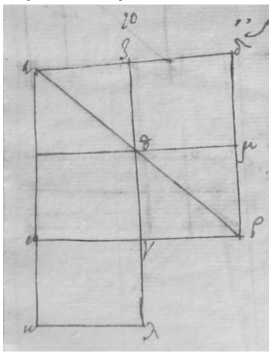
Ἔστω εὐθεῖα ΑΒ, Γ μέσον αὐτῆς, καὶ Δ τυχαῖο σημεῖο. Τότε τὸ ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο τὸ περιεχόμενο μεταξὺ τῶν ΑΔ καὶ ΔΒ καὶ τὸ τετράγωνο πλευρᾶς ΓΔ, ἔχουν ἄθροισμα ἴσο μὲ τὸ τετράγωνο πλευρᾶς ΓΒ.

Πρότασις 6^{η}



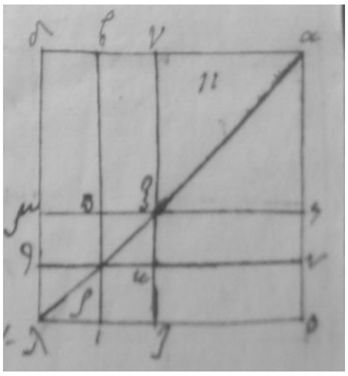
Ἐὰν Γ μέσον τῆς ΑΒ, καὶ Δ τυχὸν σημεῖο στὴν προέκταση τῆς ΓΒ, τότε τὸ ὀρθογώνιο ποὺ περιέχεται μεταξὺ τῶν ΑΔ, ΔΒ σὺν τὸ τετράγωνο πλευρᾶς ΓΒ δίνουν τὸ τετράγωνο πλευρᾶς ΓΔ.

Πρότασις 7^{η}



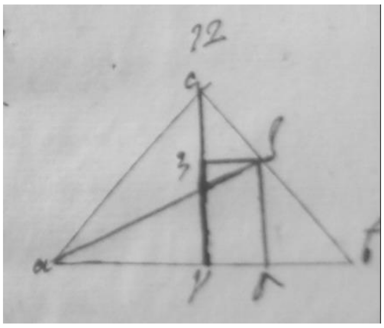
Ἔστω Γ σημεῖο τῆς ΑΒ. Τὰ τετράγωνα μὲ πλευρὲς ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι ἴσα μὲ τὸ διπλάσιο τοῦ ὀρθογωνίου ποὺ περιέχεται μεταξὺ τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ σὺν τὸ τετράγωνο πλευρᾶς ΒΓ.

Πρότασις 8^{η}



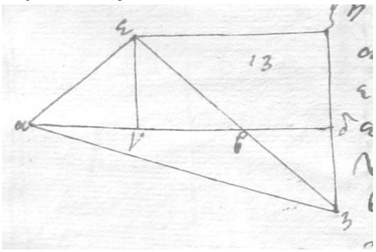
Ἔστω Γ τυχὸν σημεῖο τῆς ΑΒ. Τότε τὸ τετραπλάσιο τοῦ ὀρθογωνίου ποὺ περιέχεται μεταξὺ τῶν ΑΒ, ΒΓ σὺν τὸ τετράγωνο πλευρᾶς ΑΓ ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνο πλευρᾶς ΑΔ, ὅπου Δ σημεῖο τῆς προέκτασης τῆς ΒΓ, μὲ ΒΔ=ΒΓ.

Πρότασις 9^{η}



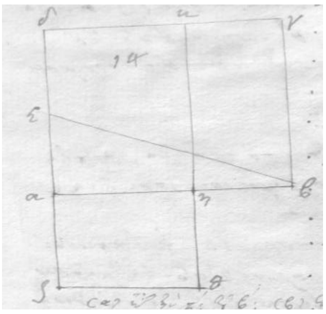
Ἐὰν Γ μέσον τῆς ΑΒ καὶ Δ τυχὸν σημεῖο τῆς ΓΒ, τότε τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ καὶ ΔΒ τετράγωνα εἶναι διπλάσια τῶν ἀπὸ ΑΓ καὶ ΓΔ τετραγώνων.

Πρότασις 10η



Ἔστω Γ μέσον τῆς ΑΒ, καὶ Δ σημεῖον ἐπὶ τῆς προέκτασης τῆς ΑΒ. Τότε τὰ τετράγωνα μὲ πλευρὲς ΑΔ καὶ ΔΒ εἶναι διπλάσια αὐτῶν μὲ πλευρὲς ΑΓ καὶ ΓΔ.

Πρότασις 11η.



Δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ νὰ τμηθεῖ ἔτσι ὥστε τὸ ὀρθογώνιο τὸ περιεχόμενο μεταξὺ ὅλης τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν δύο τμημάτων στὰ ὁποῖα χωρίζεται ἡ εὐθεῖα νὰ εἶναι ἴσο μὲ τὸ τετράγωνο πλευρᾶς ἴσης μὲ τὸ ἄλλο τμῆμα[26].

Κατασκευή

Φέρει ΑΔ κάθετο στὴν ΑΒ μὲ ΑΔ=ΑΒ, καὶ θεωρεῖ Ε τὸ μέσον τῆς ΑΔ. Φέρει τὴν ΕΒ καὶ προεκτείνει τὴ ΔΑ μέχρι τὸ Ζ, ὥστε ΕΖ=ΑΒ, μὲ ΑΗ=ΑΖ. Τότε τὸ ὀρθογώνιο ποὺ περιέχεται μεταξὺ τῶν ΑΒ καὶ ΗΒ εἶναι ἴσο μὲ τὸ τετράγωνο πλευρᾶς ΑΗ.

Δεῖξις

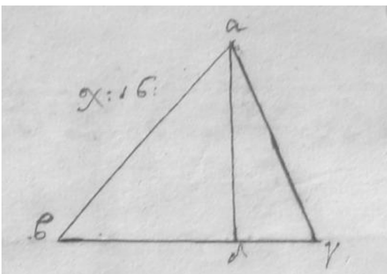
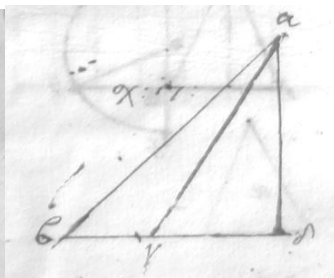
$\Delta Z.ZA+\overline{EA}^2=\overline{EZ}^2$. Ἀλλὰ $\overline{EZ}^2=\overline{EB}^2$, ἄρα $\Delta Z.ZA+\overline{EA}^2=\overline{EB}^2$. Ὅμως $\overline{EB}^2=\overline{EA}^2+\overline{AB}^2$, ἄρα $\Delta Z.ZA+\overline{EA}^2=\overline{EA}^2+\overline{AB}^2$. Ἀφαιρεῖ τὸ $\overline{EA}^2$, ὁπότε $\Delta Z.ZA=\overline{AB}^2$. Ἀλλὰ τὸ ΔΖ.ΖΑ εἶναι τὸ ὀρθογώνιο ΔΘ, διότι ΖΑ=ΖΘ, καὶ τὸ ΑΒ εἶναι τὸ τετράγωνο πλευρᾶς ΑΓ. Ἄρα ΔΘ=ΑΓ, καὶ ἀφαιρούμενου τοῦ κοινοῦ ΔΗ τότε ΗΓ=ΑΘ. Ἀλλὰ τὸ ΗΓ εἶναι τὸ ὀρθογώνιο ποὺ περιέχεται μεταξὺ τῶν ΑΒ, ΗΒ, καὶ τὸ ΑΘ εἶναι τὸ τετράγωνο πλευρᾶς ΑΗ.

Πρότασις 12η

Ἐὰν στὸ τρίγ ΑΒΓ ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἀμβλεῖα, καὶ φέρουμε ΒΔ κάθετο στὴν ΓΑ, τότε ἰσχύει: $\overline{B\Gamma}^2=\overline{BA}^2+\overline{A\Gamma}^2+2\Gamma A.A\Delta$.

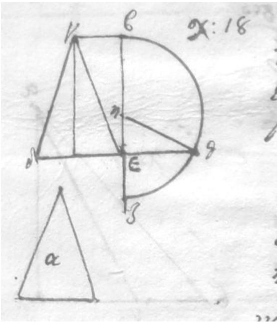
Πρότασις 13η

Θεωρεῖ τρίγ ΑΒΓ, μὲ γων Β ὀξεῖα, καὶ φέρει τὴν ΑΔ κάθετο στὴ ΒΓ. Τότε $\overline{A\Gamma}^2+2\Gamma B.B\Delta=\overline{\Gamma B}^2+\overline{BA}^2$.

[26] Πρόκειται γιὰ τὸ θεώρημα τῆς χρυσῆς τομῆς, ἀφοῦ ζητᾶ ἐπὶ τῆς ΑΒ σημεῖο Ζ τέτοιο ὥστε νὰ ἰσχύει ἡ σχέση ΑΒ/ΑΗ=ΑΗ/ΗΒ.

(38β) Πρότασις 14η



Νὰ κατασκευστεῖ τετράγωνο ἴσο πρὸς δοθὲν τρίγωνο.

Κατασκευή

Κατασκευάζει ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο ΒΔ ἴσο πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνο, καὶ ἐὰν μὲν ΒΕ=ΕΔ, τότε τὸ ζητούμενο τετράγωνο εἶναι τὸ ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο. Ἐὰν ἡ ΒΕ εἶναι μεγαλύτερη τῆς ΕΔ, τότε στὴν προέκταση τῆς ΒΕ λαμβάνει τμῆμα ΕΖ=ΕΔ. Θεωρεῖ τὸ μέσον Η τῆς ΒΖ, καὶ μὲ κέντρο τὸ Η καὶ ἀκτίνα ΗΒ=ΗΖ γράφει τὸ ἡμικύκλιο ΒΘΖ, τὸ ὁποῖο ἡ προέκταση τῆς ΔΕ τέμνει στὸ Θ. Τότε τὸ ζητούμενο τετράγωνο εἶναι τὸ τετράγωνο μὲ πλευρὰ τὴν ΕΘ.

Δεῖξις

ΒΕ.ΕΖ+$\overline{ΗΕ}^2$=$\overline{ΗΖ}^2$, διότι ΗΖ=ΗΘ. Ἄρα ΒΕ.ΕΖ+$\overline{ΗΕ}^2$=$\overline{ΗΘ}^2$. Ἀλλὰ $\overline{ΗΘ}^2$=$\overline{ΗΕ}^2$+$\overline{ΕΘ}^2$, ἄρα ΒΕ.ΕΖ+$\overline{ΗΕ}^2$=$\overline{ΗΕ}^2$+$\overline{ΕΘ}^2$. Ὁπότε ΒΕ.ΕΖ=$\overline{ΕΘ}^2$, δηλαδὴ τὸ ὀρθογώνιο ΒΔ εἶναι ἴσο μὲ τὸ τετράγωνο μὲ πλευρὰ τὴν ΕΘ. Ἀλλὰ καὶ τὸ δοθὲν τρίγωνο εἶναι ἴσο μὲ τὸ ΒΔ, ἄρα καὶ μὲ τὸ τετράγωνο μὲ πλευρὰ τὴν ΕΘ.

Συμπεράσματα

Ἀπὸ τὴν περιγραφὴ τῶν μεθοδολογιῶν τῶν σχετικῶν μὲ τὴ διδασκαλία τῶν Ἐμβαδῶν κατὰ τὴ Βυζαντινὴ ἀλλὰ καὶ τὴ Μεταβυζαντινὴ περίοδο, παρατηροῦμε κατ' ἀρχὰς ὅτι κατὰ τὴν διάρκεια τοῦ 15ου αἰ. ἀπουσιάζει παντελῶς ἡ θεωρία καὶ ὁ δάσκαλος περιορίζεται στὴν ἀνάπτυξη πρακτικῶν ἐφαρμογῶν. Αὐτὸ συμβαίνει ἐπειδὴ τὸ ἀκροατήριο προερχόταν ἀπὸ διάφορα κοινωνικὰ στρώματα μὲ διαφορετικὲς ἀνάγκες καὶ γνώσεις, ὅπως π.χ. μαθητές, χτίστες, ἐμπόρους, κρατικούς ὑπαλλήλους, κ.λπ. Ἀντιθέτως κατὰ τὴ διάρκεια, καὶ ειδικώτερα πρὸς τὸ τέλος τοῦ 18ου αἰ. μόλις λίγες δεκαετίες πρὶν τὴν ἐπανάσταση τοῦ 1821φαίνεται πὼς τὸ ἐνδιαφέρον τῶν δασκάλων ἑστιαζόταν στὴν θωράκιση τῶν Ἑλλήνων μὲ θεωρητικὲς γνώσεις ὑψηλοῦ ἐπιπέδου, χρησιμοποιώντας τὴν παιδεία ὡς μέσον ἐξέλιξης γιὰ τὴν ταχύτερη ἑτοιμασία τῶν Ἑλλήνων γιὰ τὴν ἀποτίναξη τοῦ ζυγοῦ. Στὴν πρώτη περίπτωση ἡ μεθοδολογία ἀφορᾶ σὲ ὅτι σήμερα θεωρεῖται ὡς ἐφαρμογὴ τῆς Θεωρίας, ἐν ἀντιθέσει μὲ τὴν πλήρη παρουσίαση ἀπὸ θεωρητικῆς ἀπόψεως τοῦ κεφαλαίου τῶν Ἐμβαδῶν ποὺ ἔχουμε στὸν κώδικα τοῦ 18ου αἰ.

Βιβλιογραφία

Πηγές

Ἀνωνύμου, *Ἀριθμητική*, Ἔκδ. Μαρία Χάλκου (Τὸ Μαθηματικὸ Περιεχόμενο τοῦ Codex Vindobonensis phil. Gr. 65 τοῦ 15ου αἰ. Εἰσαγωγή, Ἔκδοση καὶ Σχόλια), ΚΒΕ τοῦ ΑΠΘ, Θεσσαλονίκη 2006.

Ἀνωνύμου, *Μαθηματάριον*, Ἔκδ. Μαρία Χάλκου (Ἡ Διδασκαλία τῶν Μαθηματικῶν στὴν Ἑλλάδα κατὰ τὰ τελευταῖα χρόνια τῆς τουρκοκρατίας σύμφωνα

μὲ τὸν κώδικα 72 τοῦ 18ου αἰ. τῆς Βιβλιοθήκης τῆς Δημητσάνας, Εἰσαγωγή, Ἔκδοση καὶ Σχόλια), Ἀθήνα 2009.

Ἑλληνικὴ καὶ ξένη βιβλιογραφία

Boyer- Merzbach, *Ἱστ. Μαθ.....* C. B. Boyer- Uta C. Merzbach, *Ἡ Ἱστορία τῶν Μαθηματικῶν*, ἐκδ. Ἀ. Πνευματικοῦ, Ἀθήνα 1997.

Marshall Clagett, "Archimedes", *DSB*, I, 213-231. *Ἀρχιμήδους Ἅπαντα*, ἐκδ. Ε. Σταμάτη, ΤΕΕ, τόμ. I-III, Ἀθῆναι 1974.

Drachmann-Mahoney, *Hero......* A. G. Drachmann– M. S. Mahoney, "Hero of Alexandria", *DSB*, VI, 310-315.

Vogel, *Fibonacci....* K. Vogel, "Leonardo Fibonacci", *DSB*, IV, 604-613.

Heath, *Hist. Gr. Math.*, τόμ. I- II..... Th. Heath, *A History of Greek Mathematics*, Oxford UP, τόμ. I (1921), II (1981).

Drachmann-Mahoney, *Hero......* A. G. Drachmann– M. S. Mahoney, "Hero of Alexandria", *DSB*, VI, 310-315.

Vogel, *Βυζ. ἐπιστ.......* *Ἡ Ἱστορία τῆς Βυζαντινῆς Αὐτοκρατορίας*, ἐκδ. "Μέλισσα", Ἀθήνα 1979, (τόμ. II, κεφ. XXVIII: K. Vogel, "Ἡ βυζαντινὴ ἐπιστήμη"). Ἑλλ. μετάφραση τοῦ: *History of the Byzantine Empire*, (v. II, ch. XXVIII: K. Vogel, “The Byzantine Science”), Univ. of Wisconsin Press, Cambridge, 1958.

Hunger, *Βυζ. Λογ......*H. Hunger, *Βυζαντινὴ Λογοτεχνία* τόμ. I-III, ἐκδ. ΜΙΕΤ, Ἀθήνα 1994.

Καλλιγᾶ, Μελέται......Π. Καλλιγᾶ, Μελέται Βυζαντινῆς Ἱστορίας- Περὶ φορολογικῶν διατάξεων, ἐκδ. Δημιουργία, Ἀθήνα 1997.

Καρὰς Γιάννης, *Οἱ ἐπιστῆμες στὴν τουρκοκρατία,* ἐκδ. βιβλιοπωλείου τῆς Ἑστίας καὶ Κέντρου Νεοελληνικῶν Ἐρευνῶν, Ἀθήνα 1992, τόμ. I *Τὰ Μαθηματικά*, καὶ τόμ. III.

Lefort et al., *Géom. fisc Byz......* J. Lefort, R. Bondoux, J- Cl. Cheynet, J.- P. Grélois, V. Kravari, *Géometries du fisc Byzantin,* P. Lethielleux, Paris 1991.

Α' Συνάντηση Βυζαντινολόγων τῆς Ἑλλάδος καὶ τῆς Κύπρου, Ἰωάννινα 1999.

V. d. Waerden, *Ἀφύπνιση.....* B. L. Van der Waerden, *Ἡ ἀφύπνιση τῆς Ἐπιστήμης*, Πανεπ. ἐκδόσεις Κρήτης, Ἡράκλειο 2000.