Ἡ διδασκαλία τῶν λογαρίθμων στὴν τουρκοκρατούμενη Ἑλλάδα σύμφωνα μὲ χειρόγραφο τῆς Βιβλιοθήκης τῆς Δημητσάνας

Μαρία Δ. Χάλκου
Δρ. Μαθηματικός ΕΚΠΑ
Σχολικός Σύμβουλος
Ακαδημία Θεσμών και Πολιτισμών
m.chalkou@academy.edu.gr
mchalkou@gmail.com

Περίληψη

Στὸ ἄρθρο αὐτὸ ἐρευνοῦμε ἱστορικὰ στοιχεῖα τὰ ὁποῖα σχετίζονται μὲ τὴν Παιδεία ἀλλὰ καὶ τὶς κοινωνικὲς συνθῆκες στὴν Ἑλλάδα κατὰ τὰ τελευταῖα χρόνια τῆς τουρκοκρατίας. Ἡ μελέτη βασίστηκε στὸν κώδικα 72 τοῦ 18ου αἰ. τῆς Βιβλιοθήκης τῆς Δημητσάνας, στὸ 4ο βιβλίο τοῦ ὁποίου περιέχεται ἡ θεωρία τῶν λογαρίθμων τοῦ Νικηφόρου Θεοτόκη, ὅπως αὐτὴ διδασκόταν στοὺς μαθητὲς τῆς Σχολῆς τῆς Δημητσάνας λίγες μόλις δεκαετίες πρὶν τὴν ἐπανάσταση τοῦ 1821[1].

Abstract

In this article concluded are some results of the research related to the Education and the social conditions in Greece during the last years of the turkish rule. The study is based on the codex 72 of the 18th century of the Library of Dēmētsana. In the 4th book of this manuscript, Nikēforos Theotokēs, describes the Theory of Logarithms, as it was teached in the School of Dēmētsana during the last years of the turkish rule.

[1] Ανωνύμου, Μαθηματάριον, Έκδοση Μαρία Χάλκου [Η διδασκαλία των Μαθηματικών στην Ελλάδα κατά τα τελευταία χρόνια της τουρκοκρατίας, σύμφωνα με τον κώδικα 72 της Βιβλιοθήκης της Δημητσάνας, Εισαγωγή, Έκδοση και Σχόλια], Αθήνα 2009 (έντυπο και epub)

Ἡ Ἐκπαίδευση στὴν Ἑλλάδα κατὰ τὰ τελευταῖα χρόνια τῆς τουρκοκρατίας

Ἀπὸ τὰ μέσα τοῦ 18ου αἰ. ἐνῷ στὴν Ἑλλάδα ἡ ἐκπαίδευση ἀναβαθμίζεται καὶ ἐπιρρεάζεται ἀπὸ τὸν Νεοελληνικὸ Διαφωτισμό χωρὶς βέβαια νὰ φθάνει τὸ ἐπίπεδο τῶν Εὐρωπαϊκῶν Ἀκαδημιῶν[2], τὸ ¨κοινὸ σχολεῖο¨ συμπληρώνεται ἀπὸ τὸ ¨Ἑλληνικὸ σχολεῖο¨, ἢ ¨Σχολή¨, ἢ ¨Φροντιστήριο¨, ἢ ¨Ἐκπαιδευτήριο¨, ἢ ¨Μουσεῖο¨, ἢ ¨Ἀκαδημία¨, ἢ ¨Γυμνάσιο¨, ἢ ¨Λύκειο¨. Αὐτὲς οἱ ὀνομασίες σχετίζονταν κυρίως μὲ τὶς προσδοκίες τοῦ χορηγοῦ καὶ ὄχι μὲ τὸ παρεχόμενο ἐπίπεδο γνώσεων ἢ σπουδῶν. Τὸ μεσαῖο ἐπίπεδο μόρφωσης ὀνομαζόταν ¨Ἐγκύκλιος Παιδεία¨, καὶ ὅπου ὑπῆρχε ἀνώτερο ἐπίπεδο ἐκεῖ διδάσκονταν ἡ Λογική, ἡ Φιλοσοφία, ἡ Θεολογία, καὶ ἴ σ ω ς ἡ Ἀριθμητικὴ καὶ τὰ Μαθηματικὰ γενικώτερα[3]. Στὶς φυσικομαθηματικὲς Ἐπιστῆμες ὑπερεῖχαν οἱ σχολὲς (Ἀκαδημίες) Χίου καὶ Κυδωνιῶν[4]. Κάποιες φορὲς δέ, διαχώριζαν τὴ διδασκαλία τῆς Φυσικῆς ἀπὸ τὰ Μαθηματικὰ καὶ κάποιες ὄχι[5]. Ἡ διδασκαλία ὅμως τῶν Μαθηματικῶν γενικώτερα ἦταν προβληματικὴ λόγω ἔλλειψης καταρτισμένων δασκάλων. Οἱ συντηρητικοὶ μάλιστα δάσκαλοι καὶ ἐπιστήμονες δὲν συμπαθοῦσαν τὶς θετικὲς Ἐπιστῆμες, καὶ εἰδικὰ ὅσον ἀφορᾶ στὴ Φυσικὴ καὶ τὰ Μαθηματικὰ τὰ θεωροῦσαν ἄχρηστα καὶ ἐπικίνδυνα διότι ἀπομάκρυναν κατὰ τὴν ἄποψή τους τοὺς ἀνθρώπους ἀπὸ τὸ θεὸ καὶ τὴ Χριστιανικὴ θρησκεία[6], καὶ στὶς σχολὲς ποὺ εἶχαν ἐξουσία ἀπαγόρευαν τὴ διδασκαλία τους. Σημειωτέον ὅτι οἱ φυσικὲς καὶ γενικὰ οἱ θετικὲς Ἐπιστῆμες ἐμφανίζονται στὸ πρόγραμμα σπουδῶν ἀπὸ τὰ μέσα τοῦ 18ου αἰ. καὶ μετά[7], καὶ μάλιστα σύμφωνα μὲ τὸν Ἀ. Πέκιο, ἐνῷ κατὰ τὸν 18ον αἰ. ἐκδόθηκαν 170 συγγράμματα μὲ θρησκευτικὸ χαρακτήρα, μόλις 20 ἐκδόθηκαν μὲ περιεχόμενο ποὺ ἀφοροῦσε ὅλες τὶς ἄλλες ἐπιστῆμες[8].

---

[2] *Ἱστορία τῶν Ἑλλήνων*, Ὁ Ἑλληνισμὸς ὑπὸ ξένη κυριαρχία 1453- 1821, ἐκδ. Δομή, Ἀθήνα ²2006, τόμ. Χ, σελ.466.

[3] Ὁ. π., σελ. 475.

[4] Ἀξίζει νὰ ἀναφερθεῖ ὅτι ἡ Σχολὴ τῶν Μηλεῶν στὸ Πήλιο ἦταν καὶ αὐτὴ μία ἀπὸ τὶς πρωτοπόρους ποὺ εἰσήγαγαν τὴ διδασκαλία τῶν θετικῶν Ἐπιστημῶν στὸ πρόγραμμά της. Βλ. *Πρακτικὰ 25ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικῆς Παιδείας τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας:* Ἡ Μαθηματικὴ Ἐκπαίδευση καὶ ἡ σύγχρονη πραγματικότητα τοῦ 21ου αἰώνα,Θωμὰς Καρανίκας, Βόλος, Νοέμβριος 2008, σελ. 508-523.

[5] Στεφανίδης Μιχαήλ, *Αἱ φυσικαὶ ἐπιστῆμαι ἐν Ἑλλάδι πρὸ τῆς Ἐπαναστάσεως: Ἡ Ἐκπαιδευτικὴ Ἐπανάστασις,* Τυπογραφικὴ Ἑταιρεία Π. Δ. Σακελλάριος, Ἀθῆναι 1926, σελ. 13.

[6] Ὁ. π., σελ. 18.

[7] *Ἱστορία τῶν Ἑλλήνων*, Ὁ Ἑλληνισμὸς ὑπὸ ξένη κυριαρχία 1453- 1821, ἐκδ. Δομή, Ἀθήνα ²2006, τόμ. Χ, σελ. 480.

[8] Πέκιος Ἀλέξανδρος, Πνευματικὴ ἄποψις τῆς τουρκοκρατουμένης Ἑλλάδος: ἤτοι περιεκτικὸν διάγραμμα τῆς ἐπὶ τουρκοκρατίας διανοητικῆς τοῦ ἑλληνικοῦ ἔθνους καταστάσεως, ἐκ τοῦ Τυπογραφείου Ζέλλιτς καὶ Υἱῶν, ἐν Κωνσταντινουπόλει 1880, σελ. 102.

Οἱ συνθῆκες ζωῆς στὴν Πελοπόννησο

Στὴν Πελοπόννησο, τὸ χρονικὸ διάστημα 1770-1780 χαρακτηρίζεται ἀπὸ τὰ λεγόμενα "Ὀρλωφικά" (ἐπανάσταση τοῦ Ὀρλώφ), ἕναν πόλεμο ποὺ ρήμαξε καὶ ἐρήμωσε τὴν περιοχή. Σύμφωνα μὲ τοὺς V. Brunet de Presle καὶ A. Blanchet, γύρω στὰ 1772 ἡ Πελοπόννησος κολυμποῦσε στὸ αἷμα, οἱ καλλιέργειες κατεστράφησαν, ὁ πληθυσμὸς τῶν χριστιανῶν μειώθηκε στὸ 1/5, καὶ ὅσοι δὲν εἶχαν τὴ δυνατότητα νὰ πληρώσουν φόρους ἐπωλοῦντο σὰν σκλάβοι στὴν Ἀλγερία καὶ σὲ ἄλλα μέρη[9]. Τὸ 1779 ὁ πληθυσμὸς ὁλόκληρης τῆς Πελοποννήσου ἀνέρχεται - μετὰ τὰ 9 ἔτη λεηλασιῶν ἀπὸ τοὺς Ἀλβανοὺς[10]- σὲ 300.000 κατοίκους[11], καὶ στὰ τέλη τοῦ 18ου αἱ. ἡ ἴδια ἡ πόλη τῆς Δημητσάνας εἶχε μόλις 300 οἰκογένειες.

Ἡ Σχολὴ τῆς Δημητσάνας

Ἡ Σχολὴ τῆς Δημητσάνας σχετίζεται στενὰ μὲ τὴ ¨Μονὴ τοῦ Φιλοσόφου¨, μοναστήρι ποὺ ἱδρύθηκε στὴ Δημητσάνα τὸ 132 μ. Χ.[12] Ὅταν τὸ 1764 ἔφθασαν στὴ Δημητσάνα οἱ μοναχοὶ Γεράσιμος Γούνης καὶ Ἀσημάκης Λεονάρδος ἢ Ἀγάπιος γιὰ νὰ ἱδρύσουν τὴ Σχολή[13], τὰ χειρόγραφα καὶ τὰ ἔντυπα βιβλία τῆς Βιβλιοθήκης τῆς Μονῆς τοῦ Φιλοσόφου μεταφέρθηκαν στὴ Σχολή. Κατὰ τὰ Ὀρλωφικὰ ὅταν ἡ Σχολὴ καὶ ἡ Βιβλιοθήκη της καταστράφηκαν[14], ἡ λειτουργία της συνεχίστηκε στὴ Μονὴ Φιλοσόφου[15]. Ἐννέα χρόνια ἀργότερα (1779) ἡ Σχολὴ ἐπαναλειτουργεῖ στὸ χῶρο της καὶ τότε ἡ Βιβλιοθήκη της ἐμπλουτίζεται μὲ νέες δωρεές[16].

[9] V. Brunet de Presle- Alexandre Blanchet, *Grèce depuis la conquête romane jusqu' à nos jours,* pub. F. Didot, Paris 1860, σελ. 390.

[10] Οἱ Τοῦρκοι οἱ ὁποῖοι εἶχαν ἐπιστρατεύσει τοὺς Ἀλβανοὺς γιὰ νὰ τιμωρήσουν τὴν ἐξεγερμένη Πελοπόννησο, ὅταν οἱ Ἀλβανοὶ ἔγιναν ἰδιαίτερα ἐπικίνδυνοι ζήτησαν τὴ βοήθεια τῶν κλεφτῶν γιὰ νὰ τοὺς ἀντιμετωπίσουν καὶ νὰ τοὺς ἀπελάσουν τελικά, τὸ 1779. Βλ. Zoël Dalègre, *Ἕλληνες καὶ Ὀθωμανοί (1453-1923),* μετάφρ. Σοφία Μπίνη- Σωτηροπούλου, ἐκδ. Σ. Ζαχαρόπουλος, Ἀθήνα 2006, σελ. 212, καὶ Φιλιππίδης Νικόλαος, *Ἐπίτιμος Ἱστορία τοῦ Ἑλληνικοῦ Ἔθνους 1453-1821,* ἐκ τοῦ Τυπογραφείου Α. Καλαράκη, ἐν Ἀθήναις ^{2}1900, σελ. 126.

[11] Zoël Dalègre, *Ἕλληνες καὶ Ὀθωμανοί (1453- 1923),* μετάφρ. Σοφία Μπίνη- Σωτηροπούλου, ἐκδ. Σ. Ζαχαρόπουλος, Ἀθήνα 2006, σελ. 227.

[12] Γεωργακόπουλος Νίκος, *Ἑλληνικὰ Σχολεῖα στὸ Μοριὰ στὴν περίοδο τῆς Ὀθωμανικῆς κυριαρχίας καὶ τὴν Ἑλληνικὴ Ἐπανάσταση,* Τρίπολη 2006, σελ. 22.

[13] Γριτσόπουλος Ἀναστάσιος, *Σχολὴ Δημητσάνης,* Ἀθήνα 1962, σελ. 35.

[14] Γεωργακόπουλος Νίκος, Ἑλληνικὰ Σχολεῖα στὸ Μοριὰ στὴν περίοδο τῆς Ὀθωμανικῆς κυριαρχίας καὶ τὴν Ἑλληνικὴ Ἐπανάσταση, Τρίπολη 2006, σελ. 95.

[15] Γεωργακόπουλος Νίκος, *Ἡ παιδεία στὴν Ἀρκαδία ἐπὶ τουρκοκρατίας,* ἐκδ. Φύλλα, Τρίπολη 2000, σελ. 14.

[16] Γεωργακόπουλος Νίκος, *Ἑλληνικὰ Σχολεῖα στὸ Μοριὰ στὴν περίοδο τῆς Ὀθωμανικῆς κυριαρχίας καὶ τὴν Ἑλληνικὴ Ἐπανάσταση,* Τρίπολη 2006, σελ. 95.

Τὸ ἐκπαιδευτικὸ ἔργο τῆς Σχολῆς κρίνεται σπουδαῖο[17]. Οἱ ἀπόφοιτοί της θεωροῦνταν ἄριστοι γνῶστες τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων καὶ Λατίνων συγγραφέων[18], ἡ δὲ διδασκομένη ὕλη μπορεῖ νὰ ἦταν λίγη σὲ ἔκταση ἀλλὰ σύμφωνα μὲ ὁρισμένες μαρτυρίες ἦταν Πανεπιστημιακοῦ ἐπιπέδου[19].

Ὁ Νικηφόρος Θεοτόκης

Ὁ Νικηφόρος Θεοτόκης, ὁ ὁποῖος σύμφωνα μὲ ὅλα τὰ στοιχεῖα ποὺ προέκυψαν ἀπὸ τὴν ἔρευνα ἦταν ὁ συγγραφέας τοῦ κώδικα 72, ὑπῆρξε ἕνας ἀπὸ τοὺς πρώτους ἐπιστήμονες ποὺ προσπάθησαν να συνδυάσουν τὶς γνώσεις τῶν Ἀρχαίων Ἑλλήνων μὲ τὶς σύγχρονες τῶν Δυτικῶν Ἐπιστημόνων. Τὸ γεγονὸς αὐτὸ ὁδήγησε στὴν ἀνάδειξη τῆς δουλειᾶς τῶν Ἑλλήνων Ἐπιστημόνων ὡς τὸ κύριο κριτήριο γιὰ τὴν ἀξιολόγηση τοῦ πολιτισμοῦ τῆς ἐποχῆς του[20]. Ὁ Νικηφόρος Θεοτόκης ἦταν ὁ σύνδεσμος τῶν παλαιοτέρων ἐπιστημόνων λογίων μὲ τοὺς δασκάλους τῶν νέων Φυσικῶν ἐπιστημῶν τῆς χρονικῆς περιόδου πρὶν τὴν Ἐπανάσταση, ὁ ὁποῖος ἀνέγραψε στὸ Ἐκπαιδευτικὸ Πρόγραμμα τῶν Ἑλληνικῶν σχολείων ὡς πρωτεύοντα τὴ Φυσικὴ καὶ τὰ Μαθηματικά[21]. Ἡ νεοεισαχθεῖσα διδασκαλία τῶν δύο αὐτῶν μαθημάτων δὲν ἦταν ἁπλῶς μία προσθήκη νέων γνώσεων στὰ ἀναλυτικὰ προγράμματα τῆς ἐποχῆς του, ἀλλὰ ὑπῆρξε στὴν κυριολεξία "νέα θέση" γιὰ τὴν Παιδεία γενικώτερα, ἡ ὁποία ὡστόσο προκάλεσε σημαντικὲς ἀντιδράσεις[22].

Ὁ κώδικας 72 τῆς Βιβλιοθήκης τῆς Δημητσάνας

Ὁ κώδικας 72 εἶναι χαρτῶος καὶ σύμφωνα μὲ τὴν καταλογογράφηση τοῦ κ. Ἀναστασίου Γριτσοπούλου χρονολογεῖται στὸν 18ο αἰώνα μ. Χ., οἱ διαστάσεις του εἶναι 0,21x0,166 καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ 184 φύλλα ὡς ἑξῆς:

1. (φ. 4α), Γεωμετρία μετὰ σχημάτων.

φ. 29α: Τέλος τοῦ α΄ βιβλίου αψοθῳ σεπτεμβρίου ιηη ἡμέρᾳ Τετάρτη ἠρξάμεθα τῆς Γεωμετρίας.

2. (φ. 150α), Πρακτικὴ Ἀριθμητική.

---

[17] Ἡ Σχολὴ τῆς Δημητσάνας ἦταν μεταξὺ τῶν καλυτέρων Σχολῶν στὴν Ἑλλάδα. Βλ. Howe, Samuel Gridley, *An Historical sketch of the Greek Revolution,* pub. White, Gallaher and White, New York 1828, σελ. 3.

[18] Γεωργακόπουλος Νίκος, *Ἡ παιδεία στὴν Ἀρκαδία ἐπὶ τουρκοκρατίας,* ἐκδ. Φύλλα, Τρίπολη 2000, σελ. 23.

[19] Ὅ. π., σελ. 134.

[20] Issues in the Historiography of Post- Byzantine Science, Boston Studies in the Philosophy of Science, Kluwer Academic Publishers, vol. 151, 1994. D. Dialetis- E. Nikolaidis, Trends in the Historiography of Science

[21] Στεφανίδης Μιχαήλ, *Αἱ φυσικαὶ ἐπιστῆμαι ἐν Ἑλλάδι πρὸ τῆς Ἐπαναστάσεως: Ἡ Ἐκπαιδευτικὴ Ἐπανάστασις,* Τυπογραφικὴ Ἑταιρεία Π. Δ. Σακελλάριος, Ἀθῆναι 1926, σελ. 11.

[22] Μεγάλη Παιδαγωγικὴ Ἐγκυκλοπαίδεια, ἐκδ. Ἑλληνικὰ Γράμματα-Herder, Ἀθῆναι 1968, τόμ. ΙΙΙ, σελ. 129.

Στάχωσις διὰ βύρσης, είς τὸ νῶτον φέρει χρυσᾶ κοσμήματα, αἱ δὲ πινακίδες ἔγχρωμον περικάλλυμα.[23]

Σύμφωνα μὲ τὴν καταλογογράφηση τοῦ κ. Γιάννη Καρὰ[24] ἰσχύουν τὰ κάτωθι:

Οἱ διαστάσεις τοῦ κώδικα 72 τῆς Σχολῆς Δημητσάνης ὁ ὁποῖος χρονολογεῖται στὸ 1779 μ. Χ. εἶναι 0,210x0,165, ὁ δὲ κώδικας ὁ ὁποῖος περιλαμβάνει τὴ Γεωμετρία καὶ τὴν Ἀριθμητικὴ τοῦ Νικηφόρου Θεοτόκη ἀποτελεῖται ἀπὸ 181 φύλλα ὡς ἐξῆς:

α) φφ. 1α- 3β λευκά.

β) Γεωμετρία (Εὐκλείδειος), φφ. 4α- 149α (τὰ "βιβλία", φφ. 4α, 30α, 42α, 63α, 74α, 88α, 109α, καὶ 131α ἐνῶ στὰ φφ. 147α- 149α, ἕξι γεωμετρικὰ σχήματα).

γ) Ἀριθμητική, φφ. 150α- 181α. Ἀρχ. *Ἀριθμητικὴ ἐστὶν ἡ τῶν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς.......*

φ. 159α, βιβλίον 2ον, Περὶ κλασμάτων.....

φ. 164α, βιβλίον 3ον, Περὶ τῆς μεθόδου τῆς τῶν ριζῶν ἐξαγωγῆς.

φ. 168α, βιβλίον 4ον, Περὶ ἰσοδιαφερόντων καὶ λογαρίθμων.

φ. 178β, βιβλίον 5ον, Περὶ διαφόρων μεθόδων είς τὴν ἐμπορίαν.....

Ἀπὸ τὴν πραγματοποιηθεῖσα μεταγραφὴ καὶ σχολιασμὸ τοῦ χειρογράφου προέκυψαν τὰ κάτωθι:

Ὁ κώδικας, τοῦ ὁποίου ὁ τίτλος εἶναι ¨Μαθηματάριον¨ φέρει τὴ σφραγίδα τῆς Σχολῆς τῆς Δημητσάνης καὶ εἶναι ἀνώνυμος. Τὸ πρῶτο μέρος του, δηλαδὴ αὐτὸ τῆς Γεωμετρίας (φ. 4α- φ. 149β) περιέχει τὸ 1ο βιβλίο στὸ ὁποῖο ὑπάρχουν οἱ βασικοὶ γεωμετρικοὶ ὁρισμοί (σημείου, εὐθείας, γωνίας, κύκλου, τριγώνου, παραλληλογράμμου, κ. ἄ.), καὶ ἀποδεικνύονται 48 προτάσεις. Τὸ 2ο βιβλίο ἀφορᾶ στὰ παραλληλόγραμμα καὶ στὰ ἐμβαδά τους. Ἀποδεικνύονται 14 προτάσεις καὶ ἐπιλύονται 3 προβλήματα. Τὸ 3ο βιβλίο ἀφορᾶ στὸν κύκλο καὶ περιέχει 37 προτάσεις. Τὸ 4ο βιβλίο περιέχει τὰ ἐγγεγραμμένα καὶ περιγεγραμμένα σὲ κύκλο πολύγωνα, καὶ οἱ σχετικὲς προτάσεις εἶναι 17. Τὸ 5ο βιβλίο λόγους καὶ ἀναλογίες, μὲ 25 προτάσεις καὶ 7 θεωρήματα. Τὸ 6ο βιβλίο περιέχει τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα στὰ ὁποῖα ἀναφέρονται 33 προτάσεις. Τὸ 11ο βιβλίο, τὸ ὁποῖο ἀναφέρεται ἀπὸ τὸν συγγραφέα, ὡς τὸ ¨1ο τῶν στερεῶν¨,

[23] Γριτσόπουλος Τάσος, *Κατάλογος τῶν χειρογράφων κωδίκων τῆς Βιβλιοθήκης τῆς Σχολῆς Δημητσάνης,* ἀνατύπωσις ἐκ τοῦ ΚΒ΄ Τόμου τῆς Ἐπετηρίδος τῆς Ἑταιρείας Βυζαντινῶν Σπουδῶν, Τυπογραφεῖον Μυρτίδου, ἐν Ἀθήναις 1952.

[24] Καρὰς Γιάννης, *Οἱ ἐπιστῆμες στὴν τουρκοκρατία,* ἐκδ. Ε. Ι. Ε.- Βιβλιοπωλεῖο Ἑστίας, Ἀθήνα 1992, τόμ. Ι, Τὰ Μαθηματικά, σελ. 94.

περιέχει τὰ κεφάλαια τῆς Στερεομετρίας μέχρι καὶ αὐτὸ τῶν παραλληλεπιπέδων. Ἀναφέρονται δὲ 40 σχετικὲς προτάσεις. Τὸ 12ο βιβλίο περιέχει προτάσεις σχετικὲς μὲ τὴν πυραμίδα, τὸν κῶνο, τὸν κύλινδρο, καθὼς καὶ τὰ ἐγγεγραμμένα καὶ περιγεγραμμένα σὲ αὐτὰ τὰ στερεὰ σχήματα. Οἱ προτάσεις εἶναι 17 καὶ ἀφοροῦν καὶ στὴ θεωρία τῆς σφαίρας.

Τὸ δεύτερο μέρος τοῦ κώδικα (150α-180β) περιέχει ὕλη Ἀριθμητικῆς σχετιζομένη μὲ τοὺς ὁρισμοὺς τῶν ἀριθμῶν, τὶς πράξεις μεταξὺ αὐτῶν, τὸν ¨Πυθαγορικὸν Πίνακα¨, τὶς δοκιμὲς τῶν πράξεων, ὅπου καὶ ὁλοκληρώνεται ἀπὸ τὸν συγγραφέα τὸ 1ο βιβλίο τῆς Ἀριθμητικῆς. Στὸ 2ο βιβλίο τῆς Ἀριθμητικῆς περιέχονται τὰ κλάσματα καὶ οἱ πράξεις αὐτῶν, καθὼς καὶ οἱ δεκαδικοὶ μὲ τὶς πράξεις τους. Στὸ 3ο βιβλίο ἀναφέρονται μέθοδοι ὑπολογισμοῦ ριζῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, καὶ συγκεκριμένα τετραγωνικῶν καὶ κυβικῶν ριζῶν. Τὸ 4ο βιβλίο περιέχει θέματα σχετικὰ μὲ τοὺς λογαρίθμους καὶ τὶς προόδους, καὶ τὸ 5ο βιβλίο ἀναφέρεται σὲ προβλήματα τῆς καθημερινῆς ζωῆς, ποὺ ἀφοροῦν κυρίως στὸ ἐμπόριο.

Σημειωτέον ὅτι ἐκτὸς τοῦ κειμένου καὶ τῶν ἀριθμημένων ὑποσημειώσεων στὸ τέλος τῆς κάθε σελίδας, δὲν ὑπάρχουν ἄλλες ὑποσημειώσεις ἢ παρατηρήσεις στὸ πλάι ποὺ νὰ δείχνουν ὅτι στὸ ἀρχικὸ κείμενο ἔγιναν παρεμβολὲς ἀπὸ ἀντιγραφεῖς[25].

Ἡ διδασκαλία τῶν λογαρίθμων σύμφωνα μὲ τὸν κώδικα 72

Στὸ 4ο βιβλίο τῆς Ἀριθμητικῆς τοῦ χειρογράφου (6ος ὁρισμός), ὁ συγγραφέας γράφει: ¨Αἱ ἐκ πολλῶν ὅρων συνιστάμεναι ἀριθμητικαὶ ἀναλογίαι σειραὶ ἢ πρόοδοι λέγονται ἀριθμητικαί, (ἐν αἷς ἡ 1,2,3,4,5,6,7 κατὰ σειρὰ φυσικὴ ἀριθμητική), ὁμοίως καὶ ἐκ πολλῶν γεωμετρικῶν ὅρων, γεωμετρικαί¨. Μολονότι ὁ ὅρος "ἀριθμητικὴ πρόοδος" ἀνάγεται στὸν Διόφαντο[26], τὸν ὁποῖο τὸν 13^{o} αἰ. ἀντέγραφαν καὶ σχολίαζαν μεταξὺ ἄλλων καὶ βυζαντινοὶ λόγιοι[27], κάποιοι συγγραφεῖς δὲν ὀνόμαζαν αὐτὰ τὰ ἀθροίσματα ἀριθμητικὲς προόδους. Μὲ τέτοιου εἴδους ἀθροίσματα εἶχε ἀσχοληθεῖ ὁ Al-Karagī[28] τὸν 6^{ον} αἰ., καὶ ὁ Πέρσης Ἀβικέννας (Avicenne) τὸν 11^{ον} αἰ., ὁ ὁποῖος μάλιστα γιὰ τὸν ὑπολογισμό τους ἐφάρμοζε τὴν ἑξῆς μέθοδο[29]:

1+2= 3= 2+(1/2).2

1+2+3= 6= 2.3

---

[25] E. Mioni, *Εἰσαγωγὴ στὴν Ἑλληνικὴ Παλαιογραφία*, ἐκδ. ΜΙΕΤ, Ἀθήνα 1994, σελ. 124.
[26] *Διοφ. Ἀριθμ.*, σελ. 45.
[27] Constantinides, *High. Ed. Byz.*, σελ. 73, 157.
[28] Adel Anbouba, *L' Argèbre Al-Badī d' Al-Karagī*, Pub. de l' Univ. Libanaise, Beyrouth 1964, σελ. 34.
[29] Τὰ ἀθροίσματα αὐτὰ εὑρίσκονται στὸ ἔργο τοῦ Ἀβικέννα *Dânèsh-Nâma*, τὸ ὁποῖο γράφηκε στὰ περσικὰ τὸν 11^{o} αἰ. Βλ. Avicenne, *Le livre de science*, Les belles letters, 1986, σελ. 195.

1+2+3+4= 10= 2.4+(1/2).4
1+2+3+4+5= 15= 3.5
1+2+3+4+5+6=21=3.6+(1/2).6[30]

Βιβλίον 4^{ον}
Περὶ ἰσοδιαφερόντων καὶ λογαρίθμων ἀριθμοί.

Ὁρισμοί
1^{ος}: Ἀριθμητικὸς λόγος εἶναι κάποια καθ' ὑπεροχὴ σχέση, καὶ Γεωμετρικὸς λόγος κάποια κατὰ περιοχή σχέση.

Σχόλιον
Ὁ ἀριθμητικὸς λόγος τοῦ 8 καὶ τοῦ 2 εἶναι τὸ 6, ἐνῷ ὁ γεωμετρικὸς λόγος τους εἶναι τὸ 4.

2^{ος}: Ἡ Ἀριθμητικὴ ἀναλογία δύο ἀριθμητικῶν λόγων εἶναι παράθεσις, καὶ ἡ μὲν λέγεται συνεχής, ἡ δὲ διηρημένη ἢ διωρισμένη λέγεται.

Πόρισμα
Δὲν μπορεῖ νὰ συσταθεῖ ἀναλογία ἀριθμητικὴ ἢ γεωμετρική μὲ 3 ἢ λιγότερους ὅρους.

3^{ος}: Τὰ μεγέθη ποὺ εἶναι ἀριθμητικῶς ἀνάλογα ἢ ἐν ἀριθμητικῷ λόγω, ἔχουν τὴν ἐξῆς ἰδιότητα: Ὅσο διαφέρει τὸ πρῶτο ἀπὸ τὸ δεύτερο, τόσο διαφέρει καὶ τὸ δεύτερο ἀπὸ τὸ τρίτο, καὶ τὸ τρίτο ἀπὸ τὸ τέταρτο, κ.λπ. Π.χ. 2,5,8, ἢ 3,7,11,15.

4^{ος}: Τὰ μεγέθη ποὺ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀριθμητικῷ λόγω ἢ συνεχῶς κατὰ ἀριθμητικὸ λόγο ἔχουν τὴν ἰδιότητα τῶν μεγεθῶν τοῦ 3^{ου} ὁρισμοῦ, καὶ ἐπιπλέον δὲν μπορεῖ νὰ ἔχουν ἀριθμητικὸ λόγο ἴσο μὲ τὸ 0.

5^{ος}: Τὰ μεγέθη ποὺ εἶναι ἐν διηρημένω ἀριθμητικῷ λόγω, ἢ κατὰ διηρημένω ἀριθμητικῷ λόγω ἀνάλογον, εἶναι αὐτὰ ποὺ τὸ 1^{ο} διαφέρει ἀπὸ τὸ 2^{ο} ὅσο τὸ 3^{ο} ἀπὸ τὸ 4^{ο}, ὅπως τὰ 3,7,11,15.

6^{ος}: Οἱ ἀριθμητικὲς ἀναλογίες ποὺ ἔχουν πολλοὺς ὅρους λέγονται σειρές, ἢ ἀριθμητικὲς πρόοδοι, καὶ οἱ γεωμετρικὲς ἀναλογίες ποὺ ἔχουν πολλοὺς ὅρους λέγονται γεωμετρικὲς πρόοδοι.

---

[30] Ανωνύμου, Αριθμητική, Έκδοση Μαρία Χάλκου [Το Μαθηματικό περιεχόμενο του Codex Vindobonensis phil. Graecus 65 (φφ. 11- 126), Εισαγωγή, Έκδοση και Σχόλια], Κέντρο Βυζαντινών Ερευνών Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη 2006, σελ. 31.

7^{ος}: Ἐὰν οἱ ὅροι τῆς ἀναλογίες βαίνουν αὐξανόμενοι, τότε ἡ σειρὰ λέγεται αὔξουσα, ὅπως 3,5,7,9,11, ἐὰν δὲ βαίνουν μειούμενοι καταμειούμενη, ὅπως π.χ. 18,15,12,9,6.

Θεώρημα 1^{ον}

Ἐὰν ἡ σειρὰ τῶν μεγεθῶν ποὺ εἶναι σὲ συνεχὴ ἀριθμητικὸ λόγο εἶναι αὔξουσα, τότε ὁ κάθε ὅρος σχηματίζεται ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τοῦ προηγούμενου του καὶ τῆς διαφορᾶς. Ἐὰν δὲ εἶναι φθίνουσα, ὁ κάθε ὅρος ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἑπομένου του καὶ τῆς διαφορᾶς.

Δεῖξις

Ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ τοῦ 1^{ου} καὶ τοῦ 2^{ου} εἶναι ἴση μὲ τὴ διαφορὰ τοῦ 3^{ου} καὶ 4^{ου}, τότε στὴν αὔξουσα σειρὰ ἐὰν στὸν πρῶτο προστεθεῖ ἡ διαφορὰ θὰ προκύψει ὁ δεύτερος, κ.λπ. Στὴν μειουμένη δὲ σειρά, ἐὰν στὸν τρίτο προστεθεῖ ἡ διαφορὰ θὰ μᾶς δώσει τὸν δεύτερο, κ.λπ.

Πόρισμα

Ἐὰν γνωρίζουμε τὸν πρῶτον ὅρο μιᾶς σειρᾶς καὶ τὴ διαφορά, τότε μποροῦμε νὰ δημιουργήσουμε στοιχεῖα τῆς σειρᾶς ἐπ' ἄπειρον.

Θεώρημα 2^{ον}

Ἐὰν ἡ σειρὰ τῶν ἐν διῃρημένῳ ἀριθμητικῷ λόγῳ μεγεθῶν εἶναι αὔξουσα (3,6,7,10), τότε ὁ 2^{ος} εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ 1^{ου} καὶ τῆς διαφορᾶς, καὶ ὁ 4^{ος} εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ 3^{ου} καὶ τῆς διαφορᾶς. Ἐὰν εἶναι μειουμένη (24,20,16,12), τότε ὁ 1^{ος} εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ δευτέρου καὶ τῆς διαφορᾶς.

Δεῖξις

Ἁπλὴ ἐφαρμογὴ τοῦ 5^{ου} ὁρισμοῦ.

Θεώρημα 3^{ον}

Ἐὰν τρία μεγέθη εἶναι συνεχῶς κατὰ ἀριθμητικὸν λόγον ἀνάλογα, τότε τὸ ἄθροισμα τοῦ 1^{ου} καὶ τοῦ 3^{ου} εἶναι ἴσο μὲ τὸ διπλάσιο τοῦ δευτέρου.

Δεῖξις

Χρησιμοποιεῖ παραδείγματα γιὰ τὴν αὔξουσα 4,7,10, καὶ τὴ μειουμένη 25,15,5, ὅπου 4+10=14=2.7, καὶ 25+5=30=2.15. Βέβαια ἡ περιγραφὴ τοῦ συγγραφέα ὁδηγεῖ στὴ σημερινὴ ἀπόδειξη τῆς σχετικῆς πρότασης τοῦ κεφαλαίου τῶν ἀριθμητικῶν προόδων, ὅπου ἂν συμβολίσουμε μὲ α, β, γ τοὺς τρεῖς διαδοχικοὺς ὅρους μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, καὶ λ τὴ διαφορά, τότε β=α+λ, γ=α+2λ, ἄρα 2.β=2(α+λ)=2.α+2.λ=α+α+2.λ=α+γ.

Θεώρημα 4^{ον}

Ἐὰν τέσσερα μεγέθη εἶναι κατὰ διῃρημένῳ ἀριθμητικῷ λόγῳ, τότε τὸ ἄθροισμα τοῦ 1^{ου} καὶ τοῦ 4^{ου} εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ 2^{ου} καὶ τοῦ 3^{ου}.

Δεῖξις

Μὲ παραδείγματα ὁ συγγραφέας εἰσηγεῖται κατ' οὐσία τὴν ἑξῆς ἀπόδειξη: Ἔστω α,β,γ,δ τὰ μεγέθη ποὺ εἶναι κατὰ διῃρημένῳ ἀριθμητικῷ λόγῳ, καὶ ἔστω λ=β-α=δ-γ. Τότε α+δ=α+λ+γ=β+γ. Ὁμοίως ἂν ἡ ἀναλογία εἶναι μειουμένη.

Πρόβλημα 1^{ον}

Νὰ εὑρεθεῖ ὁ μέσος ἀριθμητικὸς ἀνάλογος τῶν ἀριθμῶν 9 καὶ 13.

Κατασκευή

9+13=22, 22/2=11.

Δεῖξις

Ἁπλὴ ἐφαρμογὴ τοῦ 3^{ου} θεωρήματος.

Πρόβλημα 2^{ον}

Νὰ εὑρεθεῖ ὁ 4^{ος} ἀριθμητικὸς ἀνάλογος τῶν 8,5,9.

Κατασκευή

5+9=14, 14-8=6.

Δεῖξις

Σύμφωνα μὲ τὸ 4^{ο} θεώρημα, ἐὰν συμβολίσουμε μὲ α,β,γ τοὺς δοθέντες ἀριθμούς, καὶ μὲ χ τὸν ζητούμενο, θὰ ἰσχύει ὅτι α+χ=β+γ, ἄρα 8+χ=5+9, ἢ 8+χ=14, ἄρα χ=6.

Θεώρημα 5^{ον}

Ἐὰν τέσσερα μεγέθη εἶναι ἀριθμητικῶς ἀνάλογα π.χ 3,7,5,9, τότε καὶ τὰ 3,5,7,9, καὶ τὰ 7,3,9,5 θὰ εἶναι ἀριθμητικῶς ἀνάλογα. Ἐὰν δὲ ἡ ἀναλογία εἶναι τεταγμένη (14^{ος} ὁρισμὸς τοῦ 5^{ου} βιβλίου τῆς Γεωμετρίας), ὅπως π.χ 1,2,3,4, καὶ 2,9,4,11, τότε θὰ εἶναι τεταγμένη καὶ ἡ ἀναλογία 1,9,3,11. Ἐπίσης, ἂν ἡ ἀναλογία εἶναι τεταραγμένη, ὅπως 3,7,5,9, καὶ 7,10,2,5, τὸ ἴδιο τεταραγμένη θὰ εἶναι καὶ ἡ 3,10,2,9. Ὁ λόγος εἶναι φανερός, διότι ἡ μεταξύ τους διαφορὰ εἶναι ἴδια.

Πρόβλημα 3ον
Νὰ εὑρεθεῖ ὁ μέσος γεωμετρικὸς ἀνάλογος τῶν ἀριθμῶν 1, καὶ 9.

Κατασκευή
1.9=9, $\sqrt{9}=3$.

Δεῖξις
Συμβολίζει τὸν ζητούμενο μὲ χ, ὁπότε $1/\chi=\chi/9$, ἄρα $1.9=\chi^2$, ἄρα $\chi=\sqrt{9}=3$.

Πρόβλημα 4ον
Νὰ εὑρεθεῖ τέταρτος "ἀνὰ γεωμετρικῶς ἀνάλογος" τῶν δοθέντων ἀριθμῶν 2, 7, 12.

Κατασκευή
7.12=84, 84:2=42.

Δεῖξις
Ἐὰν χ ὁ ζητούμενος, τότε 2:7=12:χ, ἄρα 2χ=7.12, ἢ χ=42.

8ος ὁρισμὸς
Λογάριθμος εἶναι ὁ ἀριθμὸς ποὺ δείχνει τὸν διπλασίονα, ἢ τὸν τριπλασίονα, ἢ τὸν τετραπλασίονα, κ.λπ. λόγο.

Σχόλιο
Στὴ γεωμετρικὴ σειρὰ 3, 6, 12, 24, 48, 96,.... οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 4, 5, 6,... εἶναι λογάριθμοι. Ὁ 2 εἶναι λογάριθμος τοῦ λόγου τοῦ 3 πρὸς τὸν 12, ὁ ὁποῖος εἶναι διπλασίων τοῦ λόγου τοῦ 3 πρὸς τὸν 6. Ὁ 3 εἶναι λογάριθμος τοῦ λόγου τοῦ 3 πρὸς τὸν 24, ὁ ὁποῖος εἶναι τριπλασίων τοῦ λόγου τοῦ 3 πρὸς τὸν 6. Ὁ 4 εἶναι λογάριθμος τοῦ λόγου τοῦ 3 πρὸς τὸν 48, ὁ ὁποῖος εἶναι τετραπλασίων τοῦ λόγου τοῦ 3 πρὸς τὸν 6, κ.λπ.

Συνέπειαι
1η: Οἱ ὅροι τῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς 0,1,2,3,4,5,6,7,8,..... εἶναι λογάριθμοι τῶν ὅρων τῆς γεωμετρικῆς σειρᾶς 1,2,4,8,16,32,64,128,256,...

2^{α}: Τὸ ἀριθμητικὸ 0 δηλώνει ὅτι εἶναι 0 τὰ ἀπὸ τῆς μονάδος τοῦ γεωμετρικοῦ 1 ἀποστήματα. Τὸ ἀριθμητικὸ 1 δηλώνει ὅτι εἶναι 1 τὰ ἀπὸ τῆς μονάδος τοῦ γεωμετρικοῦ 2 ἀποστήματα. Τὸ ἀριθμητικὸ 2 δηλώνει ὅτι εἶναι 2 τὰ ἀπὸ τῆς μονάδος τοῦ γεωμετρικοῦ 4 ἀποστήματα, κ.λπ.

3^{η}: Ἐξηγεῖ πὼς στὴν ἀριθμητικὴ σειρά, τὸ 0 εἶναι ὁ ἐκθέτης τῆς δύναμης $2^{o}=1$, τὸ 1 εἶναι ἐκθέτης τῆς δύναμης $2^{1}=2$, τὸ 2 τῆς $2^{2}=4$, τὸ 3 τῆς $2^{3}=8$, κ.λπ.

Θεώρημα 6^{ον}

Ἐὰν ὁ λογάριθμος τοῦ 1 εἶναι τὸ 0, τότε ὁ λογάριθμος κάθε γινομένου, π.χ τοῦ 8 θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων 1, καὶ 2 τοῦ πολλαπλασιαστῆ 2 καὶ τοῦ πολλαπλασιαστέου 4.

Δεῖξις

1:2=4:8 (κατὰ τὴν 1^{ην} συνέπειαν τοῦ 6^{ου} ὁρισμοῦ τοῦ 1^{ου} βιβλίου τῆς Ἀριθμητικῆς), ἄρα ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου 8 εἶναι ὁ τέταρτος τῶν ἰσοδιαφερόντων 0,1,2, δηλαδὴ ὁ τέταρτος ἀριθμητικὸς ἀνάλογος τοῦ λογαρίθμου τῆς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστῆ καὶ τοῦ πολλαπλασιαστέου. Ἀλλὰ ὁ τέταρτος ἀριθμητικὸς ἀνάλογος τοῦ λογαρίθμου τῆς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστῆ καὶ τοῦ πολλαπλασιαστέου εἶναι ἴσος μὲ τὴ διαφορὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν μέσων καὶ τοῦ 1^{ου} σύμφωνα μὲ τὸ 2^{ο} πρόβλημα. Ὅμως ὁ 1^{ος} εἶναι 0 ἐξ ὑποθέσεως, ἄρα ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου 8 εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα 3 τῶν λογαρίθμων τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ τοῦ πολλαπλασιαστῆ.

Πόρισμα 1^{ον}

Τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσο μὲ τὸν λογάριθμο τοῦ γινομένου αὐτῶν.

Πόρισμα 2^{ον}

Ὁ λογάριθμος τοῦ τετραγώνου ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι διπλάσιος τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ. Ὁ λογάριθμος τοῦ κύβου ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι τριπλάσιος τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ, κ.λπ.

Θεώρημα 7^{ον}

Ὁ λογάριθμος τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσος μὲ τὴ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν.

Δεῖξις

Ἰσχύει ὅτι δ:Δ=1:π (κατὰ τὴ 2^{η} συνέπεια τοῦ 1^{ου} βιβλίου Ἀριθμητικῆς), ἄρα ὁ λογάριθμος τοῦ πηλίκου εἶναι ὁ τέταρτος ἀριθμητικὸς ὅρος τῶν λογαρίθμων τοῦ διαιρέτη, τοῦ διαιρετέου, καὶ τῆς μονάδας. Ἀλλὰ ὁ 4^{ος} ἀριθμητικὸς εἶναι ἴσος μὲ τὴ διαφορὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν μέσων καὶ τοῦ πρώτου (κατά τὸ 2^{ο} πρόβλημα), ἄρα ὁ λογάριθμος τοῦ πηλίκου θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τοῦ διαιρετέου καὶ τῆς μονάδας μεῖον τὸν λογάριθμο τοῦ διαιρέτη. Ἀλλὰ ὁ λογάριθμος τῆς μονάδας εἶναι τὸ 0, ἄρα ὁ λογάριθμος τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸν λογάριθμο τοῦ διαιρετέου μεῖον τὸν λογάριθμο τοῦ διαιρέτη.

Πόρισμα 3^{ον}

Ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴση μὲ τὸν λογάριθμο τοῦ πηλίκου αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν.

Σημειώσεις

1^{η}: Πρῶτος ὁ διδάσκαλος τῆς Γεωμετρίας Βρίγγιος, μὲ τὴν ὁδηγία τοῦ Νεπέρτου συνέταξε τοὺς λογαρίθμους, τοὺς ὁποίους ἔλαβε ἀπὸ τὴ γεωμετρικὴ πρόοδο: 1,10,100,1000,10000, μὲ μέθοδο ποὺ θὰ ἀναλύσουμε πιὸ κάτω.

2^{α}: Οἱ λογάριθμοι τῶν ὅρων τῆς γεωμετρικῆς σειρᾶς 1,10,100,1000,10000 εἶναι οἱ ὅροι τῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς 0,1,2,3,4.

3^{η}: Οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν τῶν εὑρισκομένων μεταξὺ τοῦ 0 καὶ τοῦ 10 δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογισθοῦν εὔκολα, διότι δὲν μποροῦμε νὰ βροῦμε γεωμετρικὸν ὅρον μεταξὺ τοῦ 0 καὶ τοῦ 10, ἐπειδὴ αὐτὸς θὰ ἔπρεπε (σύμφωνα μὲ τὸ 3^{ο} πρόβλημα) νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 1.10, ἡ ὁποία ὅμως δὲν εὑρίσκεται μὲ ἀκρίβεια. Γιὰ τὸν λόγο αὐτὸ βρίσκουμε ὅτι κατὰ προσέγγιση ἕνας τέτοιος λογάριθμος, ὅπως π.χ ὁ λογάριθμος τοῦ 9 εἶναι ὁ 0,995424251, καὶ λέμε ὅτι αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ 9,0000000 δηλαδὴ κάποιου ἀριθμοῦ ποὺ μπορεῖ νὰ διαφέρει ἐλάχιστα ἀπὸ τὸν 9.

Μέθοδος εὕρεσης λογαρίθμων

Γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ 9:

Γράφουμε τοὺς ἀριθμοὺς 1 καὶ 10 μὲ τὴ μορφὴ 1,0000000 καὶ 10,0000000. Βρίσκουμε (3^{ο} πρόβλημα) τὸν μέσο γεωμετρικὸ 3,1622777 αὐτῶν τῶν δύο ἀριθμῶν. Στὴ συνέχεια βρίσκουμε τὸν μέσον ἀριθμητικὸ 0,50000000 (1^{ο} πρόβλημα) τῶν 0,0000000 καὶ 1,0000000. Ὁ 0,50000000 εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ 3,1622777. Βρίσκουμε τὸν μέσο γεωμετρικὸ τῶν 3,1622777 καὶ 10,0000000 καὶ τὸν μέσον ἀριθμητικὸ 0,75000000 τῶν 1,0000000 καὶ 0,50000000. Μὲ τὴν ἴδια διαδικασία καταλήγουμε σ' ἕνα μέσο γεωμετρικό, ὁ ὁποῖος διαφέρει λιγότερο ἀπὸ δεκατημόρια τοῦ μηλλιονίου ἀπὸ τὸν 9, δηλαδὴ εἶναι ἴσος μὲ τὸν 9,0000000. Αὐτὸς ὁ μέσος γεωμετρικὸς θὰ ἔχει λογάριθμο τὸν ἀντίστοιχο μέσον ἀριθμητικόν, δηλαδὴ τὸν 0,95424251. Ὑπολογίζοντας ὅμως τὸν λογάριθμο τοῦ 9 μπορεῖ νὰ βρεῖ κάποιος καὶ τὸν λογάριθμο τοῦ 3, τοῦ 81 (2^{ο} πόρισμα), τοῦ 27 (3^{ο} πόρισμα), κ.λπ.

Σημείωσις 4^{η}

Ὁ λογάριθμος περιέχει τόσες μονάδες ὅσα καὶ τὰ μηδενικὰ τοῦ 10, 100, 1000, κ.λπ.

Συνέπεια

Οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν τῶν εὑρισκομένων μεταξὺ τοῦ 1 καὶ τοῦ 10 εἶναι μικρότεροι τῆς μονάδος, οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν τῶν εὑρισκομένων μεταξὺ τοῦ 10 καὶ τοῦ 100 εἶναι μεγαλύτεροι τῆς μονάδος ἀλλὰ μικρότεροι ἀπὸ τὸ 2, κ.λπ.

Πρόβλημα 5^{ον}

Εὕρεση τοῦ λογαρίθμου τοῦ νόθου κλάσματος 9/5.

Κατασκευή

Ἀπὸ τὸν λογάριθμο 0,9542425 τοῦ 9 ἀφαιρεῖ τὸν 0,6989700 ποὺ εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ 5, καὶ βρίσκει 0,2552725, ποὺ εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ 9/5.

Δεῖξις

Ὁ λογάριθμος τοῦ πηλίκου εἶναι ἴσος μὲ τὴ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων ἀριθμητοῦ καὶ παρανομαστοῦ (3^{ο} πόρισμα).

Ἐὰν τὸ κλάσμα εἶναι γνήσιο π.χ τὸ 3/7, τότε ἡ διαφορὰ θὰ εἶναι "ἀποφατική". Ὁ συγγραφέας βρίσκει ὅτι ὁ λογάριθμος τοῦ 3/7 θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀρνητικὸ ἀριθμὸ -0,3679767, τὸν ὁποῖο καλεῖ ἀποφατικό καὶ γράφει ὅτι δηλώνεται μὲ τὸ ἀποφατικὸ σημεῖο.

Πρόβλημα 5^{ον}

Μὲ τὴ χρήση τῶν λογαρίθμων νὰ βρεθεῖ ὁ τέταρτος γεωμετρικὸς ἀνάλογος τῶν 4, 68, 3.

Κατασκευή

Προσθέτει τοὺς λογαρίθμους τοῦ 68 καὶ τοῦ 3, καὶ ἀπὸ τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ ἀθροίσματός τους ἀφαιρεῖ τὸν λογάριθμο τοῦ 4. Τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ 51, ὁ ὁποῖος 51 εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός.

Ἡ ἀπόδειξη γίνεται μὲ τὴ χρήση τοῦ 2^{ου} προβλήματος καὶ τῆς 1^{ης} συνέπειας αὐτοῦ τοῦ βιβλίου.

Κατὰ τὸν συγγραφέα τοῦ κώδικα 72 οἱ λογάριθμοι εἶναι εὔχρηστοι στὴ Τριγωνομετρία ἀλλὰ καὶ τὴν Ἀστρονομία, ὅπου κατὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς οἱ χρησιμοποιούμενοι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦνται ἀπὸ πολλὰ ψηφία. Καὶ τοῦτο διότι ἀντὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο ἀριθμῶν μποροῦμε νὰ προσθέσουμε τοὺς λογαρίθμους αὐτῶν, καὶ ἀντὶ τῆς διαίρεσης δύο ἀριθμῶν, νὰ ἀφαιρέσουμε τοὺς ἀντιστοίχους λογαρίθμους τους. Ὅταν βρίσκουμε δὲ κάποιον λογάριθμο ὡς ἀποτέλεσμα ἀθροίσματος ἢ διαφορᾶς δύο λογαρίθμων, τότε ἀναζητοῦμε στοὺς λογαριθμικοὺς πίνακες τὸν ἀριθμὸ ποὺ ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτὸν τὸν λογάριθμο. Οἱ καλύτεροι λογαριθμικοὶ πίνακες κατὰ τὸν Νικηφόρο Θεοτόκη εἶναι αὐτοὶ ποὺ ἔχουν ἐκδοθεῖ ἀπὸ τὸν ΄Ούλάη΄ (Euler).

Συμπεράσματα

Στὸ ἄρθρο αὐτὸ παρατέθηκαν στοιχεῖα, ὅπως αὐτὰ προέκυψαν ἀπὸ τὴν μελέτη τοῦ κώδικα 72 τῆς Βιβλιοθήκης τῆς Δημητσάνας, σχετιζόμενα μὲ τὴν Παιδεία ἀλλὰ καὶ τὶς συνθῆκες διαβίωσης τῶν κατοίκων στὴν τουρκοκρατούμενη Ἑλλάδα, λίγα μόλις χρόνια πρὶν τὴν ἐπανάσταση τοῦ 1821. Στὴ συνέχεια παρουσιάσαμε τὸ κεφάλαιο τῶν λογαρίθμων, ὅπως αὐτὸ καταγράφεται στὸ χειρόγραφο τοῦ 18ου αἰ. Προσφέραμε κατ' αὐτὸν τὸν τρόπο τὴ δυνατότητα σύγκρισης τῆς μεθόδου διδασκαλίας τῶν λογαρίθμων κατὰ τὰ τέλη τοῦ 18ου αἰ. μὲ αὐτὴν ποὺ χρησιμοποιοῦμε σήμερα στη Β΄ θμια Ἐκπαίδευση, καθὼς καὶ τὴν ἐξαγωγὴ συμπερασμάτων ἐπ' αὐτῶν τῶν δύο μεθόδων.

Βιβλιογραφία

Ἱστορίες-Ἐγκυκλοπαίδειες

Ἱστορία τῶν Ἑλλήνων, Ὁ Ἑλληνισμὸς ὑπὸ ξένη κυριαρχία 1453- 1821, ἐκδ. Δομή, Ἀθήνα ^{2}2006, τόμ. X.

Μεγάλη Παιδαγωγικὴ Ἐγκυκλοπαίδεια, ἐκδ. Ἑλληνικὰ Γράμματα-Herder, Ἀθῆναι 1968, τόμ. III.

Πηγές

Ανωνύμου, Αριθμητική, Έκδοση Μαρία Χάλκου [Το Μαθηματικό περιεχόμενο του Codex Vindobonensis phil. Graecus 65 (φφ. 11- 126), Εισαγωγή, Έκδοση και Σχόλια], Κέντρο Βυζαντινών Ερευνών Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη 2006.

Ανωνύμου, Μαθηματάριον, Έκδοση Μαρία Χάλκου [Η διδασκαλία των Μαθηματικών στην Ελλάδα κατά τα τελευταία χρόνια της τουρκοκρατίας, σύμφωνα με τον κώδικα 72 του 18ου αι. της Βιβλιοθήκης της Δημητσάνας, Εισαγωγή, Έκδοση και Σχόλια], Αθήνα 2009 (έντυπο και epub)

Adel Anbouba, *L' Argèbre Al-Badī d' Al-Karagī*, Pub. de l' Univ. Libanaise, Beyrouth 1964.

Avicenne, *Le livre de science*, Les belles letters, 1986.

V. Brunet de Presle- Alexandre Blanchet, *Grèce depuis la conquête romane jusqu' à nos jours,* pub. F. Didot, Paris 1860.

Γεωργακόπουλος Νίκος, *Ἡ παιδεία στὴν Ἀρκαδία ἐπὶ τουρκοκρατίας,* ἐκδ. Φύλλα, Τρίπολη 2000.

Γεωργακόπουλος Νίκος, *Ἑλληνικὰ Σχολεῖα στὸ Μοριὰ στὴν περίοδο τῆς Ὀθωμανικῆς κυριαρχίας καὶ τὴν Ἑλληνικὴ Ἐπανάσταση,* Τρίπολη 2006.

Γριτσόπουλος Τάσος, *Κατάλογος τῶν χειρογράφων κωδίκων τῆς Βιβλιοθήκης τῆς Σχολῆς Δημητσάνης,* ἀνατύπωσις ἐκ τοῦ ΚΒ΄ Τόμου τῆς Ἐπετηρίδος τῆς Ἑταιρείας Βυζαντινῶν Σπουδῶν, Τυπογραφεῖον Μυρτίδου, ἐν Ἀθήναις 1952.

Γριτσόπουλος Ἀναστάσιος, *Σχολὴ Δημητσάνης,* Ἀθήνα 1962.

Zoël Dalègre, *Ἕλληνες καὶ Ὀθωμανοί (1453- 1923),* μετάφρ. Σοφία Μπίνη-Σωτηροπούλου, ἐκδ. Σ. Ζαχαρόπουλος, Ἀθήνα 2006.

Issues in the Historiography of Post- Byzantine Science, Boston Studies in the Philosophy of Science, Kluwer Academic Publishers, vol. 151, 1994. D. Dialetis- E. Nikolaidis, Trends in the Historiography of Science.

C. N. Constantinides, *Higher Education in Byzantium in the thirteenth and eartly forteenth centuries (1204-1310),* Cyprus Research Center, Nicosia 1982.

Διοφάντου Ἀριθμητικά, Ἐκδ. Ε. Σταμάτη . ΟΕΔΒ, Ἀθῆναι 1963.

Howe, Samuel Gridley, *An Historical sketch of the Greek Revolution,* pub. White, Gallaher and White, New York 1828.

Πρακτικὰ 25ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικῆς Παιδείας τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας: Ἡ Μαθηματικὴ Ἐκπαίδευση καὶ ἡ σύγχρονη πραγματικότητα τοῦ 21ου αἰώνα, Θωμὰς Καρανίκας, Βόλος, Νοέμβριος 2008, σελ. 508-523.

Καρὰς Γιάννης, *Οἱ ἐπιστῆμες στὴν τουρκοκρατία,* ἐκδ. Ε. Ι. Ε.- Βιβλιοπωλεῖο Ἑστίας, τόμ. Ι, Τὰ Μαθηματικά, Ἀθήνα 1992.

E. Mioni, *Εἰσαγωγὴ στὴν Ἑλληνικὴ Παλαιογραφία*, ἐκδ. ΜΙΕΤ, Ἀθήνα 1994.

Πέκιος Ἀλέξανδρος, Πνευματικὴ ἄποψις τῆς τουρκοκρατουμένης Ἑλλάδος: ἤτοι περιεκτικὸν διάγραμμα τῆς ἐπὶ τουρκοκρατίας διανοητικῆς τοῦ ἑλληνικοῦ ἔθνους καταστάσεως, ἐκ τοῦ Τυπογραφείου Ζέλλιτς καὶ Υἱῶν, ἐν Κωνσταντινουπόλει 1880.

Στεφανίδης Μιχαήλ, *Αἱ φυσικαὶ ἐπιστῆμαι ἐν Ἑλλάδι πρὸ τῆς Ἐπαναστάσεως: Ἡ Ἐκπαιδευτικὴ Ἐπανάστασις,* Τυπογραφικὴ Ἑταιρεία Π. Δ. Σακελλάριος, Ἀθῆναι 1926.

Φιλιππίδης Νικόλαος, *Ἐπίτιμος Ἱστορία τοῦ Ἑλληνικοῦ Ἔθνους 1453-1821,* ἐκ τοῦ Τυπογραφείου Α. Καλαράκη, ἐν Ἀθήναις [2]1900.