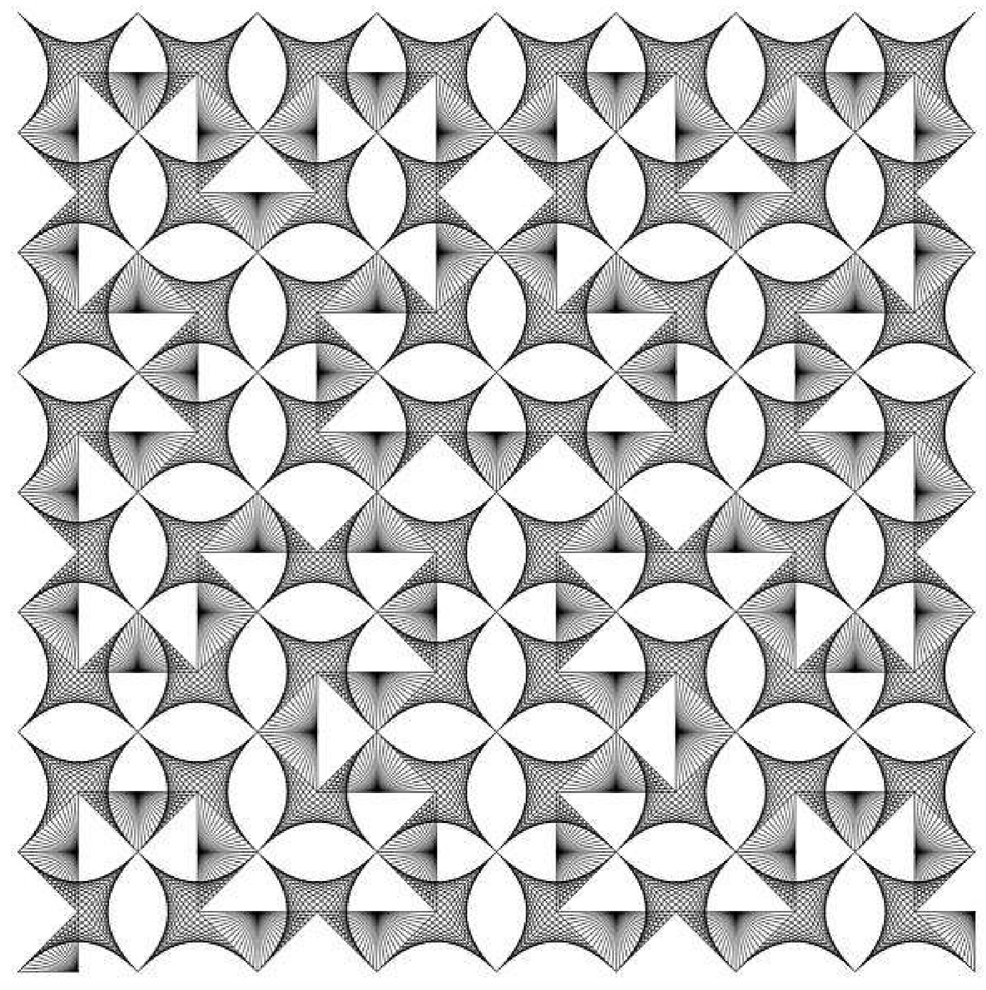
Αναλυτικές λύσεις
όλων των θεμάτων στα Μαθηματικά
των Πανελλαδικών εξετάσεων
και των Επαναληπτικών εξετάσεων
2000 – 2013



Θεολόγης Καρκαλέτσης

Μαθηματικός

teomail@sch.gr

Πρόλογος

Στο βιβλίο αυτό περιέχονται

- όλα τα θέματα στο μάθημα των Μαθηματικών Κατεύθυνσης στις πανελλήνιες εξετάσεις καθώς και στις επαναληπτικές εξετάσεις από το 2000 έως και το 2012.
- αναλυτικές και αιτιολογημένες απαντήσεις σε όλα τα παραπάνω θέματα.

Τα θέματα είναι χωρισμένα σε 4 ενότητες, σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο:

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Όριο – Συνέχεια συνάρτησης
- Διαφορικός λογισμός
- Ολοκληρωτικός λογισμός

Σε κάθε μία ενότητα τα θέματα είναι χωρισμένα στις παρακάτω ενότητες

- Αποδείξεις θεωρημάτων
- Ορισμοί
- Ερωτήσεις σωστό – λάθος
- Αντιστοιχίσεις
- Ασκήσεις

Το βιβλίο μπορείτε να το βρείτε σε ηλεκτρονική μορφή στη διεύθυνση
http://blogs.sch.gr/teomail/

Περιεχόμενα

1. Μιγαδικοί αριθμοί

1. Αποδείξεις

1. Πανελλαδικές 2001 – Πανελλήνιες 2007

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2. Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

2. Πανελλαδικές 2001

Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z| = 1$, να δείξετε ότι $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

2. Ερωτήσεις Σωστό – Λάθος

1. Πανελλαδικές 2001

Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

α) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

β) $|z|^2 = z^2$

γ) $|z| = -|\bar{z}|$

δ) $|z| = |\bar{z}|$

ε) $|i\bar{z}| = |z|$

α) Σωστό. **β)** Λάθος. **γ)** Λάθος. Το μέτρο είναι μη αρνητικός α-ριθμός άρα η δοσμένη σχέση ισχύει μόνο για z = 0.

δ) Σωστό. **ε)** Σωστό. Είναι $|i\bar{z}| = |i||\bar{z}| = 1 \cdot |z| = |z|$.

2. Πανελλαδικές 2003

Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και $\bar{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει: $|z| = |\bar{z}| = |-z|$.

Σωστό.

3. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2003

Αν z_1 και z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Σωστό.

4. Πανελλαδικές 2004

Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτινών τους.

Σωστό.

5. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2004 – 2005

Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

Σωστό.

6. Πανελλαδικές 2006

Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|^2 = z^2$.

Λάθος. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

7. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2006

Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει: $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$.

Σωστό.

8. Πανελλήνιες 2008

Όταν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ με α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών.

Λάθος, αν είναι Δ < 0 τότε η εξίσωση έχει δύο μιγαδικές ρίζες.

9. Πανελλήνιες 2009

Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει: $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

Σωστό.

10. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2009

Αν z είναι ένας μιγαδικός αριθμός τότε για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει: $\overline{(z^\nu)} = (\bar{z})^\nu$

Σωστό.

11. Πανελλήνιες 2010

Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτινών τους.

Σωστό.

12. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2010

Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

Σωστό.

13. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2011

Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζουμε $z^0 = 1$.

Σωστό.

14. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2011

Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $z - \bar{z} = 2\beta$.

Λάθος. Ισχύει $z - \bar{z} = 2\beta i$.

15. Πανελλαδικές 2012

Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

Σωστό.

16. Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2012

Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

Σωστό.

17. Πανελλαδικές 2013

Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ^2, όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.

Λάθος. Η ακτίνα του κύκλου είναι ρ.

18. Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2013

Για οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|\bar{z}| = |-z|$.

Σωστό.

3. Αντιστοίχηση

1. Πανελλήνιες 2001

Αν $z_1 = 3 + 4i$ και $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$, να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της Στήλης Α και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της Στήλης Β έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\|z_1 \cdot z_2\|$	**α.** 4
2. $\|z_1^2\|$	**β.** 2
3. $\|z_2\|^2$	**γ.** 25
4. $-\|\overline{z_1}\|$	**δ.** –5
5. $\|iz_2\|$	**ε.** –2
	στ. 5
	ζ. 10

1 → ζ, 2 → γ, 3 → α, 4 → δ, 5 → β.

4. Ασκήσεις

1. *Πανελλήνιες 2000 – 2ο θέμα*

α) Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=\dfrac{5+i}{2+3i}$. Να γράψετε τον z στη μορφή $\alpha+\beta i$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. **Μονάδες 4**

β) Να βρεθούν τα σημεία του επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει $\left|\dfrac{z-1}{z-i}\right|=1$. **Μονάδες 5**

Λύση

α) $z=\dfrac{5+i}{2+3i}=\dfrac{(5+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\dfrac{10-15i+2i-3i^2}{2^2+3^2}=\dfrac{13-13i}{13}=1-i$.

β) Έστω $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$.

Είναι $\left|\dfrac{z-1}{z-i}\right|=1\Leftrightarrow|z-1|=|z-i|\Leftrightarrow|x+yi-1|=|x+yi-i|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|(x-1)+yi|=|x+(y-1)i|\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2=x^2+(y-1)^2\Leftrightarrow\cancel{x^2}-2x+\cancel{1}+\cancel{y^2}=\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-2y+\cancel{1}\Leftrightarrow y=x$.

Άρα τα ζητούμενα σημεία ανήκουν στην ευθεία $y=x$.

2. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2000 – 2ο θέμα*

α) Αν z_1,z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2+2z+2=0$, να αποδείξετε ότι: $z_1^{20}-z_2^{20}=0$. **Μονάδες 12**

β) Αν z_1 είναι ρίζα της εξίσωσης του (α) ερωτήματος, με φανταστικό μέρος θετικό αριθμό, να βρείτε τις τιμές του θετικού ακεραίου ν για τις οποίες z_1^{ν} είναι πραγματικός αριθμός. **Μονάδες 8**

Λύση

α) $z^2+2z+2=0\Rightarrow z^2+2z+1=-1\Rightarrow(z+1)^2=i^2\Rightarrow z_1=-1+i$ και $z_2=-1-i$.

$z_1^{20}-z_2^{20}=\left(-1+i\right)^{20}-\left(-1-i\right)^{20}=\left[\left(-1+i\right)^2\right]^{10}-\left[\left(-1-i\right)^2\right]^{10}=\left(-2i\right)^{10}-\left(2i\right)^{10}=0$

β) $z_1^2=\left(-1+i\right)^2=-2i$, $z_1^3=z_1^2\cdot z_1=\left(-2i\right)\left(-1+i\right)=2\left(1+i\right)$,

$z_1^4=\left(-2i\right)^2=-4$, $z_1^5=-4\left(-1+i\right)$,

$z_1^6=z_1^4\cdot z_1^2=-4\cdot\left(-2i\right)=8i$, κ.λπ.

άρα ο z_1^{ν} είναι πραγματικός αριθμός για $\nu=\text{πολ}4$

3. *Πανελλήνιες 2003 – 2ο θέμα*

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha+\beta i$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $w=3z-i\bar{z}+4$, όπου $\bar{z}$ ο συζυγής του z.

α) Να αποδείξετε ότι : $\mathrm{Re}\left(w\right)=3\alpha-\beta+4$, $\mathrm{Im}\left(w\right)=3\beta-\alpha$. Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-2$. Μονάδες 9

γ) Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-2$, έχει το ελάχιστο μέτρο. Μονάδες 10

Λύση

α) $w=3\left(\alpha+\beta i\right)-i\left(\alpha-\beta i\right)+4\Rightarrow w=3\alpha-\beta+4+i\left(3\beta-\alpha\right)$.

β) $M\left(w\right)\in$ στην $y=x-12$ άρα οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Επομένως είναι $3\beta-\alpha=3\alpha-\beta+4-12\Rightarrow\beta=\alpha-2$.

Άρα οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία $y=x-2$.

γ) Η εικόνα του ζητούμενου μιγαδικού είναι το σημείο τομής της $y=x-2$ και της κάθετης προς αυτήν ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων ($y=-x$). Το σύστημα $\begin{cases}y=x-2\\y=-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x=x-2\\\to\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$. Άρα $z=1-i$.

4. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2003 – 2ο θέμα*

α) Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z| = 2 \text{ και } \mathrm{Im}(z) \geq 0$$ **Μονάδες 12**

β) Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ), τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{4}{z}\right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα, το οποίο βρίσκεται στον άξονα x′x.

Μονάδες 13

Λύση

α) Είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα 2 που έχουν τεταγμένη θετική ή μηδέν.

β) Για $z = x + yi$ είναι $w = \frac{1}{2}\left(x + yi + \frac{4}{x + yi}\right) = \frac{1}{2}\left(x + yi + \frac{\cancel{4}(x - yi)}{\cancel{x^2 + y^2}}\right) = x$.

Επομένως $\mathrm{Im}(w) = 0$ άρα η εικόνα του w ανήκει στο x′x.

5. *Πανελλήνιες 2005 – 2ο θέμα*

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$.

α) Δείξτε ότι: $\bar{z}_1 = \frac{9}{z_1}$. **Μονάδες 7**

β) Δείξτε ότι ο αριθμός $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός. **Μονάδες 9**

γ) Δείξτε ότι: $|z_1 + z_2 + z_3| = \frac{1}{3}|z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|$. **Μονάδες 9**

Λύση

α) $|z_1| = 3 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 9 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 = 9 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \frac{9}{z_1}$.

β) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}\right)}=\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}+\overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}+\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}=\frac{\frac{9}{z_1}}{\frac{9}{z_2}}+\frac{\frac{9}{z_2}}{\frac{9}{z_1}}=\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_1}{z_2}$. Άρα $\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_1}{z_2}\in\mathbb{R}$.

γ) $|z_1+z_2+z_3|=\left|\overline{z_1+z_2+z_3}\right|=\left|\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}\right|=\left|\frac{9}{z_1}+\frac{9}{z_2}+\frac{9}{z_3}\right|=$

$$=9\left|\frac{z_2\cdot z_3+z_1\cdot z_3+z_1\cdot z_2}{z_1z_2z_3}\right|=9\frac{|z_2\cdot z_3+z_1\cdot z_3+z_1\cdot z_2|}{|z_1||z_2||z_3|}$$

$$=9\frac{|z_2\cdot z_3+z_1\cdot z_3+z_1\cdot z_2|}{3\cdot 3\cdot 3}=\frac{1}{3}|z_2\cdot z_3+z_1\cdot z_3+z_1\cdot z_2|.$$

6. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2005 – ο θέμα*

α) Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $z_1+z_2=4+4i$ και $2z_1-\overline{z_2}=5+5i$, να βρείτε τους z_1, z_2. **Μονάδες 10**

β) Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύουν: $|z-1-3i|\le\sqrt{2}$ και $|w-3-i|\le\sqrt{2}$, τότε:

i) Να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι ώστε $z=w$. **Μονάδες 10**

ii) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z-w|$. **Μονάδες 5**

Λύση

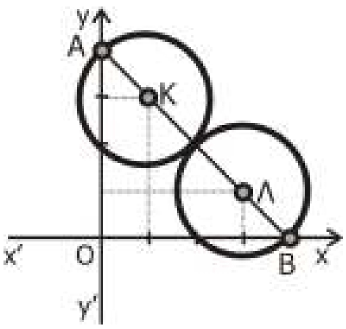
α) $\begin{cases} z_1+z_2=4+4i \\ 2z_1-\overline{z_2}=5+5i \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} -2z_1-2z_2=-8-8i \\ 2z_1-\overline{z_2}=5+5i \end{cases}$.

Προσθέτουμε κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις και έχουμε:

$-2z_2-\overline{z_2}=-3-3i\Rightarrow -2(x_2+iy_2)-(x_2-iy_2)=-3-3i$.

Λύνοντας, βρίσκουμε $z_2=1+3i$.

Αντικαθιστώντας στην πρώτη σχέση βρίσκουμε $z_1=3+i$.



β) Ο γεωμετρικός τόπος του z είναι ο κυκλικός δίσκος με κέντρο το $K(1,3)$ και ακτίνα $\rho_z=\sqrt{2}$. Ο γεωμετρικός τόπος του w είναι ο κυκλικός δίσκος με κέντρο το $\Lambda(3,1)$ και ακτίνα $\rho_w=\sqrt{2}$.

Είναι ΚΛ=$\sqrt{(3-1)^2+(1-3)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}=\sqrt{2}+\sqrt{2}=$

$\rho_z+\rho_w$. Άρα οι δύο κύκλοι εφάπτονται δηλαδή υπάρχει

μοναδικό σημείο στο οποίο τέμνονται οι δύο κύκλοι, δηλαδή υπάρχουν μοναδικοί z, w τέτοιοι ώστε z = w.

γ) Το $|z-w|$ παίρνει τη μέγιστη τιμή του στα σημεία Α και Β που τέμνει η ΚΛ τους δύο κύκλους.

Είναι ΑΒ $=|z-w|=2\rho_z+2\rho_w=4\sqrt{2}$.

7. *Πανελλήνιες 2006 – ο θέμα*

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1,z_2,z_3 με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ και $z_1+z_2+z_3=0$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $|z_1-z_2|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$. **Μονάδες 9**

ii) $|z_1-z_2|^2\le 4$ και $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\ge -1$. **Μονάδες 8**

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1,z_2,z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν. **Μονάδες 8**

Λύση

α) i) Είναι $z_1+z_2+z_3=0$ άρα $z_1=-z_2-z_3$.

$$|z_1-z_2|=|z_3-z_1|\Leftrightarrow|-z_2-z_3-z_2|^2=|z_3-(-z_2-z_3)|^2\Leftrightarrow|-2z_2-z_3|^2=|z_2+2z_3|^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(-2z_2-z_3)\overline{(-2z_2-z_3)}=(z_2+2z_3)\overline{(z_2+2z_3)}$$

$$\Leftrightarrow 4|z_2|^2+2z_2\bar{z}_3+2\bar{z}_2z_3+|z_3|^2=|z_2|^2+2z_2\bar{z}_3+2\bar{z}_2z_3+4|z_3|^2\Leftrightarrow|z_2|^2=|z_3|^2.$$

Η σχέση ισχύει άρα ισχύει και η αρχική.

Όμοια ξεκινάμε από τη σχέση $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3|$ και καταλήγουμε σε μία σχέση που ισχύει.

ii) $|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \le |z_1| + |-z_2| = 1 + 1 = 2$ άρα $|z_1 - z_2|^2 \le 4$

$|z_1 - z_2|^2 \le 4 \Rightarrow (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} \le 4 \Rightarrow |z_z|^2 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + |z_2{}^2| \le 4 \Rightarrow$

$-z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 \le 2 \Rightarrow z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 \ge -2 \Rightarrow z_1\bar{z}_2 + \overline{(z_1\bar{z}_2)} \ge -2 \Rightarrow 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \ge -2$

$\Rightarrow \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \ge -1$.

β) Τα μέτρα των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 είναι ίσα με τη μονάδα άρα και οι τρεις μιγαδικοί ανήκουν στον μοναδιαίο κύκλο C: $x^2 + y^2 = 1$.

Από τη σχέση $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$ συμπεραίνουμε ότι οι τρεις μιγαδικοί ισαπέχουν άρα σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Είναι $|z_1 + z_2| = |-z_3| = 1$. Επομένως

$|z_1 + z_2|^2 = 1 \Rightarrow (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = 1 \Rightarrow\Rightarrow |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + |z_2|^2 = 1$

$\Rightarrow 1 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) + 1 = 1 \Rightarrow 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = -1 \Rightarrow \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = -\frac{1}{2}$.

Επίσης $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = |z_1|^2 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + |z_2|^2 =$

$= |z_1|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 = 1 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 3$

8. *Πανελλήνιες 2007 – 2ο θέμα*

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{2 + ai}{a + 2i}$ με $a \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ = 1. **Μονάδες 9**

β) Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο $z = \frac{2 + ai}{a + 2i}$ για α = 0 και α = 2 αντίστοιχα.

i) Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2. **Μονάδες 8**

ii) Να αποδειχθεί ότι ισχύει $(z_1)^{2\nu} = (-z_2)^{\nu}$ για κάθε φυσικό αριθμό ν. **Μονάδες 8**

Λύση

α) Είναι $|z| = \left|\dfrac{2+\alpha i}{\alpha+2i}\right| = \dfrac{|2+\alpha i|}{|\alpha+2i|} = \dfrac{\sqrt{2^2+\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+2^2}} = 1$, άρα η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει σε κύκλο με κέντρο Ο(0, 0) και ακτίνα ρ = 1.

β) Είναι $z_1 = \dfrac{2}{2i} = \dfrac{2i}{2i^2} = -i$ και $z_2 = \dfrac{2+2i}{2+2i} = 1$.

i) Η απόστασή τους είναι $|z_1 - z_2| = |-i-1| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

ii) $(z_1)^{2\nu} = (-i)^{2\nu} = i^{2\nu} = (i^2)^{\nu} = (-1)^{\nu} = (-z_2)^{\nu}$.

9. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2007 – 4ο θέμα*

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \dfrac{2-\bar{z}_1}{2+\bar{z}_1}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\beta \neq 0$. Δίνεται επίσης ότι $z_2 - z_1 \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι $z_2 - z_1 = 1$. **Μονάδες 9**

β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο. **Μονάδες 6**

γ) Αν ο αριθμός ${z_1}^2$ είναι φανταστικός και $\alpha\beta > 0$, να υπολογισθεί ο z_1 και να δειχθεί ότι $(z_1+1+i)^{20} - (\bar{z}_1+1-i)^{20} = 0$. **Μονάδες 10**

Λύση

α) Είναι $z_2 - z_1 = \dfrac{2-\bar{z}_1}{2+\bar{z}_1} - z_1 = \dfrac{2-(\alpha-\beta i)}{2+\alpha-\beta i} - (\alpha+\beta i) = \dfrac{(2-\alpha)+\beta i}{(2+\alpha)-\beta i} - (\alpha+\beta i)$

$$= \dfrac{(2-\alpha)+\beta i}{(2+\alpha)-\beta i} - (\alpha+\beta i) = \dfrac{\left[(2-\alpha)+\beta i\right]\left[(2+\alpha)+\beta i\right]}{(2+\alpha)^2+\beta^2} - (\alpha+\beta i)$$

$$=\frac{\left[(2+\beta i)-\alpha\right]\left[(2+\beta i)+\alpha\right]}{(2+\alpha)^2+\beta^2}-(\alpha+\beta i)=\frac{4+4\beta i-\beta^2-\alpha^2}{(2+\alpha)^2+\beta^2}-\alpha-\beta i$$

$$=\left[\frac{4-\beta^2-\alpha^2}{(2+\alpha)^2+\beta^2}-\alpha\right]+\beta i\left(\frac{4}{(2+\alpha)^2+\beta^2}-1\right) \quad \textbf{(1)}$$

Ξέρουμε ότι $z_2-z_1\in\mathbb{R}$ άρα $\beta\left(\frac{4}{(2+\alpha)^2+\beta^2}-1\right)=0$.

Είναι $\beta\neq 0$ άρα $\frac{4}{(2+\alpha)^2+\beta^2}-1=0\Rightarrow\frac{4}{(2+\alpha)^2+\beta^2}=1\Rightarrow(2+\alpha)^2+\beta^2=4$ **(2)**

$\Rightarrow 4+4\alpha+\alpha^2+\beta^2=4\Rightarrow\alpha^2+\beta^2=-4\alpha$. **(3)**

Άρα αν στη σχέση (1) $z_2-z_1=\left[\frac{4-\beta^2-\alpha^2}{(2+\alpha)^2+\beta^2}-\alpha\right]+\beta i\left(\frac{4}{(2+\alpha)^2+\beta^2}-1\right)$ βάλουμε όπου $\mathrm{Im}(z_2-z_1)=0$ και αντικαταστήσουμε τη σχέση (3) έχουμε

$$z_2-z_1=\frac{4-(\alpha^2+\beta^2)}{4+4\alpha+\alpha^2+\beta^2}-\alpha=\frac{4-(-4\alpha)}{4+4\alpha-4\alpha}-\alpha=\frac{4+4\alpha}{4}-\alpha=1+\alpha-\alpha=1.$$

β) Από τη σχέση (3) έχουμε ότι για τον μιγαδικό $z=\alpha+\beta i$ ισχύει $(2+\alpha)^2+\beta^2=4$. Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με κέντρο το O(−2, 0) και ακτίνα ρ = 2.

γ) Είναι $z_1^2=(\alpha+\beta i)^2=\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta i$.

Ο z_1^2 είναι φανταστικός άρα $\alpha^2-\beta^2=0\Rightarrow\alpha^2=\beta^2\Rightarrow\alpha=\pm\beta$. Όμως είναι $\alpha\beta>0$ άρα οι α και β είναι ομόσημοι. Επομένως είναι α = β.

Όμως για τον $z_1=\alpha+\beta i$ ισχύει η σχέση $(2+\alpha)^2+\beta^2=4$ η οποία για α = β δίνει

$$(2+\alpha)^2+\alpha^2=4\Rightarrow 4+4\alpha+\alpha^2+\alpha^2=4\Rightarrow 2\alpha^2+4\alpha=0\Rightarrow 2\alpha(\alpha+2)=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \alpha=-2\end{cases}$$

Η α = 0 απορρίπτεται ($\alpha=\beta\neq 0$). Επομένως $\alpha+2=0\Rightarrow\alpha=-2\Rightarrow z_1=-2-2i$.

Από τη σχέση $(z_1+1+i)^{20}-(\overline{z}_1+1-i)^{20}=0$ προκύπτει

$$(-2-2i+1+i)^{20}-(-2+2i+1-i)^{20}=(-1-i)^{20}-(-1+i)^{20}$$

$$=\left[\left(-1-i\right)^2\right]^{10}-\left[\left(-1+i\right)^2\right]^{10}=\left(2i\right)^{10}-\left(-2i\right)^{10}=2^{10}\cdot i^{10}-\left(-2\right)^{10}i^{10}=0.$$

10. *Πανελλήνιες 2008 – 2ο θέμα*

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν

$$\left|\left(i+2\sqrt{2}\right)z\right|=6 \quad \text{και} \quad \left|w-\left(1-i\right)\right|=\left|w-\left(3-3i\right)\right|$$

τότε να βρείτε:

α) το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.

Μονάδες 6

β) το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w.

Μονάδες 7

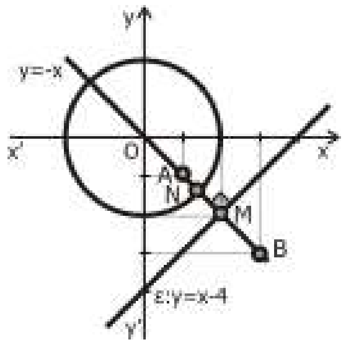
γ) την ελάχιστη τιμή του $|w|$. **Μονάδες 6**

δ) την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$. **Μονάδες 6**

Λύση

α) $\left|\left(i+2\sqrt{2}\right)z\right|=6 \Leftrightarrow \left|\left(i+2\sqrt{2}\right)\right|\cdot|z|=6 \Leftrightarrow \sqrt{8+1}\cdot|z|=6 \Leftrightarrow 3\cdot|z|=6 \Leftrightarrow |z|=2$.

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2$.



β) Ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος ε του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, όπου Α(1,–1) και Β(3,–3).

Το μέσο του ΑΒ είναι το Μ(2,–2). Είναι $\lambda_{AB}=\frac{-2}{2}=-1$, άρα $\lambda_\varepsilon=1$.

Η εξίσωση της μεσοκαθέτου είναι ε: $y+2=1\cdot\left(x-2\right)$ ή $y=x-4$.

γ) Η ελάχιστη τιμή του $|w|$ είναι ίση με την απόσταση του Ο από την ευθεία ε: y=x–4.. $|w|_{min}=d\left(O,\varepsilon\right)=\frac{\left|1\cdot 0+\left(-1\right)\cdot 0+\left(-4\right)\right|}{\sqrt{1^2+\left(-1\right)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

δ) Είναι $|z| = 2$ και $|w| \geq 2\sqrt{2}$. Άρα $|w| - |z| \geq 2\sqrt{2} - 2$.

Ακόμη $|z - w| = |w - z| = |w + (-z)|$. Με χρήση της τριγωνικής ανισότητας $|w + (-z)| \geq |w| - |z| \geq 2\sqrt{2} - 2$.

Η γεωμετρική ερμηνεία της παραπάνω απόστασης είναι το μήκος ΝΜ, όπου Ν είναι το σημείο τομής της. Την ελάχιστη αυτή τιμή την παίρνει η παράσταση $|z - w|$ για $w = 2 - 2i$ (όπως αποδείξαμε το $2 - 2i$ είναι το σημείο τομής της μεσοκαθέτου με το ευθύγραμμο τμήμα, στο ερώτημα (β)).

11. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2008 – 2ο θέμα*

Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 + \beta z + \gamma = 0$, όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί.

α) Να αποδείξετε ότι $\beta = -1$ και $\gamma = 1$. **Μονάδες 9**

β) Να αποδείξετε ότι $z_1^{\ 3} = -1$. **Μονάδες 8**

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w, για τον οποίο ισχύει: $|w| = |z_1 - \bar{z}_1|$. **Μονάδες 8**

Λύση

α) **1ος τρόπος** Η δεύτερη ρίζα της εξίσωσης είναι ο $z_2 = \bar{z}_1 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$.

Από τους τύπους Vieta προκύπτει: $\begin{cases} z_1 + z_2 = -\beta \\ z_1 \cdot z_2 = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = -\beta \\ 1 = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \gamma = 1 \end{cases}$.

2ος τρόπος Ο z_1 είναι ρίζα της εξίσωσης άρα την επαληθεύει.

Επομένως ισχύει $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \beta\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2} + \gamma = 0 \Rightarrow \dfrac{1 + 2i\sqrt{3} - 3}{4} + \dfrac{\beta + \beta i\sqrt{3}}{2} + \gamma = 0$

$\Rightarrow -2 + 2i\sqrt{3} + 2\beta + 2\beta i\sqrt{3} + 4\gamma = 0 \Rightarrow -2 + 2\beta + 4\gamma + 2i\sqrt{3}(1 + \beta) = 0$.

Άρα είναι $\begin{cases} -2 + 2\beta + 4\gamma = 0 \\ 1 + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ \beta = -1 \end{cases} \Rightarrow -2 + 2(-1) + 4\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 1$.

β) **<u>1ος τρόπος</u>** Από παραπάνω προκύπτει ότι ο z_1 είναι ρίζα της $z^2 - z + 1 = 0$

Άρα $z_1^{\,3} + 1 = (z_1 + 1)(z_1^{\,2} - z_1 + 1) = 0 \Rightarrow z_1^{\,3} = -1$.

<u>2ος τρόπος</u> $z_1^{\,3} = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\dfrac{1+2i\sqrt{3}-3}{4}\right)\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \left(\dfrac{-2+2i\sqrt{3}}{4}\right)\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\dfrac{i\sqrt{3}-1}{2}\right)\left(\dfrac{i\sqrt{3}+1}{2}\right) = \dfrac{-3-1}{4} = -1$.

γ) Είναι $z_1 - \overline{z_1} = 2\dfrac{i\sqrt{3}}{2} = i\sqrt{3}$. Επομένως $|w| = |z_1 - z_1| = |i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w, είναι ο κύκλος με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\sqrt{3}$.

12. *Πανελλήνιες 2009 – 2ο θέμα*

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = (2\lambda+1) + (2\lambda-1)i$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Α. α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 9**

β) Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0 = 1 - i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

Μονάδες 8

Β. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση $|w|^2 + \overline{w} - 12 = z_0$, όπου z_0 ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα. **Μονάδες 8**

Λύση

Α. α) Έστω $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$. Είναι $\begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = 2\lambda - 1 \end{cases} \Rightarrow y = x - 2$.

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία $y = x - 2$.

β) **<u>1ος τρόπος</u>** Η εικόνα του ζητούμενου μιγαδικού είναι η προβολή της αρχής των αξόνων O στην ευθεία $y = x - 2$.

Η ευθεία $y = x - 2$ τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(2,0)$ και $B(0,-2)$. Είναι $(OA) = (OB) = 2$ άρα το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές. Επομένως αν είναι Μ το μέσο του ΑΒ τότε η ΟΜ είναι και ύψος και διάμεσος του ΟΑΒ.

Το Μ ως μέσο του ΑΒ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0-2}{2}\right) = (1,-1)$.

Άρα ο μιγαδικός $z_0 = 1 - i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

<u>2ος τρόπος</u> Είναι $|z| = \sqrt{(2\lambda+1)^2 + (2\lambda-1)^2} = \sqrt{4\lambda^2 + 4\lambda + 1 + 4\lambda^2 - 4\lambda + 1} =$

$\sqrt{8\lambda^2 + 2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4\lambda^2 + 1} \geq \sqrt{2}$ (γιατί $\lambda^2 \geq 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 \geq 1$).

Η ισότητα ισχύει για $\lambda = 0$. Άρα ο ζητούμενος μιγαδικός είναι αυτός που προκύπτει για $\lambda = 0$, δηλαδή ο $z_0 = 1 - i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

Β. Έστω $w = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Είναι

$$|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0 \Rightarrow x^2 + y^2 + x - yi - 12 = 1 - i \Rightarrow x^2 + y^2 + x - yi = 13 - i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + x = 13 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 1 + x = 13 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ή } x = -4$$

Άρα $w = 3 + i$ ή $w = -4 + i$.

13. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2009 – 2ο θέμα*

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(2-i)z + (2+i)\bar{z} - 8 = 0$$

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z = x + yi$ οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τον μοναδικό πραγματικό αριθμό z_1 και τον μοναδικό φανταστικό αριθμό z_2 οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση. **Μονάδες 8**

γ) Για τους αριθμούς z_1, z_2 που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 40$. **Μονάδες 7**

Λύση

α) Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Η δοσμένη σχέση δίνει:

$(2-i)(x+yi)+(2+i)(x-yi)-8=0 \Rightarrow 2x - xi + 2yi + y + 2x - 2yi + xi + y - 8 = 0 \Rightarrow$

$4x + 2y = 8 \Rightarrow 2x + y = 4$.

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία $2x + y = 4$.

β) Πρέπει $\text{Im}(z_1) = 0$ άρα από τη σχέση $2x + y = 4 \Rightarrow 2x + 0 = 4 \Rightarrow x = 2$. Επομένως είναι $z_1 = 2 + 0i$.

Ομοίως πρέπει $\text{Re}(z_2) = 0$ άρα από τη σχέση $2x + y = 4 \Rightarrow 2 \cdot 0 + y = 4 \Rightarrow y = 4$.

Επομένως είναι $z_2 = 0 + 4i$.

γ) Είναι $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = |2 + 4i|^2 + |2 - 4i|^2 = 2^2 + 4^2 + 2^2 + (-4)^2 =$

$4 + 16 + 4 + 16 = 40$.

14. *Πανελλήνιες 2010 – 2ο θέμα*

Δίνεται η εξίσωση $z + \frac{2}{z} = 2$ όπου $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$

α) Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης. **Μονάδες 7**

β) Να αποδείξετε ότι $z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0$. **Μονάδες 6**

γ) Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει $|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2|$ τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο. **Μονάδες 7**

δ) Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος γ) να αποδείξετε ότι $3 \leq |w| \leq 7$. **Μονάδες 5**

Λύση

α) $z + \frac{2}{z} = 2 \Leftrightarrow z^2 + 2 = 2z \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$.

Είναι $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$. Άρα $z_{1,2} = \dfrac{2 \pm i\sqrt{4}}{2} = 1 \pm i\sqrt{2} \Rightarrow z_1 = 1 + i$ και $z_2 = 1 - i$

β) Είναι $z_1^{2010} + z_2^{2010} = \left(z_1^{\,2}\right)^{1005} + \left(z_2^{\,2}\right)^{1005} = \left((1+i)^2\right)^{1005} + \left((1-i)^2\right)^{1005} =$

$(2i)^{1005} + (-2i)^{1005} = (2i)^{1005} - (2i)^{1005} = 0$

γ) $|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2| \Rightarrow |w - (4 - 3i)| = |1 + i - (1 - i)| \Rightarrow |w - (4 - 3i)| = |2i| \Rightarrow$

$|w - (4 - 3i)| = 2$ άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο το $(4, -3)$ και ακτίνα 2

δ) **<u>1^{ος} τρόπος</u>** Από την τριγωνική ανισότητα:

$\big||w| - |-4 + 3i|\big| \le |w + (-4 + 3i)| \le |w| + |-4 + 3i|$.

Από το πρώτο μέλος της ανισότητας προκύπτει

$\big||w| - |-4 + 3i|\big| \le |w + (-4 + 3i)| \Rightarrow \big||w| - 5\big| \le 2 \Rightarrow -2 \le |w| - 5 \le 2 \Rightarrow 3 \le |w| \le 7$

<u>2^{ος} τρόπος</u>

Αν είναι $K(4, -3)$ το κέντρο του κύκλου και $O(0, 0)$ η αρχή των αξόνων τότε είναι $(OK) = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5 > \rho$.

Για κάθε σημείο Μ του κύκλου (K, ρ) ισχύει

$(OK) - \rho \le (OM) \le (OK) + \rho \Leftrightarrow 3 \le |w| \le 7$

15. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2010 – 2ο θέμα*

Έστω ότι οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 είναι οι ρίζες εξίσωσης δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές για τις οποίες ισχύουν $z_1 + z_2 = -2$ και $z_1 \cdot z_2 = 5$.

α) Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2. **Μονάδες 5**

β) Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει η σχέση

$$|w - z_1|^2 + |w - z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$$

να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με εξίσωση $(x+1)^2+y^2=4$. **Μονάδες 8**

γ) Από τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος (β) να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει $2\cdot\mathrm{Re}(w)+\mathrm{Im}(w)=0$. **Μονάδες 6**

δ) Αν w_1, w_2 είναι δύο από τους μιγαδικούς w του ερωτήματος (β) με την ιδιότητα $|w_1-w_2|=4$, να αποδείξετε ότι $|w_1+w_2|=2$. **Μονάδες 6**

Λύση

α) Είναι $\begin{cases} z_1+z_2=-2 \\ z_1\cdot z_2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_2=-2-z_1 \\ \to \end{cases} \Rightarrow z_1\cdot(-2-z_1)=5 \Rightarrow z_1^{\,2}+2z_1+5=0$

Είναι $\Delta=4-20=-16<0$ άρα $z=\dfrac{-2\pm 4i}{2} \Rightarrow z_1=-1+2i$ και $z_2=-1-2i$.

β) Είναι $|z_1-z_2|=|-1+2i+1+2i|=|4i|=4$ άρα

$$|w-z_1|^2+|w-z_2|^2=|z_1-z_2|^2 \Rightarrow (w-z_1)(\bar{w}-\bar{z}_1)+(w-z_2)(\bar{w}-\bar{z}_2)=16 \Rightarrow$$

$$(w-z_1)(\bar{w}-z_2)+(w-z_2)(\bar{w}-z_1)=16 \Rightarrow$$

$$w\bar{w}-z_1\bar{w}-wz_2+z_1z_2+w\bar{w}-z_1w-z_2\bar{w}+z_1z_2=16 \Rightarrow$$

$$2|w|^2-z_1(w+\bar{w})-z_2(w+\bar{w})+2z_1z_2=16 \Rightarrow$$

$$2|w|^2-(z_1+z_2)(w+\bar{w})+2z_1z_2=16 \Rightarrow 2|w|^2+2(w+\bar{w})+10=16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |w|^2+(w+\bar{w})+5=8 \Rightarrow |w|^2+(w+\bar{w})=3.$$

Για $w=x+yi$ με $x,y\in\mathbb{R}$ προκύπτει

$x^2+y^2+2x=3 \Rightarrow x^2+2x+1+y^2=4 \Rightarrow (x+1)^2+y^2=4$ που είναι κύκλος με κέντρο $A(-1,0)$ και ακτίνα $\rho=2$.

γ) Είναι $\mathrm{Re}(w)=x$ και $\mathrm{Im}(w)=y$. Επομένως: $\begin{cases} (x+1)^2+y^2=4 \\ 2x+y=0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases}(x+1)^2+y^2=4\\ y=-2x\end{cases}\Rightarrow (x+1)^2+(-2x)^2=4\Rightarrow x^2+2x+1+4x^2=4\Rightarrow$$

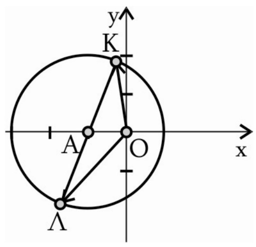
$5x^2+2x-3=0$. Είναι $\Delta=4+60=64>0$ άρα $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{64}}{2\cdot 5}\Rightarrow x=\dfrac{-2\pm 8}{2\cdot 5}\Rightarrow$

$x=-1$ ή $x=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$.

Για $x=-1$ είναι $y=-2\cdot(-1)=2$ άρα $w=-1+2i$.

Για $x=\dfrac{3}{5}$ είναι $y=-2\cdot\dfrac{3}{5}=-\dfrac{6}{5}$ άρα $w=\dfrac{3}{5}-\dfrac{6}{5}i$.

δ) Είναι $|w_1-w_2|=4=2\rho$ άρα οι εικόνες των w_1 και w_2 είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου.



Αν είναι Κ η εικόνα του w_1 και Λ η εικόνα του w_2 τότε $|w_1+w_2|=|\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{O\Lambda}|=|2\overrightarrow{OA}|=2\cdot 1=2$.

16. *Πανελλήνιες 2011 – 2ο θέμα*

Έστω ότι οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z\neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z-3i|+|\bar z+3i|=2 \text{ και } w=z-3i+\frac{1}{z-3i}$$

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z. **Μονάδες 7**

β) Να αποδείξετε ότι $\bar z+3i=\dfrac{1}{z-3i}$. **Μονάδες 4**

γ) Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι

$$-2\leq w\leq 2$$ **Μονάδες 8**

δ) Να αποδείξετε ότι: $|z-w|=|z|$. **Μονάδες 6**

Λύση

α) Είναι $|z-3i|+|\bar z+3i|=2\Rightarrow|z-3i|+|\overline{z-3i}|=2\Rightarrow|z-3i|+|z-3i|=2\Rightarrow$

$|z-3i|=1 \Rightarrow |z-(0+3i)|=1$. Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο το $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho=1$.

β) Είναι $|z-3i|=1 \Rightarrow |z-3i|^2=1 \Rightarrow (z-3i)\cdot\left(\overline{z-3i}\right)=1 \Rightarrow (z-3i)\cdot(\bar{z}+3i)=1 \Rightarrow$

$\bar{z}+3i=\dfrac{1}{z-3i}$.

γ) Είναι $w=z-3i+\dfrac{1}{z-3i}\overset{(\beta)}{=}z-3i+\bar{z}+3i=z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z) \Rightarrow w\in\mathbb{R}$.

Έστω $z=x+yi$ με $x,y\in\mathbb{R}$. Επομένως $w=2x$.

Οι εικόνες του z ανήκουν στον κύκλο με εξίσωση $x^2+(y-3)^2=1 \Rightarrow$

$(y-3)^2=1-x^2\geq 0$ άρα $x^2\leq 1 \Rightarrow -1\leq x\leq 1 \Rightarrow -2\leq 2x\leq 2 \Rightarrow -2\leq w\leq 2$.

δ) Είναι $|z-w|=|z-(z+\bar{z})|=|-\bar{z}|=|z|$.

17. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2011– 2ο θέμα*

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, οι οποίοι ικανοποιούν αντίστοιχα τις σχέσεις:

$$|z-i|=1+\mathrm{Im}(z) \qquad (1)$$

$$w(\bar{w}+3i)=i(3\bar{w}+i) \qquad (2)$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y=\frac{1}{4}x^2$. Μονάδες 7

β) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho=2\sqrt{2}$. Μονάδες 7

γ) Να βρείτε τα σημεία Α και Β του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w με $z=w$. Μονάδες 5

δ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και, στη συνέχεια, να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό u με εικόνα στο μιγα-

δικό επίπεδο το σημείο Λ, έτσι ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Κ, Α, Λ, Β να είναι τετράγωνο. **Μονάδες 6**

Λύση

α) Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Είναι $|z - i| = 1 + \text{Im}(z) \Rightarrow |x + yi - i| = 1 + y$

Για να ισχύει η σχέση πρέπει $1 + y \geq 0 \Rightarrow y \geq -1$. Άρα για $y \geq -1$ είναι:

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 1 + y \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = (1+y)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1 + 2y + y^2 \Rightarrow$$

$x^2 = 4y \Rightarrow y = \frac{1}{4}x^2$ που ισχύει για κάθε $y \geq -1$.

β) Έστω $w = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Είναι $w(\bar{w} + 3i) = i(3\bar{w} + i) \Rightarrow$

$$w\bar{w} + 3iw = 3i\bar{w} - 1 \Rightarrow w\bar{w} + 3i(w - \bar{w}) + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 3i \cdot 2y - 1 = 0 \Rightarrow$$

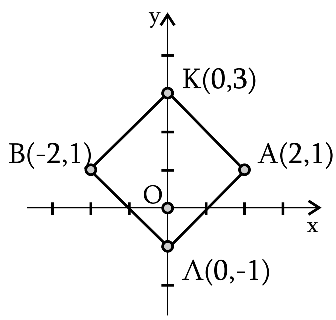
$x^2 + y^2 - 6y + 1 = 0$. Η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(\frac{0}{2}, -\frac{-6}{2}\right) = K(0,3)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{0 + (-6)^2 - 4}}{2} = \frac{\sqrt{32}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

γ) Τα ζητούμενα σημεία είναι τα κοινά σημεία των δύο παραπάνω γεωμετρικών τόπων. Επομένως για να τα βρούμε αρκεί να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεών τους. Είναι: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6y + 1 = 0 \\ x^2 = 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y + y^2 - 6y + 1 = 0 \\ \rightarrow \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = 0 \\ \rightarrow \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \text{ (διπλή ρίζα)} \\ \rightarrow \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ x = \pm 2 \end{cases}$. Άρα $A(2,1)$ και $B(-2,1)$.

δ) Είναι $KA = \sqrt{(2-0)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{8}$, $KB = \sqrt{(-2-0)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{8}$,

$AB = \sqrt{(2+2)^2 + (1-1)^2} = 4$.



Άρα $KA = KB$ δηλαδή το ΚΑΒ είναι ισοσκελές με κορυφή το Κ.

Είναι $AB^2 = 16$ και $KA^2 + KB^2 = 8 + 8 = 16$ άρα $AB^2 = KA^2 + KB^2$ επομένως το ΚΑΒ είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία την Κ.

Για να είναι το ΚΑΛΒ τετράγωνο πρέπει οι διαγώνιες να είναι ίσες, άρα πρέπει να είναι $ΚΛ = ΑΒ$. Είναι $ΑΒ = 4$ άρα και $ΚΛ = 4$. Επομένως είναι $Λ(0,-1)$.

18. *Πανελλαδικές 2012 – 2ο θέμα*

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \quad (1) \qquad\qquad |w-5\bar{w}| = 12 \quad (2)$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $ρ = 1$. **Μονάδες 6**

β) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ τότε, να βρείτε το $|z_1 + z_2|$. **Μονάδες 7**

γ) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

Μονάδες 6

δ) Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι: $1 \le |z-w| \le 4$ **Μονάδες 6**

Λύση

α) <u>1ος τρόπος</u>

Είναι $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \Rightarrow (z-1)\left(\overline{z-1}\right) + (z+1)\left(\overline{z+1}\right) = 4 \Rightarrow$

$(z-1)(\bar{z}-1) + (z+1)(\bar{z}+1) = 4 \Rightarrow z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 + z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 = 4 \Rightarrow$

$2z\bar{z} = 2 \Rightarrow z\bar{z} = 1 \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1$

<u>2ος τρόπος</u>

Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Είναι $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \Rightarrow$

$|x+yi-1|^2+|x+yi+1|^2=4 \Rightarrow (x-1)^2+y^2+(x+1)^2+y^2=4 \Rightarrow$

$x^2-2x+1+y^2+x^2+2x+1+y^2=4 \Rightarrow 2x^2+2y^2=2 \Rightarrow x^2+y^2=1$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων O και ακτίνα $\rho=1$.

β) Είναι $|z_1|=|z_2|=1$.

Ισχύει $|z_1-z_2|=\sqrt{2} \Rightarrow |z_1-z_2|^2=2 \Rightarrow (z_1-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2)=2 \Rightarrow$

$z_1\overline{z}_1-z_1\overline{z}_2-z_2\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2=2 \Rightarrow |z_1|^2-z_1\overline{z}_2-z_2\overline{z}_1+|z_2|^2=2 \Rightarrow z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1=0$

Επομένως $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)=z_1\overline{z}_1+z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2=$

$|z_1|^2+z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1+|z_2|^2=1+0+1=2$. Επομένως $|z_1+z_2|=\sqrt{2}$.

γ) Έστω $w=x+yi$ με $x,y\in\mathbb{R}$. Είναι $|w-5\overline{w}|=12 \Rightarrow |w-5\overline{w}|^2=144 \Rightarrow$

$|x+yi-5(x-yi)|^2=144 \Rightarrow |x+yi-5x+5yi|^2=144 \Rightarrow |-4x+6yi|^2=144 \Rightarrow$

$16x^2+36y^2=144 \Rightarrow \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w στο επίπεδο είναι έλλειψη με $\alpha^2=9 \Rightarrow \alpha=3$ και $\beta^2=4 \Rightarrow \beta=2$.

Έστω $M(w)$ η εικόνα του w. Είναι $\beta\le(OM)\le\alpha \Rightarrow 2\le(OM)\le3 \Rightarrow 2\le|w|\le3$.

Επομένως είναι $|w|_{min}=2$ και $|w|_{max}=3$.

δ) <u>1ος τρόπος</u>

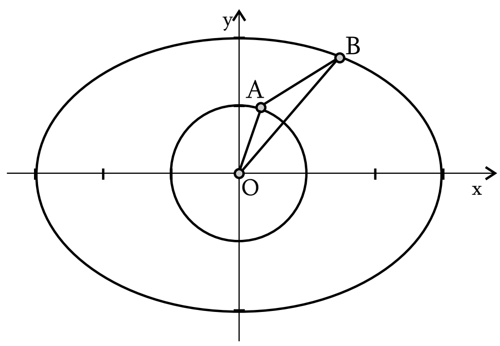
Είναι $|z-w|\le|z|+|w|=1+|w|\le1+3=4$ $\quad(|z|=1$ και $|w|\le3)$

Επίσης $|z-w|\ge\big||z|-|w|\big|=|1-|w||=|w|-1\ge2-1=2$ $\quad(|z|=1$ και $|w|\ge2)$

Επομένως $2\le|z-w|\le4$.

<u>2ος τρόπος</u>

Έστω $A(z)$ η εικόνα του z και $B(w)$ η εικόνα του w. Από την τριγωνική ανισότητα προκύπτει ότι



$\left|(OA)-(OB)\right| \le (AB) \le (OA)+(OB)$. Επομένως $\left||z|-|w|\right| \le |z-w| \le |z|+|w|$.

Η συνέχεια είναι όπως στον 1^o τρόπο.

19. *Πανελλαδικές 2012 (Επαναληπτικές) – 2ο θέμα*

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, με $z \neq -1$, για τους οποίους ο αριθμός $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός.

Να αποδείξετε ότι:

α) $|z|=1$ **Μονάδες 7**

β) Ο αριθμός $\left(z-\dfrac{1}{z}\right)^4$ είναι πραγματικός. **Μονάδες 6**

γ) $\left(\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}\right)(z_1+z_2) \le 4$**, όπου z_1, z_2 δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z.** **Μονάδες 6**

δ) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών u, για τους οποίους ισχύει $u-ui=\dfrac{i}{w}-w$, $w \neq 0$, ανήκουν στην υπερβολή $x^2-y^2=1$

Μονάδες 6

Λύση

α) <u>1ος τρόπος</u>

Ο w είναι φανταστικός άρα $w=-\overline{w} \Rightarrow \dfrac{z-1}{z+1}=-\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1} \Rightarrow$

$(z-1)(\overline{z}+1)=-(z+1)(\overline{z}-1) \Rightarrow z\overline{z}+z-\overline{z}-1=$

<u>2ος τρόπος</u>

Έστω $z=x+yi$ με $x,y \in \mathbb{R}$.

Είναι $w=\dfrac{z-1}{z+1}=\dfrac{x+yi-1}{x+yi+1}=\dfrac{x-1+yi}{x+1+yi}=\dfrac{(x-1+yi)(x+1-yi)}{(x+1+yi)(x+1-yi)}=$

$$\frac{(x+1)(x-1)+y^2}{(x+1)^2+y^2}+i\frac{-y(x-1)+y(x+1)}{(x+1)^2+y^2}$$

Ο αριθμός w είναι μιγαδικός άρα $\mathrm{Re}(w)=0 \Rightarrow \dfrac{(x+1)(x-1)+y^2}{(x+1)^2+y^2}=0 \Rightarrow$

$$(x+1)(x-1)+y^2=0 \Rightarrow x^2-1+y^2=0 \Rightarrow x^2+y^2=1 \Rightarrow |z|^2=1 \Rightarrow |z|=1$$

β) Είναι $|z|=1 \Rightarrow |z|^2=1 \Rightarrow z\cdot\bar{z}=1 \Rightarrow z=\dfrac{1}{\bar{z}}$.

Άρα $\left(z-\dfrac{1}{z}\right)^4=(z-\bar{z})^4=(2i\,\mathrm{Im}(z))^4=2^4\cdot i^4\left[\mathrm{Im}(z)\right]^4=2^4\cdot\left[\mathrm{Im}(z)\right]^4\in\mathbb{R}$.

γ) Είναι $\left(\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}\right)(z_1+z_2)\le 4 \Leftrightarrow (\bar{z}_1+\bar{z}_2)(z_1+z_2)\le 4 \Leftrightarrow |z_1+z_2|^2\le 4 \Leftrightarrow$

$|z_1+z_2|\le 2$ που ισχύει γιατί τα z_1 και z_2 ανήκουν στον μοναδιαίο κύκλο $(|z_1|=1)$ και $|z_2|=1$) και η μεγαλύτερη δυνατή απόστασή τους είναι η διάμετρος του κύκλου που είναι ίση με δύο.

δ) Ο w είναι φανταστικός αριθμός άρα είναι της μορφής $w=\beta i$ με $\beta\in\mathbb{R}$.

Έστω $u=x+yi$ με $x,y\in\mathbb{R}$.

Είναι $u-ui=\dfrac{i}{w}-w \Rightarrow x+yi-(x+yi)i=\dfrac{i}{\beta i}-\beta i \Rightarrow x+yi-xi-yi^2=\dfrac{1}{\beta}-\beta i \Rightarrow$

$$x+y+(y-x)i=\frac{1}{\beta}-\beta i \Rightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{1}{\beta} \\ y-x=-\beta \end{cases}.$$

Προσθέτοντας τις δύο σχέσεις κατά μέλη προκύπτει $2y=\dfrac{1}{\beta}-\beta \Rightarrow y=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\beta}-\beta\right)$.

Αφαιρώντας τις δύο σχέσεις κατά μέλη προκύπτει $2x=\dfrac{1}{\beta}+\beta \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\beta}+\beta\right)$.

Άρα $x^2-y^2=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\beta}+\beta\right)^2-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\beta}-\beta\right)^2=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\beta^2}+2+\beta^2\right)-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\beta^2}-2+\beta^2\right)=$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\beta^2}+2+\beta^2-\frac{1}{\beta^2}+2-\beta^2\right)=\frac{1}{4}\cdot 4=1$$

20. *Πανελλαδικές 2013 – 2ο θέμα*

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z, είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho=1$. Μονάδες 5

Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z|\le 3$. Μονάδες 3

β) Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2+\beta w+\gamma=0$, με w μιγαδικό αριθμό, β, $\gamma\in\mathbb{R}$ και $|\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)|=2$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$\beta=-4 \text{ και } \gamma=5$$ **Μονάδες 9**

γ) Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς α_0, α_1, α_2 οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος (α). Αν ο μιγαδικός αριθμός ν ικανοποιεί τη σχέση:

$$\nu^3+\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0=0$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$|\nu|<4$$ **Μονάδες 8**

Λύση

α) Είναι $(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2 \Rightarrow |z-2|^2+|z-2|-2=0$

Θέτουμε $|z-2|=\omega$. Άρα $t^2+t-2=0$. Είναι $\Delta=1+8=9>0$.

Άρα $t=\dfrac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow t=-2$ (απορρίπτεται) ή $t=1 \Rightarrow |z-2|=1$.

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z, είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

β) Είναι $z_2=\bar{z}_1$. Επομένως αν $z_1=x+yi$ τότε $z_2=x-yi$.

Άρα $|\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)|=2 \Rightarrow |y-(-y)|=2 \Rightarrow |2y|=2 \Rightarrow y=\pm 1$.

Επομένως $|z-2|=1 \Rightarrow |x+yi-2|=1 \Rightarrow |x+yi-2|=1 \Rightarrow (x-2)^2+y^2=1 \Rightarrow$

$(x-2)^2+1=1 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$.

Άρα $z_1=2+i$ και $z_2=2-i$.

Είναι $z_1+z_2=-\beta \Rightarrow 4=-\beta \Rightarrow \beta=-4$ και $z_1 \cdot z_2=\gamma \Rightarrow 5=\gamma$

γ) Για τους μιγαδικούς α_0, α_1, α_2 ισχύει $|\alpha_0| \le 3$, $|\alpha_1| \le 3$, $|\alpha_2| \le 3$.

1ος τρόπος

Είναι $v^3+\alpha_2 v^2+\alpha_1 v+\alpha_0=0 \Rightarrow -v^3=\alpha_2 v^2+\alpha_1 v+\alpha_0 \Rightarrow$

$$|v^3|=|\alpha_2 v^2+\alpha_1 v+\alpha_0| \le |\alpha_2 v^2|+|\alpha_1 v|+|\alpha_0|=|\alpha_2||v^2|+|\alpha_1||v|+|\alpha_0| \le 3\left(|v^2|+|v|+1\right)$$

- Αν $|v|>1$ τότε $|v|^3 \le 3\dfrac{|v|^3-1}{|v|-1}=3\left(\dfrac{|v|^3}{|v|-1}-\dfrac{1}{|v|-1}\right)<3\cdot\dfrac{|v|^3}{|v|-1}$

  Άρα $|v|^3<3\cdot\dfrac{|v|^3}{|v|-1} \Rightarrow 1<3\cdot\dfrac{1}{|v|-1} \Rightarrow |v|-1<3 \Rightarrow |v|<4$

- Αν $|v| \le 1$ τότε $|v| \le 1<4 \Rightarrow |v|<4$

2ος τρόπος

Είναι $v^3+\alpha_2 v^2+\alpha_1 v+\alpha_0=0 \Rightarrow 1+\dfrac{\alpha_2}{v}+\dfrac{\alpha_1}{v^2}+\dfrac{\alpha_0}{v^3}=0 \Rightarrow \dfrac{\alpha_2}{v}+\dfrac{\alpha_1}{v^2}+\dfrac{\alpha_0}{v^3}=-1 \Rightarrow$

$$\left|\frac{\alpha_2}{v}+\frac{\alpha_1}{v^2}+\frac{\alpha_0}{v^3}\right|=|-1| \Rightarrow \left|\frac{\alpha_2}{v}+\frac{\alpha_1}{v^2}+\frac{\alpha_0}{v^3}\right|=1$$

Όμως $\left|\dfrac{\alpha_2}{v}+\dfrac{\alpha_1}{v^2}+\dfrac{\alpha_0}{v^3}\right| \le \left|\dfrac{\alpha_2}{v}\right|+\left|\dfrac{\alpha_1}{v^2}\right|+\left|\dfrac{\alpha_0}{v^3}\right|=\dfrac{|\alpha_2|}{|v|}+\dfrac{|\alpha_1|}{|v^2|}+\dfrac{|\alpha_0|}{|v^3|}$. **(1)**

Υποθέτουμε ότι $|v| \ge 4 \Rightarrow \dfrac{1}{|v|} \le 4$.

Άρα από την (1) προκύπτει $\left|\dfrac{\alpha_2}{v}+\dfrac{\alpha_1}{v^2}+\dfrac{\alpha_0}{v^3}\right| \le \dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{16}+\dfrac{3}{64}=\dfrac{3\cdot16+3\cdot4+3\cdot1}{64}=$

$=\dfrac{3\cdot21}{64}=\dfrac{63}{64} \Leftrightarrow 1 \le \dfrac{63}{64}$. Άτοπο, άρα $|v|<4$.

3ος τρόπος

Είναι $\nu^3 + \alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0 = 0 \Rightarrow -\nu^3 = \alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0 \Rightarrow$

$$|\nu^3| = |\alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0| \le |\alpha_2\nu^2| + |\alpha_1\nu| + |\alpha_0| = |\alpha_2||\nu^2| + |\alpha_1||\nu| + |\alpha_0| \le 3|\nu^2| + 3|\nu| + 3$$

Άρα $|\nu^3| \le 3|\nu^2| + 3|\nu| + 3 \Rightarrow |\nu|^3 - 3|\nu|^2 - 3|\nu| - 3 \le 0$. **(1)**

Κάνουμε, με το σχήμα Horner, τη διαίρεση $\left(|\nu^3| - 3|\nu^2| - 3|\nu| - 3\right) : \left(|\nu| - 4\right)$

1	−3	−3	−3	$\rho = 4$
	4	4	4	
1	1	1	1	

Άρα $\left(|\nu|^3 - 3|\nu|^2 - 3|\nu| - 3\right) = \left(|\nu| - 4\right)\left(|\nu|^2 + |\nu| + 1\right) + 1$ και από την (1) προκύπτει

$$\left(|\nu| - 4\right)\left(|\nu|^2 + |\nu| + 1\right) + 1 \le 0 \Rightarrow \left(|\nu| - 4\right)\left(|\nu|^2 + |\nu| + 1\right) \le -1 < 0$$

Όμως είναι $|\nu|^2 + |\nu| + 1 > 0$ άρα $|\nu| - 4 < 0 \Rightarrow |\nu| < 4$

21. Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2013 – 2ο θέμα

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν η εξίσωση $2x^2 - |w - 4 - 3i|x = -2|z|$, $x \in \mathbb{R}$ έχει μια διπλή ρίζα, την $x = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho_1 = 1$, καθώς επίσης ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο $K(4,3)$ και ακτίνα $\rho_2 = 4$. **Μονάδες 8**

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους. **Μονάδες 5**

γ) Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, w του ερωτήματος (α) να αποδείξετε ότι: $|z - w| \le 10$ και $|z + w| \le 10$ **Μονάδες 6**

δ) Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z του ερωτήματος (α) να βρείτε εκείνους, για τους οποίους ισχύει: $\left|2z^2 - 3z - 2z\bar{z}\right| = 5$

Μονάδες 6

Λύση

α) Το $x = 1$ είναι ρίζα της εξίσωσης θα την επαληθεύει.

Άρα $2 - |w - 4 - 3i| = -2|z| \Rightarrow 2 + 2|z| = |w - 4 - 3i|$. **(1)**

Το $x = 1$ είναι διπλή ρίζα της εξίσωσης άρα $\Delta = 0 \Leftrightarrow |w - 4 - 3i|^2 = 16|z|$ **(2)**

Από τις (1) και (2) προκύπτει: $(2 + 2|z|)^2 = 16|z| \Rightarrow 4 + 8|z| + 4|z|^2 = 16|z| \Rightarrow$

$|z|^2 - 2|z| + 1 = 0 \Rightarrow (|z| - 1)^2 = 0 \Rightarrow |z| = 1$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho_1 = 1$.

Από την (2) προκύπτει $|w - 4 - 3i|^2 = 16 \cdot 1 \Rightarrow |w - 4 - 3i| = 4$ άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο $K(4,3)$ και ακτίνα $\rho_2 = 4$.

β) Η απόσταση ΟΚ των κέντρων των δύο κύκλων είναι

$\sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = 5 = \rho_1 + \rho_2$ άρα οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά και επομένως υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους.

Παρατήρηση: Η εκφώνηση δεν μας ζητάει να προσδιορίσουμε τον μιγαδικό παρά μόνο την μοναδικότητα της ύπαρξής του.

Αν έπρεπε να προσδιορίσουμε τον μιγαδικό τότε θα έπρεπε να λύσουμε το σύστημα:

$\begin{cases} |u| = 1 \\ |u - 4 - 3i| = 4 \end{cases}$ το οποίο έχει λύση $u = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$.

γ) Είναι $OK - \rho_2 \le |w| \le OK + \rho_2 \Rightarrow 5 - 4 \le |w| \le 5 + 4 \Rightarrow 1 \le |w| \le 9$.

Άρα $|z + w| \le |z| + |w| = 1 + 9 = 10$ και

$|z-w| = |z+(-w)| \le |z| + |-w| = |z| + |w| = 1+9 = 10$ (ή $|z-w| \le 2\rho_1 + 2\rho_2 = 10$)

δ) $|2z^2 - 3z - 2z\bar{z}| = 5 \Rightarrow |z||2z - 3 - 2\bar{z}| = 5 \Rightarrow |2(x+yi) - 3 - 2(x-yi)| = 5 \Rightarrow$

$|2x + 2yi - 3 - 2x + 2yi| = 5 \Rightarrow |-3+4yi| = 5 \Rightarrow \sqrt{9+16y^2} = 5 \Rightarrow 9 + 16y^2 = 25 \Rightarrow$

$y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$.

Από τη σχέση $|z| = 1$ προκύπτει $\sqrt{x^2+y^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = 1 \Rightarrow x = 0$.

Άρα οι ζητούμενοι μιγαδικοί είναι οι $z_1 = i$ και $z_2 = -i$.

2. Όριο – Συνέχεια συνάρτησης

1. Αποδείξεις

1. Πανελλήνιες 2005

Έστω μία συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν

- **η f είναι συνεχής στο [α, β] και**
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

δείξτε ότι για κάθε η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_o) = \eta$.

2. Ορισμοί

1. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2004

Να ορίσετε πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα [α, β].

2. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2005

Πότε μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται «1–1»;

3. Πανελλήνιες 2007

Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

4. Πανελλήνιες 2008 – Πανελλαδικές 2012

Πότε μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β];

5. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2009

Έστω μία συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0;

6. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2010

Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

7. Πανελλαδικές 2012

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

3. Ερωτήσεις Σωστό – Λάθος

1. Πανελλήνιες 2002

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α, β] και συνεχής στο (α, β], τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α, β] μία μέγιστη τιμή.

Λάθος. Μπορεί να είναι $\lim\limits_{x \to \alpha^-} f(x) = +\infty$.

2. Πανελλήνιες 2002

Κάθε συνάρτηση, που είναι 1–1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

Λάθος. Π.χ. η $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

3. *Πανελλήνιες 2002*

Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$

Σωστό.

4. *Πανελλήνιες 2002*

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$ τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

Σωστό.

6. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2003*

Μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι συνάρτηση «1–1» αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1=x_2 \text{ τότε } f(x_1)=f(x_2)$$

Λάθος. Η συνεπαγωγή που πρέπει να ισχύει είναι η:

$$\text{αν } f(x_1)=f(x_2),\ \text{τότε } x_1=x_2$$

7. *Πανελλήνιες 2004*

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$.

Σωστό με την προϋπόθεση ότι ορίζονται τα όρια από αριστερά και δεξιά στο x_0.

8. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2004*

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ και ορίζονται οι συνθέσεις $f\circ g$ και $g\circ f$, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

Λάθος. Π.χ. Για τις συναρτήσεις $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\sqrt{x}$ ισχύει:

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\ln\sqrt{x}$ με $x\in(0,+\infty)$ και

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{\ln x}$ με $x\in[1,+\infty)$.

9. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2004

Οι γραφικές παραστάσεις C και C′ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x'Oy'.

Σωστό.

10. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2004

Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0, τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\kappa]{f(x)}=\sqrt[\kappa]{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}$ εφόσον $f(x)\geq 0$ κοντά στο x_0, με $\kappa\in\mathbb{N}$ και $\kappa\geq 2$.

Σωστό.

11. Πανελλήνιες 2005

Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] με $f(\alpha)<0$ και υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(\xi)=0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta)>0$.

Λάθος. Π.χ. η συνάρτηση $f(x)=-(x-2)^2$ με $x\in[1,4]$.

Είναι $f(1)=-(1-2)^2=-1<0$, υπάρχει $\xi=2\in(1,4)$ ώστε $f(\xi)=f(2)=0$ και $f(4)=-(4-2)^2=-4<0$

12. *Πανελλήνιες 2005*

Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x)+g(x))$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Λάθος. Π.χ. για $f(x)=\begin{cases}3x+1, & x \ge 1\\ 2x, & x<1\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}2x, & x \ge 1\\ 3x+1, & x<1\end{cases}$ στο $x_0=1$.

13. *Πανελλήνιες 2005*

Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία y = x, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1}.

Σωστό.

14. *Πανελλήνιες 2005*

Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$.

Σωστό.

15. *Πανελλήνιες 2005*

Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

Σωστό.

16. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2005*

Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε είναι υποχρεωτικά $f \circ g \ne g \circ f$.

Λάθος. Π.χ. Για τις συναρτήσεις $f(x)=g(x)=x$ με $x \in \mathbb{R}$ είναι

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=g(x)=x$ και $(g\circ f)(x)=g(f(x))=f(x)=x$ για $x\in\mathbb{R}$.

17. Πανελλήνιες 2006

Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_o.

Σωστό.

18. Πανελλήνιες 2006

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μίας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Σωστό.

19. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2006

Μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι «1–1», αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

Σωστό.

20. Πανελλήνιες 2007

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεσή τους $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

Λάθος. Έπρεπε η συνάρτηση g να είναι συνεχής στο $f(x_0)$.

21. Πανελλήνιες 2007

Αν $\alpha>1$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=0$.

Σωστό.

22. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2007*

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μίας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

Λάθος. Αν είναι $f(x) = c$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε είναι $f(\Delta) = c$, δηλαδή σημείο και όχι διάστημα.

23. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2007*

Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α, Β), όπου $A = \lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim\limits_{x \to \alpha^-} f(x)$.

Σωστό.

24. *Πανελλήνιες 2008*

Μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Σωστό.

25. *Πανελλήνιες 2008*

Αν μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι 1 – 1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει: $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y$, $y \in f(A)$.

Σωστό.

26. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2008*

Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1–1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

Σωστό. Π.χ. η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1, & x=5\\ 2, & x=6\\ -11, & x=9\end{cases}$.

27. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2008

Έστω μία συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ και ℓ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-\ell\right)=0$.

Σωστό.

28. Πανελλήνιες 2009

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0\in A$, όταν $f(x)\geq f(x_0)$ για κάθε $x\in A$.

Σωστό.

29. Πανελλήνιες 2009

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$$

Λάθος. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$.

30. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2009

Η συνάρτηση f είναι 1–1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

Σωστό.

31. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2009

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)<0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$

Λάθος. Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$

32. Πανελλήνιες 2010

Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B), όπου $A=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$

Λάθος. Το σύνολο τιμών της είναι το (B,A).

33. Πανελλήνιες 2010

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0.

Σωστό.

34. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2010

Αν ορίζονται οι συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$, τότε πάντοτε ισχύει $f\circ g=g\circ f$.

Λάθος. Για παράδειγμα για τις συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x+1$ και $g(x)=2x$ είναι

- $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x)=2x+1$ και
- $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+1)=2(x+1)=2x+2$

άρα $f\circ g=g\circ f$.

35. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2010

Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Σωστό.

36. Πανελλήνιες 2011

Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1–1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 \neq x_2, \text{ τότε } f(x_1) \neq f(x_2)$$

Σωστό.

37. Πανελλήνιες 2011

Ισχύει ότι: $\lim_{x \to +\infty} \frac{ημx}{x} = 1$.

Λάθος, ισχύει $\lim_{x \to 0} \frac{ημx}{x} = 1$.

38. Πανελλήνιες 2011

Οι γραφικές παραστάσεις C και C′ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Σωστό.

39. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2011

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

Σωστό.

40. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2011

Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε είναι 1–1 στο διάστημα αυτό.

Σωστό.

41. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2011

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$.

Σωστό.

42. Πανελλαδικές 2012

Μία συνάρτηση f είναι 1–1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

Σωστό.

43. Πανελλαδικές 2012

Αν είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0.

Λάθος.

Αν είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

44. Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2012

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης –f είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f.

Σωστό.

45. Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2012

Αν είναι $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^x = +\infty$;

Λάθος. Αν είναι $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^x = 0$ ενώ αν $\alpha > 1$ τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^x = +\infty$.

46. Πανελλαδικές 2013

Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

Σωστό.

47. Πανελλαδικές 2013

Ισχύει ότι: $|\eta\mu x| \le |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Σωστό.

48. Πανελλαδικές 2013

Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$.

Λάθος. Ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

49. Πανελλαδικές 2013

Μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουνε το πεδίο ορισμού της.

Σωστό.

50. Πανελλαδικές 2013 (Επαναληπτικές)

Αν μια συνάρτηση f είναι 1−1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.

Λάθος. Αν υπήρχαν σημεία με ίδια τετμημένη, έστω $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_1))$ τότε σε διαφορετικά x αντιστοιχεί το ίδιο y άρα η f δεν είναι $1-1$.

51. Πανελλαδικές 2013 (Επαναληπτικές)

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}(-f(x)) = +\infty$.

Σωστό.

52. Πανελλαδικές 2013 (Επαναληπτικές)

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

Σωστό.

4. Ασκήσεις

1. *Πανελλήνιες 2000 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-8x+16 & ,0<x<5 \\ (\alpha^2+\beta^2)\ln(x-5+e)+2(\alpha+1)e^{5-x} & ,x\geq 5 \end{cases}$$

α) Να βρεθούν τα $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$. **Μονάδες 6**

β) Να βρεθούν τα α, β $\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_o=5$. **Μονάδες 10**

γ) Για τις τιμές των α, β του ερωτήματος (β) να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Μονάδες 9

Λύση

α) $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-}\left(x^2-8x+16\right)=5^2-8\cdot 5+16=25-40+16=1$ και

$\lim\limits_{x\to 5^+}\left[(\alpha^2+\beta^2)\ln(x-5+e)+2(\alpha+1)e^{5-x}\right]=(\alpha^2+\beta^2)\ln(5-5+e)+2(\alpha+1)e^{5-5}$

$=(\alpha^2+\beta^2)\ln e+2(\alpha+1)e^0=(\alpha^2+\beta^2)+2(\alpha+1)=\alpha^2+\beta^2+2\alpha+2$.

β) Για να είναι η συνάρτηση f συνεχής στο $x_o=5$ αρκεί $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=f(5)$.

Είναι $f(5)=(\alpha^2+\beta^2)\ln(5-5+e)+2(\alpha+1)e^{5-5}=\alpha^2+\beta^2+2\alpha+2$.

Άρα αρκεί $\alpha^2+\beta^2+2\alpha+2=1$. Λύνουμε την εξίσωση και έχουμε

$\alpha^2+\beta^2+2\alpha+2-1=0\Rightarrow\alpha^2+\beta^2+2\alpha+1=0\Rightarrow(\alpha+1)^2+\beta^2=0\Rightarrow\alpha+1=0$ και $\beta=0$. Άρα $\alpha=-1$ και $\beta=0$.

γ) Για α = –1 και β = 0 η συνάρτηση f για $x\geq 5$ γίνεται:

$f(x)=(1+0)\ln(x-5+e)+2(-1+1)e^{5-x}=\ln(x-5+e)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-5+e)=+\infty$ άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

3. Διαφορικός λογισμός

1. Αποδείξεις

1. Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2000

Έστω μία συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

α) Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ.

β) Αν $f'(x)<0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τι συμπεραίνετε για τη μονοτονία της συνάρτησης f;

2. Πανελλαδικές 2002 – Πανελλήνιες 2002 – Πανελλαδικές 2013 (Επαναληπτικές)

Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

3. Πανελλήνιες 2002

Έστω η συνάρτηση $f(x)=ημx$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=συνx$.

4. Πανελλήνιες 2004 – 2011

Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

5. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2004 – Πανελλήνιες 2009

Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- **η f είναι συνεχής στο Δ και**
- **$f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,**

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

6. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2005

Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

7. Πανελλήνιες 2006

Έστω μία συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.
Να αποδείξετε ότι:

- **Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.**
- **Αν $f'(x)<0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.**

8. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2006 – 2011

Να αποδείξετε ότι: $(\text{συν}x)'=-\text{ημ}x,\ \ x\in\mathbb{R}$.

9. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2007

Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

10. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2008

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει: $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$.

11. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2009

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

12. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2010

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$.

13. Πανελλαδικές 2012

Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

14. Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2012

Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x_0)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x_0)<0$ στο (x_0,β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f. **Μονάδες 7**

2. Ορισμοί

1. Πανελλαδικές 2000

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

2. Πανελλήνιες 2003

Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

3. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2003 – Πανελλήνιες 2010

Πότε μία ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f;

4. Πανελλήνιες 2004 – 2009

Πότε μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

5. Πανελλήνιες 2005 – 2011

Πότε η ευθεία y = λx + β λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f στο $+\infty$.

6. Πανελλήνιες 2006

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ;

7. Πανελλήνιες 2007

Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

8. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2007

Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Rolle του Διαφορικού Λογισμού;

9. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2008

Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

10. Πανελλήνιες 2010

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;

11. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2010

Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

12. Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2012

Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

13. Πανελλαδικές 2013

Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

14. Πανελλαδικές 2013

Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της;

15. Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2013

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f;

16. Πανελλαδικές 2013 (Επαναληπτικές)

Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

3. Ερωτήσεις Σωστό – Λάθος

1. Πανελλαδικές 2000

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f′ είναι πάντοτε συνεχής στο x_0.

Λάθος. Π.χ. $f(x)=\begin{cases} x^2 ημ\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

2. Πανελλαδικές 2000 – Πανελλήνιες 2009 – Επαναληπτικές 2011

Αν η f είναι συνεχής στο x_0, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Λάθος. Π.χ. η συνάρτηση $f(x)=|x|$ είναι συνεχής στο $x_0=0$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

3. Πανελλαδικές 2000

Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0, τότε η f′ είναι συνεχής στο x_0.

Σωστό. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο x_0 άρα είναι και συνεχής στο x_0.

4. Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2000

Η συνάρτηση $f(x)=e^{1-x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Λάθος. Είναι $f'(x)=e^{1-x}(1-x)'=-e^{1-x}<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

5. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2000*

Η συνάρτηση f με: $f'(x) = -2ημx + \frac{1}{ημ^2 x} + 3$, όπου $x \in \left[\frac{π}{2}, π\right)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Σωστό. Είναι $\frac{1}{ημ^2 x} > 0$ και $-2 \le -2ημx \le 2$ άρα $f'(x) = -2ημx + \frac{1}{ημ^2 x} + 3 > 0$ για κάθε $x \in \left[\frac{π}{2}, π\right)$ άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

6. *Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2000*

Αν είναι: $f'(x) = g'(x) + 3$ για κάθε $x \in Δ$ τότε η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Λάθος. $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 3 > 0$ άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

7. *Πανελλήνιες 2003*

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

Σωστό.

8. *Πανελλήνιες 2003*

Αν μία συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.

Λάθος. Αν μία συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «κάτω» από τη γραφική της παράσταση.

9. Πανελλήνιες 2003

Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0)=0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0.

Λάθος. Π.χ. η $f(x)=x^3$ για την οποία ισχύει $f'(x)=3x^2$ και $f'(0)=0$ χωρίς όμως το 0 να είναι τοπικό ακρότατο αφού $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

10. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2003

Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

Λάθος, είναι τοπικό μέγιστο.

11. Πανελλήνιες 2004

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f · g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f\cdot g)'(x_o)=f'(x_o)g'(x_o)$$

Λάθος. Ο τύπος είναι $(f\cdot g)'(x_o)=f'(g(x_o))g'(x_o)$.

12. Πανελλήνιες 2004

Έστω μία συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x_o)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

Λάθος. Αν ισχύει $f'(x_o)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

13. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2004

Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Λάθος. Αυτό που ισχύει είναι ότι αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

14. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2005

Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ.

Σωστό.

15. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2005

Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν η f κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι υποχρεωτικά σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της f.

Λάθος. Για να είναι το $A(x_0, f(x_0))$ σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f πρέπει επιπλέον η C_f να έχει εφαπτομένη στο $A(x_0, f(x_0))$.

16. Πανελλήνιες 2006

Ισχύει ο τύπος $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λάθος. Ισχύει $(3^x)' = 3^x \cdot \ln 3$.

17. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2006

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Λάθος. Ο τύπος που ισχύει είναι $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$.

18. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2006

Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $[\ln|x|]' = \frac{1}{x}$.

Σωστό.

19. Πανελλήνιες 2007

Έστω f μία συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

Λάθος. Π.χ. η $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αλλά $f'(0) = 0$.

20. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2007

Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Λάθος. Με τις παραπάνω προϋποθέσεις συμπεραίνουμε (Πόρισμα της συνέπειας του θεωρήματος της Μέσης Τιμής) ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$.

21. Πανελλήνιες 2008

Αν μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Λάθος, π.χ. η $f(x)=x^4$ η οποία είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f''(0)=0$.

22 Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2008

Αν μία συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ, βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Σωστό.

23. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2009

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\text{εφ}x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1=\mathbb{R}-\{x \mid \text{συν}x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=-\dfrac{1}{\text{συν}^2x}$.

Λάθος. Είναι $f'(x)=\dfrac{1}{\text{συν}^2x}$.

24. Πανελλήνιες 2010

Έστω συνάρτηση f, συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.

Σωστό. Π.χ. η $f(x)=x^3$ με $x\in\mathbb{R}$ και $f'(x)=3x^2$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και είναι $f'(0)=0$.

Παρατήρηση: Για να είναι μία συνάρτηση f γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, αρκεί να είναι $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\Delta$ και η f' να μηδενίζεται σε διακεκριμένες τιμές του x, δηλαδή να μην υπάρχει υποδιάστημα Δ_1 του Δ, τέτοιο ώστε $f'(x)=0$ για κάθε $x \in \Delta_1$.

25. Πανελλήνιες 2010

$(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

Λάθος. Είναι $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$.

26. Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2010

Αν $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$, τότε ισχύει $(\alpha^x)' = x\alpha^{x-1}$.

Λάθος. Είναι $(\alpha^x)' = \alpha^x \log\alpha$.

27. Πανελλήνιες 2011

Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \,/\, \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ ισχύει $(\varepsilon\varphi x)' = -\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

Λάθος. Είναι $(\varepsilon\varphi x)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

28. Πανελλαδικές 2012

$(\sigma\varphi x)' = \dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$.

Λάθος. Είναι $(\sigma\varphi x)' = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$.

29. Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2012

Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Σωστό, γιατί αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο x_0.

30. Πανελλαδικές 2013 (Επαναληπτικές)

Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)$

Λάθος. Ισχύει $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.

4. Αντιστοίχηση

1. *Πανελλαδικές 2000*

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη της κάθε συνάρτησης στο σημείο x_0.

Στήλη Α συναρτήσεις	Στήλη Β εφαπτομένες
α. $f(x)=3x^3$, $x_0=1$	1. $y=-2x+\pi$
β. $f(x)=\eta\mu 2x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$	2. $y=\frac{1}{4}x+1$
γ. $f(x)=3\lvert x\rvert$, $x_0=0$	3. $y=9x-6$
δ. $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=4$	4. $y=-9x+5$
	5. δεν υπάρχει

Λύση

α → 3, β → 1, γ → 5, δ → 2.

5. Ασκήσεις

1. *Πανελλήνιες 2000 (Θετική Κατεύθυνση) – 3ο θέμα*

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα [0, 1] και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Αν $f(0)=2$ και $f(1)=4$, να δείξετε ότι:

α) η ευθεία y = 3 τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_o\in(0,1)$. **Μονάδες 7**

β) υπάρχει $x_1\in(0,1)$, τέτοιο ώστε $f(x_1)=\dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$.

Μονάδες 12

γ) υπάρχει $x_2\in(0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2,f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x+2000$. **Μονάδες 6**

Λύση

α) Έστω η συνάρτηση h με $h(x)=f(x)-3$ για κάθε $x\in[0,1]$.

Για την h έχουμε

- είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- $h(0)\cdot h(1)=(f(0)-3)(f(1)-3)=(2-3)(4-3)=-1<0$

άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** η $h(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Είναι $h'(x)=f'(x)>0$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο (0, 1) επομένως έχει μία το πολύ ρίζα στο (0, 1).

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η h έχει μία ακριβώς ρίζα στο (0, 1).

Άρα υπάρχει ακριβώς ένα $x_o\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$h(x_o)=0\Rightarrow f(x_o)-3=0\Rightarrow f(x_o)=3$.

Επομένως η ευθεία y = 3 τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_o \in (0,1)$.

β) $f(x) = \dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4} \Rightarrow 4f(x)-f\left(\frac{1}{5}\right)-f\left(\frac{2}{5}\right)-f\left(\frac{3}{5}\right)-f\left(\frac{4}{5}\right)=0$

Έστω η συνάρτηση t με $t(x)=4f(x)-f\left(\frac{1}{5}\right)-f\left(\frac{2}{5}\right)-f\left(\frac{3}{5}\right)-f\left(\frac{4}{5}\right)$, $x \in [0,1]$.

Είναι $t'(x)=4f'(x)>0$ άρα η t είναι γνησίως αύξουσα στο [0, 1].

Είναι $0<\frac{1}{5}<1$ άρα $f(0)<f\left(\frac{1}{5}\right)<f(1)$

$0<\frac{2}{5}<1$ άρα $f(0)<f\left(\frac{2}{5}\right)<f(1)$

$0<\frac{3}{5}<1$ άρα $f(0)<f\left(\frac{3}{5}\right)<f(1)$

$0<\frac{4}{5}<1$ άρα $f(0)<f\left(\frac{4}{5}\right)<f(1)$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις βρίσκουμε:

$$4f(0)<f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)<4f(1).$$

$4f(0)<f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow 4f(0)-f\left(\frac{1}{5}\right)-f\left(\frac{2}{5}\right)-f\left(\frac{3}{5}\right)-f\left(\frac{4}{5}\right)<0$

$\Rightarrow t(0)<0$ και

$f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)<4f(1) \Rightarrow 4f(1)-f\left(\frac{1}{5}\right)-f\left(\frac{2}{5}\right)-f\left(\frac{3}{5}\right)-f\left(\frac{4}{5}\right)>0$

$\Rightarrow t(1)>0$

Για τη συνάρτηση t έχουμε

- είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- $t(0)\cdot t(1)<0$

άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (0,1)$

ώστε $t(x_1) = 0 \Leftrightarrow 4f(x_1) - f\left(\frac{1}{5}\right) - f\left(\frac{2}{5}\right) - f\left(\frac{3}{5}\right) - f\left(\frac{4}{5}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow f(x_1) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$$

γ) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας y = 2x + 2000 είναι ίσος με 2.

Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_2 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2) = 2$.

<u>1ος τρόπος</u>

Για τη συνάρτηση f ξέρουμε ότι:

- είναι συνεχής στο $[0,1]$
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$

άρα σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει $x_2 \in (0,1)$: $f'(x_2) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{4 - 2}{1} = 2$

<u>2ος τρόπος</u>

Έστω η συνάρτηση Φ με $\Phi(x) = f(x) - 2x$ για κάθε $x \in [0,1]$. Είναι

- Η Φ είναι συνεχής στο [0, 1] ως διαφορά συνεχών.
- Η Φ είναι παραγωγίσιμη στο (0, 1) με $\Phi'(x) = f'(x) - 2$.
- $\Phi(0) = f(0) - 2 \cdot 0 = 2$ και $\Phi(1) = f(1) - 2 \cdot 1 = 4 - 2 = 2$, δηλαδή $\Phi(0) = \Phi(2)$

επομένως σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (0,1)$

τέτοιο ώστε $\Phi'(x_2) = 0 \Leftrightarrow f'(x_2) - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x_2) = 2$.

2. *Πανελλήνιες 2000 (Θετική) – 4ο θέμα*

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη

συνάρτηση $f(t)=\dfrac{at}{1+\left(\dfrac{t}{\beta}\right)^2}$, $t\ge 0$ όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

α) Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β. **Μονάδες 15**

β) Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά. **Μονάδες 10**

Λύση

α) Είναι $f(t)=\dfrac{at}{1+\left(\dfrac{t}{\beta}\right)^2}=\dfrac{at}{1+\dfrac{t^2}{\beta^2}}=\dfrac{\beta^2 at}{\beta^2+t^2}$, $t\ge 0$ και

$$f'(t)=\beta^2 a\frac{(\beta^2+t^2)-2t^2}{(\beta^2+t^2)^2}=\beta^2 a\frac{\beta^2-t^2}{(\beta^2+t^2)^2}.$$

Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης επιτυγχάνεται σε 6 ώρες άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** είναι:

$$f'(6)=0\Rightarrow \beta^2 a\frac{\beta^2-6^2}{(\beta^2+6^2)^2}=0\Rightarrow \beta^2 a(\beta^2-6^2)=0\Rightarrow \beta^2=6^2\Rightarrow \beta=6$$

(είναι $\beta>0$).

Σε 6 ώρες η συγκέντρωση θα είναι ίση με 15 άρα

$$f(6)=15\Rightarrow \frac{6^2 a\cdot 6}{6^2+6^2}=15\Rightarrow \frac{6\cdot \cancel{6^2}a}{2\cdot \cancel{6^2}}=15\Rightarrow 6a=30\Rightarrow a=5.$$

Για α = 5 και β = 6 είναι $f(t)=\dfrac{6^2\cdot 5\cdot t}{6^2+t^2}=\dfrac{180t}{36+t^2}$ και

$$f'(t)=6^2\cdot 5\frac{6^2-t^2}{(6^2+t^2)^2}=\frac{180(36-t^2)}{(36+t^2)^2}.$$

x	0	6	$+\infty$
f’	+		–
f	↗	max	↘

Δίπλα φαίνεται ο πίνακας μεταβολής της f.

β) Αρκεί να λύσουμε την ανίσωση $f(t) \geq 12$.

Είναι $\frac{180t}{36+t^2} \geq 12 \Rightarrow 180t \geq 12 \cdot 36 + 12t^2 \Rightarrow 15t \geq 36 + t^2 \Rightarrow t^2 - 15t + 36 \leq 0$.

Είναι Δ = 225 – 144 = 81 > 0. Είναι $t = \frac{15 \pm 9}{2}$ άρα t = 12 ώρες ή t = 3 ώρες.

Από τον διπλανό πίνακα μεταβολής προσήμων της f συμπεραίνουμε ότι το χρονικό διάστημα που δρα αποτελεσματικά το φάρμακο είναι από τις 3 έως τις 12 ώρες ($t \in [3,12]$).

x	0		3		12		$+\infty$
f		+	0	–	0	+	

3. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2000 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - e^{2x} + 1}{ημ2x} = 5$.

α) **Να βρείτε το $f(0)$.** **Μονάδες 7**

β) **Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.** **Μονάδες 9**

γ) **Αν $h(x) = e^{-x} f(x)$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων στα σημεία $A(0, f(0))$ και $B(0, h(0))$ αντίστοιχα είναι παράλληλες.** **Μονάδες 9**

Λύση

α) Έστω $g(x) = \frac{f(x) - e^{2x} + 1}{ημ2x}$. **(1)** Επομένως είναι $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 5$.

Είναι $g(x) \cdot ημ2x = f(x) - e^{2x} + 1$ άρα $\lim\limits_{x \to 0} [g(x) \cdot ημ2x] = \lim\limits_{x \to 0} [f(x) - e^{2x} + 1]$

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) \cdot \lim\limits_{x \to 0} ημ2x = \lim\limits_{x \to 0} f(x) - e^0 + 1 \Rightarrow 5 \cdot 0 = \lim\limits_{x \to 0} f(x) - e^0 + 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Όμως η f είναι συνεχής στο 0 άρα $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

β) Από τη σχέση (1) έχουμε ότι $f(x)=g(x)\cdot ημ2x+e^{2x}-1$.

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο 0 αρκεί να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)\cdot ημ2x+e^{2x}-1}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cdot ημ2x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0} g(x)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{ημ2x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}. \qquad \textbf{(2)}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ2x}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ2x}{2x}=2\cdot 1=2$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$ είναι απροσδιοριστία της μορφής $\dfrac{0}{0}$ άρα σύμφωνα με τον **κανόνα του De l' Hospital** είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{2x}-1\right)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{1}=2.$$

Η σχέση (2) μας δίνει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=5\cdot 2+2=12$.

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

γ) Είναι $h'(x)=\left(e^{-x}f(x)\right)'=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)$ άρα

$h'(0)=-e^{-0}f(0)+e^{-0}f'(0)=-1\cdot 0+1\cdot f'(0)=f'(0)$.

Από τη σχέση $h'(0)=f'(0)$ συμπεραίνουμε ότι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων στα σημεία $A(0,f(0))$ και $B(0,h(0))$ αντίστοιχα είναι παράλληλες.

4. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2000 – 4ο θέμα*

Η τιμή P (σε χιλιάδες δραχμές) ενός προϊόντος, t μήνες μετά την εισαγωγή του στην αγορά, δίνεται από τον τύπο:

$$\mathbf{P(t) = 4 + \frac{t-6}{t^2 + \frac{25}{4}}}$$

α) Να βρείτε την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά. **Μονάδες 2**

β) Να βρείτε το χρονικό διάστημα, στο οποίο η τιμή του προϊόντος συνεχώς αυξάνεται. **Μονάδες 10**

γ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τιμή του προϊόντος γίνεται μέγιστη. **Μονάδες 8**

δ) Να δείξετε ότι η τιμή του προϊόντος μετά από κάποια χρονική στιγμή συνεχώς μειώνεται, χωρίς όμως να μπορεί να γίνει μικρότερη από την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά. **Μονάδες 5**

Λύση

α) Είναι $P(0) = 4 + \frac{0-6}{0^2 + \frac{25}{4}} = 4 - \frac{6}{\frac{25}{4}} = 4 - \frac{24}{25} = \frac{100-24}{25} = \frac{76}{25} = 3{,}04$.

Άρα η τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά είναι 3,04 χιλιάδες δραχμές δηλαδή 3.040 δραχμές.

β) Είναι $P'(t) = \frac{t^2 + \frac{25}{4} - (t-6)2t}{\left(t^2 + \frac{25}{4}\right)^2} = \frac{t^2 + \frac{25}{4} - 2t^2 + 12t}{\left(t^2 + \frac{25}{4}\right)^2} = \frac{-t^2 + 12t + \frac{25}{4}}{\left(t^2 + \frac{25}{4}\right)^2}$.

$P'(t) = 0 \Rightarrow -t^2 + 12t + \frac{25}{4} = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$ ή $t = \frac{25}{2}$.

Σύμφωνα με τον διπλανό πίνακα και με τον περιορισμό ότι $t \geq 0$ συμπεραίνουμε ότι το χρονικό διάστημα, στο οποίο η τιμή του προϊόντος συνεχώς αυξάνεται είναι για $t \in \left[0, \frac{25}{2}\right]$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{25}{2}$	$+\infty$
f'	–	+	–	
f	↘	↗	↘	

γ) Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{25}{2}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{25}{2},+\infty\right]$ άρα η τιμή του προϊόντος γίνεται μέγιστη όταν $t=\frac{25}{2}$ μήνες.

δ) Είναι $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(4+\frac{t-6}{t^2+\frac{25}{4}}\right)=4+\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t-6}{t^2+\frac{25}{4}}=4+\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t}{t^2}=4+0=4$.

Επομένως η τιμή του προϊόντος μειώνεται μετά από τους πρώτους $\frac{25}{2}=12,5$ μήνες και δεν μπορεί να γίνει μικρότερη από 4 χιλιάδες δραχμές άρα είναι πάντα μεγαλύτερη από την αρχική τιμή του προϊόντος (3.040 δραχμές).

5. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2000 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-\alpha}$, όπου α πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε η συνάρτηση f να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=4$. **Μονάδες 5**

β) Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Μ(1, 0) να διέρχεται από το σημείο Α(–2, 3). **Μονάδες 10**

γ) Αν $\alpha>2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει αριθμός $x_0\in(1,2)$ τέτοιος, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη x_0, να είναι παράλληλη προς τον άξονα x′x.

Μονάδες 10

Λύση

α) Αρκεί $\lim\limits_{x\to4} f(x)=+\infty$ ή $\lim\limits_{x\to4} f(x)=-\infty$.

Είναι $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-\alpha}\Rightarrow f(x)\cdot(x-\alpha)=x^2-3x+2$

$\Rightarrow \lim_{x\to 4}\left[f(x)\cdot(x-\alpha)\right]=\lim_{x\to 4}\left[x^2-3x+2\right]\Rightarrow \lim_{x\to 4} f(x)(4-\alpha)=6$.

Αν το 4 – α είναι διάφορο του μηδενός τότε το πρώτο μέλος είναι ίσο με $+\infty$ ή με $-\infty$ και όχι με 6.

Άρα για να ισχύει η ισότητα πρέπει να είναι $4-\alpha=0\Rightarrow \alpha=4$.

β) $f'(x)=\dfrac{(2x-3)(x-\alpha)-(x^2-3x+2)}{(x-\alpha)^2}=\dfrac{2x^2-2x\alpha-3x+3\alpha-x^2+3x-2}{(x-\alpha)^2}$

$=\dfrac{x^2-2x\alpha+3\alpha-2}{(x-\alpha)^2}$ άρα $f'(1)=\dfrac{1-2\alpha+3\alpha-2}{(1-\alpha)^2}=\dfrac{\alpha-1}{(\alpha-1)^2}=\dfrac{1}{\alpha-1}$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $M(1,0)$ είναι $y-0=\dfrac{1}{\alpha-1}(x-1)\Rightarrow y=\dfrac{1}{\alpha-1}(x-1)$.

Το σημείο $A(-2,3)$ ανήκει στην εφαπτομένη άρα επαληθεύει την εξίσωσή της.

Άρα ισχύει $3=\dfrac{1}{\alpha-1}(-2-1)\Rightarrow 3=\dfrac{-3}{\alpha-1}\Rightarrow 3\alpha-3=-3\Rightarrow \alpha=0$.

γ) Είναι $f'(x)=\dfrac{x^2-2x\alpha+3\alpha-2}{(x-\alpha)^2}$.

Έστω η συνάρτηση $g(x)=x^2-2x\alpha+3\alpha-2$ με $x\in[1,2]$.

Για την συνάρτηση g ισχύει ότι:

- η g είναι συνεχής στο [1, 2]
- $g(1)\cdot g(2)=(1^2-2\cdot 1\cdot \alpha+3\alpha-2)(2^2-2\cdot 2\cdot \alpha+3\alpha-2)=(\alpha-1)(-\alpha+2)<0$

  αφού $\alpha-1>0$ και $-\alpha+2<0$ (ισχύει $\alpha>2$).

Επομένως σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$ δηλαδή $f'(x_0)=0$.

Επομένως υπάρχει αριθμός $x_0\in(1,2)$ τέτοιος, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη x_0, να είναι παράλληλη προς τον άξονα x′x.

6. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2000 – 4ο θέμα*

Σε έναν διαγωνισμό ενός Οργανισμού για την πρόσληψη προσωπικού, συγκεντρώθηκαν 1000 γραπτά υποψηφίων. Κάθε γραπτό διορθώνεται από δύο διαφορετικούς βαθμολογητές. Κάθε βαθμολο-γητής διορθώνει 4 φακέλους των 25 γραπτών την ημέρα. Για την διόρθωση κάθε γραπτού ο βαθμολογητής αμείβεται 200 δραχμές. Τη διόρθωση συντονίζουν δύο επόπτες που αμείβονται με 4.000 δραχμές την ημέρα. Στο τέλος της διόρθωσης όλων των γραπτών, κάθε βαθμολογητής παίρνει επιπλέον ως επίδομα 10.000 δραχμές ανεξάρτητα από τον αριθμό των ημερών που απασχολήθηκε.

α) Να αποδείξετε ότι το κόστος Κ(x) σε χιλιάδες δραχμές για τη διόρθωση όλων των γραπτών δίνεται από τη συνάρτηση:

$$K(x)=10\left(x+\frac{16}{x}+40\right)$$

όπου x ο αριθμός των βαθμολογητών που απασχολούνται.

Μονάδες 13

β) Πόσοι πρέπει να είναι οι βαθμολογητές, ώστε το κόστος της διόρθωσης να είναι ελάχιστο; **Μονάδες 8**

γ) Να βρείτε το ελάχιστο κόστος του ερωτήματος (β) και τον αριθμό των ημερών που απασχολήθηκαν οι βαθμολογητές για τη διόρθωση των γραπτών. **Μονάδες 4**

Λύση

α) Το κόστος της διόρθωσης των 1.000 γραπτών είναι

$2\cdot 1.000\cdot 200=400.000$ δραχμές = 400 χιλιάδες δραχμές.

Ο κάθε βαθμολογητής διορθώνει 100 γραπτά την ημέρα. Άρα οι x βαθμολογητές θα διορθώσουν $2\cdot 1.000=2.000$ γραπτά σε $\frac{2.000}{100x}=\frac{20}{x}$ ημέρες.

Οι δύο επόπτες θα πληρωθούν $2\cdot\frac{20}{x}\cdot 4.000=\frac{160.000}{x}=\frac{160}{x}$ χιλιάδες δραχμές.

Επιπλέον οι x βαθμολογητές θα πάρουν επίδομα 10.000x δραχμές = 10x χιλιάδες δραχμές.

Έτσι, το συνολικό κόστος είναι $K(x)=400+\frac{160}{x}+10x=10\left(40+\frac{16}{x}+x\right)$.

β) Είναι $K'(x)=10\left(-\frac{16}{x^2}+1\right)=10\cdot\frac{x^2-16}{x^2}$.

$K'(x)=0\Rightarrow 10\cdot\frac{x^2-16}{x^2}=0\Rightarrow x^2=16\Rightarrow x=\pm 4$.

Όμως είναι $x\geq 2$ άρα είναι $x=4$.

Από τον διπλανό πίνακα συμπεραίνουμε ότι για να είναι το κόστος της διόρθωσης ελάχιστο πρέπει οι βαθμολογητές να είναι 4.

x	2	4	$+\infty$
f’	−		+
f	↘		↗

γ) Είναι $K(4)=10\left(40+\frac{16}{4}+4\right)=10(40+4+4)=480$ χιλιάδες δραχμές.

Οι ημέρες που απασχολήθηκαν οι βαθμολογητές για τη βαθμολόγηση των γραπτών ήταν $\frac{20}{4}=5$.

7. *Πανελλήνιες 2001 – 3ο θέμα*

Για μία συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, ισχύει ότι:

$$f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2<3\gamma$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα. **Μονάδες 10**

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. **Μονάδες 8**

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (0, 1). **Μονάδες 7**

Λύση

α) Έστω ότι η συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο σε ένα σημείο $(x_o, f(x_o))$.

Επομένως σύμφωνα με το **θεώρημα Fermat** θα είναι $f'(x_o)=0$.

Παραγωγίζουμε τη δοσμένη σχέση και έχουμε:

$$\left[f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)\right]'=\left(x^3-2x^2+6x-1\right)'$$

$$\Rightarrow 3f^2(x)\cdot f'(x)+2\beta f(x)\cdot f'(x)+\gamma f'(x)=3x^2-4x+6. \qquad \textbf{(1)}$$

Για $x=x_o$ η παραπάνω σχέση γίνεται

$$3f^2(x_o)\cdot f'(x_o)+2\beta f(x_o)\cdot f'(x_o)+\gamma f'(x_o)=3{x_o}^2-4x_o+6.$$

$f'(x_o)=0$ άρα $\cancel{3f^2(x_o)\cdot f'(x_o)}+\cancel{2\beta f(x_o)\cdot f'(x_o)}+\cancel{\gamma f'(x_o)}=3{x_o}^2-4x_o+6$

$$\Rightarrow 3{x_o}^2-4x_o+6=0.$$

Είναι $\Delta=16-4\cdot3\cdot6=16-72=-56<0$ άρα η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη, δηλαδή δεν υπάρχει x_o που να την επαληθεύει.

Επομένως η συνάρτηση δεν έχει ακρότατα.

β) Η σχέση (1) δίνει $f'(x)\cdot\left[3f^2(x)+2\beta f(x)+\gamma\right]=3x^2-4x+6$. **(2)**

Η $3x^2-4x+6$ δεν έχει ρίζες άρα είναι ομόσημη του 3, επομένως είναι $3x^2-4x+6>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επίσης η $3f^2(x)+2\beta f(x)+\gamma$ έχει $\Delta=4\beta^2-12\gamma=4\left(\beta^2-3\gamma\right)<0$ άρα είναι ομόσημη του 3, επομένως $3f^2(x)+2\beta f(x)+\gamma>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Από τα παραπάνω και τη σχέση (2) συμπεραίνουμε ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Για x = 0 η δοσμένη σχέση δίνει $f^3(0)+\beta f^2(0)+\gamma f(0)=0^3-2\cdot0^2+6\cdot0-1$

$$f(0)\left[f^2(0)+\beta f(0)+\gamma\right]=-1.$$

Η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι μεγαλύτερη του μηδενός άρα $f(0)<0$.

Για x = 1 η δοσμένη σχέση δίνει

$$f^3(1)+\beta f^2(1)+\gamma f(1)=1^3-2\cdot1^2+6\cdot1-1\Rightarrow f(1)\left[f^2(1)+\beta f(1)+\gamma\right]=4.$$

Η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι μεγαλύτερη του μηδενός άρα $f(1)>0$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0, 1] ως παραγωγίσιμη και $f(0)\cdot f(1)<0$, άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1).

Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα άρα έχει μία το πολύ ρίζα, επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο (0, 1).

8. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2001 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x+\alpha, & x\le 1 \\ \left(1-e^{-x+1}\right)\cdot\ln(x-1), & x\in(1,2)\end{cases}$$

α) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-e^{-x+1}}{x-1}$. **Μονάδες 7**

β) Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=1$. **Μονάδες 8**

γ) Για $\alpha=-1$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα x'x. **Μονάδες 7**

Λύση

α) Είναι της μορφής $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ άρα σύμφωνα με τον **κανόνα του De l' Hospital** είναι: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-e^{-x+1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(1-e^{-x+1}\right)'}{(x-1)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{-x+1}}{1}=1$

β) Η f είναι συνεχής στο x_0 = 1 άρα $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$. Είναι $f(1)=1+\alpha=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(1-e^{-x+1}\right)\cdot\ln(x-1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1-e^{-x+1}}{x-1}\right)\cdot\left[(x-1)\ln(x-1)\right]$.

Από το (α) ερώτημα ξέρουμε ότι $\lim_{x\to 1}\frac{1-e^{-x+1}}{x-1}=1$ Ακόμη $\lim_{x\to 1^+}\left[(x-1)\ln(x-1)\right]$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{(x-1)}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to 1^+}\frac{\left[\ln(x-1)\right]'}{\left[\frac{1}{(x-1)}\right]'}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{(x-1)^2}}=\lim_{x\to 1^+}(x-1)=0.$$

Άρα $\lim_{x\to 1^+}f(x)=1\cdot 0=0$. Επομένως 1 + α = 0 άρα α = –1.

γ) Είναι $f(0)=1+(-1)=0$ και $f(2)=\left(1-e^{-2+1}\right)\cdot\ln(2-1)=\left(1-\frac{1}{e}\right)\cdot 0=0$.

Άρα η f είναι:

- συνεχής στο [1, 2]
- παραγωγίσιμη στο (1, 2)
- $f(1)=f(2)=0$

επομένως σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

9. *Πανελλήνιες 2002 – 3ο θέμα*

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f\circ g$ είναι 1–1.

α) Να δείξετε ότι η g είναι 1–1. **Μονάδες 7**

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση: $g\left(f(x)+x^3-x\right)=g\left(f(x)+2x-1\right)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα. **Μονάδες 18**

Λύση

α) Η $f\circ g$ είναι 1–1 άρα για $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$(f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2)\Leftrightarrow f\left(g(x_1)\right)=f\left(g(x_2)\right)\Leftrightarrow x_1=x_2.$$

Για $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ έχουμε $g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow f\left(g(x_1)\right)=f\left(g(x_2)\right)$.

Όπως δείξαμε παραπάνω η διπλανή σχέση έχει ως συμπέρασμα ότι $x_1=x_2$, άρα η g είναι 1–1.

β) Η συνάρτηση g είναι 1–1, όπως δείξαμε στο (α) ερώτημα άρα είναι:

$$g\left(f(x)+x^3-x\right)=g\left(f(x)+2x-1\right)\Rightarrow f(x)+x^3-x=f(x)+2x-1\Rightarrow x^3-x=2x-1$$
$$\Rightarrow x^3-3x-1=0.$$

Έστω η συνάρτηση $h(x)=x^3-3x+1$ με $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $h'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$.

x	$-\infty$ -1	1	$+\infty$
h'	+	–	+
h	↗	↘	↗

Είναι $h'(x)=0\Rightarrow 3(x^2-1)=0\Rightarrow x=1$ ή $x=-1$.

- Στο διάστημα $(-\infty,-1]$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα άρα η h έχει μία το πολύ ρίζα. Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=-\infty$ και $h(-1)=3$. Άρα το σύνολο τιμών της h είναι το $(-\infty,1]$. Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών άρα η h έχει μία τουλάχιστον ρίζα. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η h έχει μία ακριβώς (αρνητική) ρίζα στο $(-\infty,-1)$.
- Στο διάστημα $[0,1]\subseteq[-1,1]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα άρα η h έχει μία το πολύ ρίζα. Επίσης είναι $h(0)=1$ και $h(1)=-1$. Άρα το σύνολο τιμών της h είναι το $[-1,1]$. Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών άρα η h έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η h έχει μία ακριβώς (θετική) ρίζα στο $(0,1)$.
- Στο διάστημα $[1,+\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα άρα η h έχει μία το πολύ ρίζα. Επίσης είναι $h(1)=-1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$. Άρα το σύνολο τιμών της h είναι το $[-1,+\infty)$. Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών άρα η h έχει μία τουλάχιστον ρίζα. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η h έχει μία ακριβώς (θετική) ρίζα στο $(1,+\infty)$.

Άρα η εξίσωση έχει μία αρνητική και δύο θετικές ρίζες.

10. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2002 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{|x-z|^2-|x+\overline{z}|^2}{x^2+|z|^2}$, όπου $z=\alpha+\beta i$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$.

α) Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. **Μονάδες 8**

β) Να βρείτε τα ακρότατα της f όταν $|z+1|>|z-1|$. **Μονάδες 9**

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της f.

Μονάδες 8

Λύση

α) Είναι $f(x)=\dfrac{|x-z|^2-|x+\overline{z}|^2}{x^2+|z|^2}=\dfrac{(x-z)(x-\overline{z})-(x+\overline{z})(x+z)}{x^2+\alpha^2+\beta^2}$

$=\dfrac{(x-\alpha-\beta i)(x-\alpha+\beta i)-(x+\alpha+\beta i)(x+\alpha-\beta i)}{x^2+\alpha^2+\beta^2}=\dfrac{(x-\alpha)^2+\beta^2-(x+\alpha)^2-\beta^2}{x^2+\alpha^2+\beta^2}$

$=\dfrac{-4x\alpha}{x^2+\alpha^2+\beta^2}$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x\alpha}{x^2+\alpha^2+\beta^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x\alpha}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4\alpha}{x}=0$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x\alpha}{x^2+\alpha^2+\beta^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x\alpha}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4\alpha}{x}=0$.

β) Είναι $|z+1|>|z-1|\Rightarrow|z+1|^2>|z-1|^2\Rightarrow(z+1)(\overline{z}+1)>(z-1)(\overline{z}-1)$

$z\overline{z}+z+\overline{z}+1>z\overline{z}-z-\overline{z}+1\Rightarrow z+\overline{z}>0\Rightarrow 2\alpha>0\Rightarrow\alpha>0$.

Από το (α) ερώτημα είναι $f(x)=\dfrac{-4x\alpha}{x^2+\alpha^2+\beta^2}\Rightarrow f'(x)=-4\alpha\dfrac{x^2+\alpha^2+\beta^2-2x^2}{x^2+\alpha^2+\beta^2}$

$\Rightarrow f'(x)=4\alpha\dfrac{\left[x^2-(\alpha^2+\beta^2)\right]}{x^2+\alpha^2+\beta^2}$.

Είναι $f'(x)=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ και α > 0, άρα τα ακρότατα της f είναι

x	$-\infty$	$-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$		$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$	$+\infty$
f'	+	0	−	0	+
f	↗		↘		↗

τα $-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ και $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $f\left(-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)=\dfrac{-4\alpha\left(-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)}{\alpha^2+\beta^2+\alpha^2+\beta^2}=\dfrac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ και

$f\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)=\dfrac{-4\alpha\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)}{\alpha^2+\beta^2+\alpha^2+\beta^2}=\dfrac{-2\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $\left[\dfrac{-2\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\dfrac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right]$.

Είναι $f\left(\left(-\infty,-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right]\right)=\left(0,\dfrac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right]$ άρα δεν υπάρχει καμία ρίζα σ' αυτό το διάστημα.

Είναι $f\left(\left[-\sqrt{\alpha^2+\beta^2},\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right]\right)=\left[\dfrac{-2\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\dfrac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right]$ άρα υπάρχει μία ρίζα σ' αυτό το διάστημα.

Είναι $f\left(\left[\sqrt{\alpha^2+\beta^2},+\infty\right)\right)=\left[\dfrac{-2\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},0\right)$ άρα δεν υπάρχει καμία ρίζα σ' αυτό το διάστημα.

11. *Πανελλήνιες 2003 –4° θέμα*

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α,β). Αν ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma\in(\alpha,\beta)$, $\delta\in(\alpha,\beta)$, έτσι ώστε $f(\gamma)\cdot f(\delta)<0$, να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα (α,β). **Μονάδες 8**

β) Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$. **Μονάδες 9**

γ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f. **Μονάδες 8**

Λύση

α) Έστω ότι γ < δ. Το διάστημα [γ, δ] είναι υποσύνολο του [α, β].

Η συνάρτηση είναι συνεχής στο [γ, δ] αφού είναι συνεχής στο [α, β] και ισχύει $f(\gamma)\cdot f(\delta) < 0$ άρα σύμφωνα με το **Θεώρημα Bolzano** υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο (γ, δ) άρα και στο (α, β).

Αν ήταν δ < γ τότε θα εκτελούσαμε την παραπάνω διαδικασία στο [δ, γ].

Αν ήταν γ = δ τότε από τη σχέση $f(\gamma)\cdot f(\delta) < 0$ έχουμε $f^2(\gamma) < 0$ που είναι άτοπο.

β) Είναι $f(\gamma)\cdot f(\delta) < 0$. Υποθέτουμε ότι $f(\gamma) < 0$ και $f(\delta) > 0$. Στην αντίθετη περίπτωση τα συμπεράσματα είναι τα ίδια ακριβώς.

Η f είναι συνεχής στο [α, γ] και παραγωγίσιμη στο (α, γ) άρα σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει $x_1 \in (\alpha, \gamma)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_1) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} = \frac{f(\gamma)}{\gamma - \alpha} < 0. \qquad \textbf{(1)}$$

Ομοίως η f είναι συνεχής στο [γ, x_o] και παραγωγίσιμη στο (γ, x_o) άρα σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει $x_2 \in (\gamma, x_o)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_2) = \frac{f(x_o) - f(\gamma)}{\gamma - \alpha} = \frac{-f(\gamma)}{\gamma - \alpha} > 0. \qquad \textbf{(2)}$$

Για την συνάρτηση f' ξέρουμε ότι είναι συνεχής στο [x_1, x_2] και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) άρα σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει $\xi_2 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$f''(\xi_2) = \frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} > 0.$$

Με τον ίδιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $x_3 \in (x_o, \delta)$ τέτοιο ώστε

$f'(x_3) = \dfrac{f(\delta) - f(x_o)}{\delta - x_o} = \dfrac{f(\delta)}{\delta - x_o} > 0$ και $x_4 \in (\delta, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_4) = \frac{f(\beta) - f(\delta)}{\beta - \delta} = \frac{-f(\delta)}{\beta - \delta} < 0.$$

Για την συνάρτηση f' ξέρουμε ότι είναι συνεχής στο $[x_3, x_4]$ και παραγωγίσιμη στο (x_3, x_4) άρα σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει $\xi_1 \in (x_3, x_4)$ τέτοιο ώστε

$$f''(\xi_1) = \frac{f'(x_4) - f'(x_3)}{x_4 - x_3} < 0.$$

γ) Για την f'' ξέρουμε ότι είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και ότι ισχύει $f''(\xi_1) \cdot f''(\xi_2) < 0$. Άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει $\xi_0 \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_0) = 0$.

Άρα το σημείο $(\xi_0, f(\xi_0))$ είναι πιθανό σημείο καμπής της συνάρτησης f.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Η άσκηση ζητάει να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της f. Το μόνο που μπορούμε να αποδείξουμε είναι ότι υπάρχει **ένα τουλάχιστον πιθανό** σημείο καμπής της f.

12. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2003 – 4ο θέμα*

Δίνεται μία συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$\mathbf{f(x) = -f(2 - x) \text{ και } f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη. **Μονάδες 8**

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα. **Μονάδες 8**

γ) Έστω η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα x′x, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45°. **Μονάδες 9**

Λύση

α) Η f' έχει συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$. Ακόμη είναι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η f' δεν έχει ρίζες. Επομένως η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως μονότονη.

β) Η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ άρα έχει μία το πολύ ρίζα.

Για $x = 1$ η δοσμένη σχέση μας δίνει $f(1) = -f(1) \Rightarrow 2f(1) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$ άρα το 1 είναι ρίζα της συνάρτησης.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα (το x = 1).

γ) Είναι $g(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{f'(x)} = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x = 1$.

1ος τρόπος: Είναι $g'(1) = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\dfrac{f(x)}{f'(x)} - 0}{x - 1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{f'(x)} \lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x)}{x - 1}$

$= \lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{f'(x)} \lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \dfrac{1}{f'(1)} \cdot f'(1) = 1$. Άρα $g'(1) = 1 \Rightarrow g'(1) = \varepsilon\varphi 45^\circ$.

2ος τρόπος: Είναι $g'(x) = \dfrac{[f'(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} \Rightarrow$

$$g'(x) = \frac{[f'(1)]^2 - f(1) \cdot f''(1)}{[f'(1)]^2} \Rightarrow g'(1) = 1 \Rightarrow g'(1) = \varepsilon\varphi 45^\circ$$

13. *Πανελλήνιες 2004 – 2ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 \ln x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα. **Μονάδες 10**

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής. **Μονάδες 8**

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. **Μονάδες 7**

Λύση

α) Πρέπει x > 0, άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0,+\infty)$.

Είναι $f'(x)=2x\ln x+x^2\frac{1}{x}=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της το οποίο είναι ανοικτό. Επομένως, οι θέσεις πιθανών ακροτάτων είναι μόνο στα σημεία που μηδενίζεται η πρώτη παράγωγός της. Είναι

$$f'(x)=0\Rightarrow x(2\ln x+1)=0\Rightarrow x=0 \text{ ή } 2\ln x+1=0\Rightarrow \ln x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

Είναι $f'(x)<0\Rightarrow x(2\ln x+1)<0\overset{x>0}{\Rightarrow}2\ln x+1<0\Rightarrow \ln x<-\frac{1}{2}\Rightarrow x<\frac{1}{\sqrt{e}}$ και

$f'(x)<0\Rightarrow x>\frac{1}{\sqrt{e}}$.

Επομένως η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=\frac{1}{\sqrt{e}}$ ίσο με

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2\ln\frac{1}{\sqrt{e}}=\frac{1}{e}\ln e^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2e}.$$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
f’	–		+
f	↘		↗

β) Είναι $f''(x)=\left[x(2\ln x+1)\right]'=2\ln x+1+x\cdot\frac{2}{x}=2\ln x+3$.

Η συνάρτηση f'' ορίζεται σε όλο το πεδίο ορισμού της f. Επομένως, οι θέσεις πιθανών ακροτάτων είναι μόνο στα σημεία που μηδενίζεται η δεύτερη παράγωγός της.

Είναι $f''(x)=0\Rightarrow 2\ln x+3=0\Rightarrow \ln x=-\frac{3}{2}\Rightarrow x=e^{-\frac{3}{2}}$.

Είναι $f''(x)>0\Rightarrow 2\ln x+3>0\Rightarrow \ln x>-\frac{3}{2}\Rightarrow \ln x>\ln e^{-\frac{3}{2}}\overset{\ln x\uparrow}{\Rightarrow}x>e^{-\frac{3}{2}}$ και

$f''(x)<0\Rightarrow 2\ln x+3<0\Rightarrow \ln x<-\frac{3}{2}\Rightarrow \ln x<\ln e^{-\frac{3}{2}}\overset{\ln x\uparrow}{\Rightarrow}x<e^{-\frac{3}{2}}$.

Επομένως η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x_0 = e^{-\frac{3}{2}}$ ίσο με

$$f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = \left(e^{-\frac{3}{2}}\right)^2 \ln e^{-\frac{3}{2}} = e^{-3}\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2e^3}.$$

x	0	$e^{-\frac{3}{2}}$	$+\infty$
f''	−	+	
f	∩	∪	

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2 \ln x\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^2}}$. Το όριο είναι της μορφής $\dfrac{-\infty}{+\infty}$.

Σύμφωνα με τον **κανόνα του De l' Hospital** είναι

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{2}{x^3}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{2} = 0.$$

Επίσης $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2 \ln x\right) = +\infty$.

Αν λάβουμε υπ' όψιν μας ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $-\dfrac{1}{2e}$ τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\left[-\dfrac{1}{2e}, +\infty\right)$.

14. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2004 – 3ο θέμα*

Δίνεται μία συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα [α, β] με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και μιγαδικός αριθμός z με:

$$\mathrm{Re}(z) \neq 0,\ \ \mathrm{Im}(z) \neq 0 \ \ \text{και} \ \ |\mathrm{Re}(z)| > |\mathrm{Im}(z)|$$

Αν $z + \dfrac{1}{z} = f(\alpha)$ και $z^2 + \dfrac{1}{z^2} = f^2(\beta)$, να αποδείξετε ότι:

α) $|z| = 1$. **Μονάδες 11**

β) $f^2(\beta) < f^2(\alpha)$. **Μονάδες 5**

γ) **Η εξίσωση $x^3 \cdot f(\alpha) + f(\beta) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (–1, 1).**

Μονάδες 9

δ) $\mathbf{Re(z) = \frac{f(\alpha)}{2}}$.

Λύση

α) Είναι $f(\alpha) \in \mathbb{R}$ άρα $\left(z + \frac{1}{z}\right) \in \mathbb{R}$. Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$.

Είναι $z + \frac{1}{z} = x + yi + \frac{1}{x + yi} = x + yi + \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = x + \frac{x}{x^2 + y^2} + yi\left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}\right)$. **(1)**

Όμως $\left(z + \frac{1}{z}\right) \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1$.

β) Είναι $z^2 + \frac{1}{z^2} = f^2(\beta) \Rightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2z\frac{1}{z} = f^2(\beta) \Rightarrow f^2(\alpha) - 2 = f^2(\beta)$

$\Rightarrow f^2(\beta) - f^2(\alpha) = -2 < 0 \Rightarrow f^2(\beta) < f^2(\alpha)$.

γ) Έστω η συνάρτηση $h(x) = x^3 \cdot f(\alpha) + f(\beta)$ με $x \in (-1, 1)$.

Για την συνάρτηση h έχουμε ότι:

- είναι συνεχής στο $[-1, 1]$
- είναι $h(-1) \cdot h(1) = (-f(\alpha) + f(\beta))(f(\alpha) + f(\beta)) = f^2(\beta) - f^2(\alpha) < 0$

άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** η εξίσωση $h(x) = 0$, άρα και η $x^3 \cdot f(\alpha) + f(\beta) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 1)$.

δ) Είναι $f(\alpha) = z + \frac{1}{z} = x + \frac{x}{x^2 + y^2}$. Όμως είναι $|z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ άρα $f(\alpha) = x + \frac{x}{1} = 2x = 2\mathrm{Re}(z) \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = \frac{f(\alpha)}{2}$.

15. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2005 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1–1. **Μονάδες 7**

β) Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία $A(1,2005)$ και $B(-2,1)$, να λύσετε την εξίσωση:

$$f^{-1}\left(-2004+f\left(x^2-8\right)\right)=-2$$ **Μονάδες 9**

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Μ της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία

$$(\varepsilon): y=-\frac{1}{668}x+2005$$ **Μονάδες 9**

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής.

1ος τρόπος: Έστω ότι δεν είναι 1–1 (άρα υπάρχουν $x_1 \neq x_2$ ώστε $f(x_1)=f(x_2)$).

Σύμφωνα με το **Θεώρημα Rolle** υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$: $f'(\xi)=0$ (Άτοπο).

2ος τρόπος: Είναι $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η f' δεν έχει ρίζες. Η f δεν παρουσιάζει ακρότατα (αν είχε ακρότατο στο x_0 τότε σύμφωνα με το **Θεώρημα Fermat** θα ήταν $f'(x_0)=0$, άτοπο). Επομένως η f είναι συνεχής και δεν έχει ακρότατα άρα είναι γνησίως μονότονη. Επομένως είναι 1–1.

β) Η f είναι «1–1» άρα αντιστρέφεται.

Είναι $f(1)=2005$ και $f(-2)=1$ άρα $f^{-1}(2005)=1$ και $f^{-1}(1)=-2$.

$$f^{-1}\left(-2004+f\left(x^2-8\right)\right)=-2 \Rightarrow f^{-1}\left(-2004+f\left(x^2-8\right)\right)=f^{-1}(1) \qquad (f^{-1}\ 1\text{–}1)$$

$$-2004+f\left(x^2-8\right)=1 \Rightarrow f\left(x^2-8\right)=2005 \Rightarrow f\left(x^2-8\right)=f(1) \qquad (f\ 1\text{–}1)$$

$$x^2-8=1 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3.$$

γ) Είναι $\lambda_\varepsilon=-\frac{1}{668}$ άρα κάθε ευθεία κάθετη στην ε έχει συντελεστή διεύθυνσης λ ώστε $\lambda\cdot\lambda_\varepsilon=-1 \Rightarrow \lambda\cdot\left(-\frac{1}{668}\right)=-1 \Rightarrow \lambda=668$. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=668$. Για την f ξέρουμε ότι:

- είναι συνεχής στο [–2, 1]
- είναι παραγωγίσιμη στο (–2, 1)

Επομένως σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\frac{2005-1}{3}=\frac{2004}{3}=668.$$

16. *Πανελλήνιες 2006 – 4ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}-\ln x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο πεδίο ορισμού της. **Μονάδες 5**

γ) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\ln x$ στο σημείο $A(\alpha,\ln\alpha)$ με $\alpha>0$ και εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x)=e^x$ στο σημείο $B(\beta,e^{\beta})$ με $\beta\in\mathbb{R}$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$. **Μονάδες 9**

δ) Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτομένες. **Μονάδες 3**

Λύση

α) Πρέπει $x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$ και $x>0$ άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A=(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Είναι $f'(x)=\dfrac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{-2}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{-2x}{x(x-1)^2}-\dfrac{(x-1)^2}{x(x-1)^2}$

$$=\frac{-2x-(x-1)^2}{x(x-1)^2}=-\frac{x^2+1}{x(x-1)^2}.$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

Η f είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα δύο παραπάνω διαστήματα.

Άρα το σύνολο τιμών της f προκύπτει από την ένωση του συνόλου τιμών που αντιστοιχεί στο διάστημα $(0,1)$ και του συνόλου τιμών που αντιστοιχεί στο διάστημα $(1,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+1}{x-1}-\ln x=-1-(-\infty)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{x-1}-\ln x=-\infty-0=-\infty$ άρα το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο διάστημα $(0,1)$ είναι το $(-\infty,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{x-1}-\ln x=+\infty-0=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+1}{x-1}-\ln x=1-(+\infty)=-\infty$ άρα το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο διάστημα $(1,+\infty)$ είναι το $(-\infty,+\infty)$.

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $(-\infty,+\infty)$.

β) Στο $(0,1)$ η συνάρτηση έχει σύνολο τιμών το $(-\infty,+\infty)$ άρα έχει μία τουλάχιστον ρίζα. Επίσης είναι γνησίως φθίνουσα άρα έχει μία το πολύ ρίζα.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $(0,1)$.

Ομοίως, στο $(1,+\infty)$ η συνάρτηση έχει σύνολο τιμών το $(-\infty,+\infty)$ άρα έχει μία τουλάχιστον ρίζα. Επίσης είναι γνησίως φθίνουσα άρα έχει μία το πολύ ρίζα.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $(1,+\infty)$.

Άρα, τελικά η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

γ) Για να είναι το α ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ αρκεί

$$f(\alpha)=0\Leftrightarrow\frac{\alpha+1}{\alpha-1}-\ln\alpha=0\Leftrightarrow\alpha+1-(\alpha-1)\ln\alpha=0. \quad \textbf{(1)}$$

Είναι $g'(x)=\frac{1}{x}$ άρα $g'(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$. Επομένως η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\ln x$ στο σημείο $A(\alpha,\ln\alpha)$ είναι η $y-\ln\alpha=\frac{1}{\alpha}(x-\alpha)\Rightarrow y=\frac{1}{\alpha}x+\ln\alpha-1$.

Ομοίως είναι $h'(x)=e^x$ άρα $h'(\alpha)=e^\alpha$. Επομένως η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x)=e^x$ στο σημείο $B(\beta,e^\beta)$ είναι η $y-e^\beta=e^\beta(x-\beta)\Rightarrow y=e^\beta x+e^\beta(1-\beta)$.

Από την υπόθεση οι δύο εφαπτομένες ταυτίζονται άρα

$$\begin{cases}\frac{1}{\alpha}=e^\beta\\ \ln\alpha-1=(1-\beta)e^\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=\ln\alpha^{-1}\\ \ln\alpha-1=(1-\beta)\frac{1}{\alpha}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-\ln\alpha\\ \ln\alpha-1=\frac{1}{\alpha}-\beta\frac{1}{\alpha}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-\ln\alpha\\ \ln\alpha-1=\frac{1}{\alpha}+\ln\alpha\frac{1}{\alpha}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\\ \alpha\ln\alpha-\alpha-\ln\alpha-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\\ (\alpha-1)\ln\alpha-\alpha-1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\\ \alpha+1-(\alpha-1)\ln\alpha=0\end{cases}$$

Επομένως η σχέση (1) ισχύει άρα το α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

δ) Για να υπάρχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτομένες αρκεί το σύστημα

$$\begin{cases}\frac{1}{\alpha}=e^\beta\\ \ln\alpha-1=(1-\beta)e^\beta\end{cases}$$ να έχει ακριβώς δύο λύσεις.

Με τις ίδιες πράξεις, όπως στο ερώτημα (γ) καταλήγουμε ότι

$$\alpha+1-(\alpha-1)\ln\alpha=0\Leftrightarrow\alpha+1=(\alpha-1)\ln\alpha\Leftrightarrow\frac{\alpha+1}{\alpha-1}=\ln\alpha\Leftrightarrow\frac{\alpha+1}{\alpha-1}-\ln\alpha=0$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha)=0.$$

Σύμφωνα με το ερώτημα (β) η εξίσωση $f(\alpha)=0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο πεδίο ορισμού της άρα και οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν δύο ακριβώς κοινές εφαπτομένες.

17. *Πανελλήνιες 2008 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\ln x, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0. **Μονάδες 3**

β) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της. **Μονάδες 9**

γ) Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x=e^{\frac{a}{x}}$ **για όλες τις πραγματικές τιμές του α.** **Μονάδες 6**

δ) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x+1)>f(x+1)-f(x)$ **για κάθε** $x>0$.

Μονάδες 7

Λύση

α) Για να είναι συνεχής στο 0 αρκεί $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ που είναι απροσδιόριστη μορφή $\left(\dfrac{-\infty}{+\infty}\right)$.

Εφαρμόζουμε τον **κανόνα του De l' Hospital** και έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x}=-\lim_{x\to 0^+}x=0=f(0)$$

άρα η συνάρτηση είναι συνεχής στο 0.

β) Για x > 0 είναι $f'(x)=\ln x+1$.

Είναι $f'(x)=0\Rightarrow \ln x+1=0\Rightarrow \ln x=-1\Rightarrow x=e^{-1}$.

Είναι $f'(x)>0\Rightarrow \ln x+1>0\Rightarrow \ln x>-1\Rightarrow x>e^{-1}$ και $f'(x)<0\Rightarrow ...\Rightarrow x<e^{-1}$.

Επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,e^{-1}\right]$ (περιλαμβάνουμε και το 0 λόγω του ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο 0) και γνησίως αύξουσα στο $\left[e^{-1},+\infty\right)$.

x	0	e^{-1}	$+\infty$
f'	−	0	+
f	↘		↗

Είναι $f\left(e^{-1}\right)=e^{-1}\ln e^{-1}=-\frac{1}{e}$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $\left[-\frac{1}{e},0\right]\cup\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$.

γ) Για x > 0 είναι $x=e^{\frac{a}{x}}\Leftrightarrow \ln x=\ln e^{\frac{a}{x}}\Leftrightarrow \ln x=\frac{a}{x}\Leftrightarrow x\ln x=a$.

- Αν είναι $a<-\frac{1}{e}$ τότε η εξίσωση δεν έχει καμία ρίζα αφού το α δεν α-νήκει στο σύνολο τιμών της.
- Αν είναι $a=-\frac{1}{e}$ τότε η εξίσωση έχει μία θετική ρίζα.
- Αν είναι $-\frac{1}{e}<a<0$ τότε η εξίσωση έχει μία θετική ρίζα στο $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ και μία θετική ρίζα στο $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$, άρα έχει δύο θετικές ρίζες.
- Αν είναι $a\geq 0$ τότε η εξίσωση έχει μία θετική ρίζα στο $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

δ) Για την f έχουμε:

- η f είναι συνεχής στο [x, x + 1], με x > 0
- η f είναι παραγωγίσιμη στο (x, x + 1)

άρα σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f(x+1)-f(x).$$

Είναι $f''(x)=\frac{1}{x}>0$ για κάθε x>0 άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα για κάθε x>0.

Επομένως $x+1>\xi\Rightarrow f'(x+1)>f'(\xi)\Rightarrow f'(x+1)>f(x+1)-f(x)$.

18. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2008 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2\ln x$, $x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(x)\geq 1$ για κάθε $x>0$. **Μονάδες 6**

β) **Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.** **Μονάδες 6**

γ) **Έστω η συνάρτηση** $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{f(x)}, & x>0\\ k, & x=0\end{cases}$.

i) **Να βρείτε την τιμή του k έτσι ώστε η g να είναι συνεχής.**

Μονάδες 6

ii) **Αν** $k=-\dfrac{1}{2}$**, τότε να αποδείξετε ότι η g έχει μία, τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, e).** **Μονάδες 7**

Λύση

α) Είναι $f'(x)=2x-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2x^2-2}{x}=\dfrac{2(x^2-1)}{x}$.

$f'(x)=0\Rightarrow\dfrac{2(x^2-1)}{2}=0\Rightarrow x=\pm1$.

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$		$+$	
f		↘		↗	

Όμως είναι $x>0$ άρα είναι $x=1$.

Η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 ίσο με $f(1)=1^2-2\ln1=1$.

Άρα για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)\ge f(1)\Rightarrow f(x)\ge1$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-2\dfrac{\ln x}{x}\right)$.

Το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$ είναι απροσδιόριστο της μορφής $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ άρα σύμφωνα με τον **κανόνα του De l' Hospital** είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$.

Άρα τελικά $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty-0=+\infty$. Επομένως η γραφική παράσταση της f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x^2-2\ln x)=0+\infty=+\infty$. Επομένως η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

γ) i) Για να είναι η g συνεχής στο 0 αρκεί $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = g(0) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{f(x)} = k \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x^2 - 2\ln x} = k \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\dfrac{x^2}{\ln x} - 2} = k$.

Όμως $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{\ln x} = 0$ άρα η παραπάνω σχέση δίνει $k = -\dfrac{1}{2}$.

ii) **<u>1ος τρόπος:</u>** Για την συνάρτηση g έχουμε ότι:

- είναι συνεχής στο $[0, e]$
- είναι $g(0) \cdot g(e) = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\ln e}{f(e)} = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{e^2 - 2\ln e} = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{e^2 - 2} < 0$ ($e \approx 2{,}718$

  άρα $e^2 > 2 \Rightarrow e^2 - 2 > 0$).

Σύμφωνα με το **Θεώρημα Bolzano** η g έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, e)$.

<u>2ος τρόπος:</u> Το x = 1 είναι μία προφανής ρίζα της g.

Άρα η g έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, e)$.

19. *Πανελλήνιες 2009 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, $x > -1$, με $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$.

A. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

Μονάδες 8

B. Για $\alpha = e$,

α) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. **Μονάδες 5**

β) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Μονάδες 6

γ) αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(\beta) - 1}{x - 1} + \dfrac{f(\gamma) - 1}{x - 2} = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, 2)$.

Μονάδες 6

Λύση

Α. Είναι $f(0)=1$ άρα ισχύει $f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x>-1$. Επομένως το $f(0)$ είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης.

Για την συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο $(-1,+\infty)$ έχουμε ότι:

- το 0 είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος
- παρουσιάζει ακρότατο στο 0
- είναι παραγωγίσιμη στο 0

Επομένως, σύμφωνα με το **Θεώρημα Fermat** ισχύει $f'(0)=0$.

Είναι $f'(x)=a^x\ln a-\dfrac{1}{x+1}$ άρα $f'(0)=0\Rightarrow a^0\ln a-\dfrac{1}{0+1}=0\Rightarrow \ln a=1\Rightarrow a=e$

Β. α) Για $a=e$ έχουμε $f(x)=e^x-\ln(x+1)$ και $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1}$.

Είναι $f''(x)=e^x+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ άρα η f είναι κυρτή στο $(-1,+\infty)$.

β) Αφού η f είναι κυρτή στο $(-1,+\infty)$ συμπεραίνουμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$. Επομένως

- για $-1<x<0$ είναι $f'(x)<f'(0)\Rightarrow f'(x)<0$ άρα γνησίως φθίνουσα
- για $x>0$ είναι $f'(x)>f'(0)\Rightarrow f'(x)>0$ άρα γνησίως αύξουσα

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα το $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

γ) Έστω η συνάρτηση $g(x)=(f(\beta)-1)(x-2)+(f(\gamma)-1)(x-1)$, $x\in[0,1]$

Είναι $f(x)>1$ για κάθε $x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$ επομένως $f(\beta)>1$ και $f(\gamma)>1$.

Είναι $g(1)=(f(\beta)-1)(1-2)+(f(\gamma)-1)(1-1)=1-f(\beta)<0$ και

$g(2)=(f(\beta)-1)(2-2)+(f(\gamma)-1)(2-1)=f(\gamma)-1>0$

αφού $f(x)\geq 1$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$. Επομένως για τη συνάρτηση g ισχύει:

- είναι συνεχής στο $[1,2]$

- είναι $g(1)\cdot g(2)<0$

Άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0\Rightarrow(f(\beta)-1)(\xi-2)+(f(\gamma)-1)(\xi-1)=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{f(\beta)-1}{\xi-1}+\frac{f(\gamma)-1}{\xi-2}=0$$

Άρα η δοσμένη εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.

20. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2009 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left[(\lambda+1)x^2+x+1\right]-\ln(x+2)$, $x>-1$, όπου λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda\geq-1$.

Α. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ, ώστε να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός. **Μονάδες 5**

Β. Έστω ότι $\lambda=-1$.

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της. **Μονάδες 10**

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. **Μονάδες 6**

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+\alpha^2=0$ έχει μοναδική λύση για κάθε πραγματικό αριθμό α με $\alpha\neq0$. **Μονάδες 4**

Λύση

Α. Είναι $f(x)=\ln\left[\frac{(\lambda+1)x^2+x+1}{x+2}\right]$.

- Αν $\lambda>-1\Rightarrow\lambda+1>0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\lambda+1)x^2+x+1}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}(\lambda+1)x=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

- Αν $\lambda=-1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\lambda+1)x^2+x+1}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ln1=0$.

Επομένως πρέπει να είναι $\lambda=-1$.

Β. α) Είναι $f(x)=\ln\frac{x+1}{x+2}$, $x\in(-1,+\infty)$.

Άρα $f'(x)=\frac{x+2-x-1}{(x+2)^2}=\frac{1}{(x+2)^2}>0\Rightarrow f\uparrow(-1,+\infty)$.

Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, άρα το σύνολο τιμών της είναι το $\left(\lim\limits_{x\to-1^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$ και $\lim\limits_{x\to-1^+}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=0$ άρα $\lim\limits_{x\to-1^+}\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=-\infty$.

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty,0)$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ άρα η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to-1^+}\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=-\infty$ άρα η $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

γ) Είναι $f(x)+a^2=0\Rightarrow f(x)=-a^2<0$ ($a\neq0$).

Γεωμετρικά η εξίσωση παριστάνει τα σημεία τομής της C_f και της $y=-a^2$.

Από το Β.α) ξέρουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty,0)$. Άρα η εξίσωση $f(x)=-a^2$ έχει μία τουλάχιστον λύση για κάθε τιμή του α. **(1)**

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της άρα έχει ένα το πολύ κοινό σημείο με κάθε οριζόντια ευθεία. **(2)**

Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση έχει μοναδική λύση για κάθε πραγματικό αριθμό α με $a\neq0$.

21. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2010 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-2)\ln x+x-3,\ x>0$.

α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. **Μονάδες 5**

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$. **Μονάδες 5**

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες. **Μονάδες 6**

δ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του ερωτήματος (γ) με $x_1<x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιος, ώστε

$$\xi\cdot f'(\xi)-f(\xi)=0$$

και ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 9

Λύση

α) Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[(x-2)\ln x+x-3\right]=-2\cdot(-\infty)-3=+\infty$ άρα η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Θα ψάξουμε για πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-2)\ln x+x-3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{(x-2)\ln x}{x}+1-\dfrac{3}{x}\right]=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x-2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}+1-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}=+\infty-2\cdot0+1-0=+\infty$ άρα η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

β) Είναι $f'(x)=\ln x+\dfrac{x-2}{x}+1$.

Άρα $f'(x)=0\Rightarrow\dfrac{x\ln x+x-2+x}{x}=0\Rightarrow\dfrac{x\ln x+2x-2}{x}\Rightarrow x\ln x+2x-2=0$.

Για $x=1$ είναι $1\cdot\ln1+2-2=0$ άρα το 1 είναι προφανής ρίζα.

Είναι $f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{x-(x-2)}{x^2}=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{x+2}{x^2}>0$ άρα η f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Για $0<x<1$ είναι $f'(x)<f'(1)\Rightarrow f'(x)<0$.

Για $x>1$ είναι $f'(x)>f'(1)\Rightarrow f'(x)>0$.

x	0 $\qquad$ 1	$+\infty$
f'	$-$	$+$
f	↘	↗

Από τον διπλανό πίνακα συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

γ) Είναι $f(1)=-1\ln 1+1-3=-2<0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x-2)\ln x+x-3\right]=-2\cdot(-\infty)-3=+\infty$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ το σύνολο τιμών της f στο $(0,1]$ είναι το $[-2,+\infty)$.

Το σύνολο τιμών της f περιέχει το 0 άρα η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1]$. Όμως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο ίδιο διάστημα άρα η f έχει μία το πολύ ρίζα στο $(0,1]$. Επομένως η f έχει μία ακριβώς ρίζα στο $(0,1]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[(x-2)\ln x+x-3\right]=+\infty+\infty-3=+\infty$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ το σύνολο τιμών της f στο $[1,+\infty)$ είναι το $[-2,+\infty)$.

Το σύνολο τιμών της f περιέχει το 0 άρα η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[1,+\infty)$. Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο ίδιο διάστημα άρα η f έχει μία το πολύ ρίζα στο $[1,+\infty)$. Επομένως η f έχει μία ακριβώς ρίζα στο $[1,+\infty)$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η f έχει δύο ακριβώς ρίζες στο $(0,+\infty)$.

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ με $x>0$. Για την g ξέρουμε ότι:

- είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$
- είναι παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με $g'(x)=\frac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}$

- είναι $g(x_1)=g(x_2)=0$

επομένως σύμφωνα με το **Θεώρημα Rolle** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x_1,x_2)$ ώστε $g'(\xi)=0\Rightarrow \dfrac{f'(\xi)\cdot\xi-f(\xi)}{\xi^2}=0\Rightarrow f'(\xi)\cdot\xi-f(\xi)=0$.

Έστω ότι η $h(x)=f'(x)\cdot x-f(x)=\left(\ln x+\dfrac{x-2}{x}+1\right)\cdot x-\left[(x-2)\ln x+x-3\right]=$

$x\ln x+x-2+x-x\ln x+2\ln x-x+3=2\ln x+x+1$ έχει δύο διαφορετικές ρίζες $\xi_1,\xi_2\in(x_1,x_2)$.

Για την h ξέρουμε ότι:

- είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$
- είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2) με $h'(x)=\dfrac{2}{x}+1$
- είναι $h'(\xi_1)=h'(\xi_2)$

επομένως σύμφωνα με το **Θεώρημα Rolle** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_3\in(\xi_1,\xi_2)\subset(x_1,x_2)\subset(0,+\infty)$ ώστε $h'(\xi_3)=0\Rightarrow \dfrac{2}{\xi_3}+1=0\Rightarrow \xi_3=-2$.

Άτοπο άρα υπάρχει μοναδικό $\xi\in(x_1,x_2)$ ώστε $h(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)\cdot\xi-f(\xi)=0$.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ έχει εξίσωση:

$$y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)\Rightarrow y-f(\xi)=\frac{f(\xi)}{\xi}(x-\xi)\Rightarrow y-\cancel{f(\xi)}=\frac{f(\xi)}{\xi}x-\cancel{f(\xi)}\Rightarrow$$

$y=\dfrac{f(\xi)}{\xi}x$. Άρα η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

22. *Πανελλήνιες 2011 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(0)=f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$\mathbf{e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x)}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\ln\left(e^x-x\right)$, $x\in\mathbb{R}$. **Μονάδες 8**

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 3**

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής. **Μονάδες 7**

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln\left(e^x-x\right)=\text{συν}x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. **Μονάδες 7**

Λύση

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x)\Leftrightarrow$

$e^x\cdot f'(x)+e^x\cdot f''(x)-e^x=f'(x)+xf''(x)\Leftrightarrow\left(e^x-1\right)\cdot f'(x)+\left(e^x-x\right)\cdot f''(x)=e^x\Leftrightarrow$

$\left[\left(e^x-x\right)\cdot f'(x)\right]'=\left(e^x\right)'$.

Επομένως σύμφωνα με τις **συνέπειες του Θ.Μ.Τ.** είναι $\left(e^x-x\right)\cdot f'(x)=e^x+c_1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $c_1\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $e^x\geq x+1>x\Rightarrow$ $e^x-x>0$

Για $x=0$ είναι $\left(e^0-0\right)\cdot f'(0)=e^0+c_1\Rightarrow c_1=-1$

άρα $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}\Rightarrow f'(x)=\left[\ln\left(e^x-x\right)\right]'$. Επομένως σύμφωνα με τις **συνέπειες του Θ.Μ.Τ.** είναι $f(x)=\ln\left(e^x-x\right)+c_2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $c_2\in\mathbb{R}$.

Για $x=0$ είναι $f(0)=\ln\left(e^0-0\right)+c_2\Rightarrow c_2=0$ άρα $f(x)=\ln\left(e^x-x\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Είναι $f'(x)=0\Rightarrow e^x-1=0\Rightarrow x=0$ και $f'(x)>0\Rightarrow x>0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f	↘		↗

Στο $(-\infty,0]$ η f είναι συνεχής και $f'(x)<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Στο $[0,+\infty)$ η f είναι συνεχής και $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Η f παρουσιάζει στο $x_0=0$ ελάχιστο με ελάχιστη τιμή το $f(0)=0$.

γ) $f''(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x-x}\right)'=\dfrac{(e^x-1)'\cdot(e^x-x)-(e^x-1)\cdot(e^x-x)'}{(e^x-x)^2}=\dfrac{2e^x-xe^x-1}{(e^x-x)^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Θέτουμε $h(x)=2e^x-xe^x-1,\ x\in\mathbb{R}$. Άρα $h'(x)=e^x(1-x)$.

Είναι $h'(x)=0\Rightarrow x=1$ και $h'(x)>0\Rightarrow x<1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
h'	+		−
h	-1 ↗	$e-1$	↘ $-\infty$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^x-xe^x-1)=-1$ γιατί

$\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^x}\underset{DLH}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{e^{-x}}\right)=0$.

Ακόμη $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2e^x-xe^x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(2-x-\dfrac{1}{e^x}\right)\right]=-\infty$.

Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1=(-\infty,1]$ άρα $h(\Delta_1)=(-1,e-1]$

Το 0 ανήκει στο $h(\Delta_1)$ άρα η h έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο Δ_1. Ακόμη η h είναι γνησίως μονότονη στο Δ_1 άρα έχει μία το πολύ ρίζα σ' αυτό (έστω x_1).

Επομένως η h έχει μία ακριβώς ρίζα στο Δ_1.

Ομοίως η h έχει μία ακριβώς ρίζα, έστω x_2 στο $\Delta_2=[1,+\infty)$ με $h(\Delta_2)=(-\infty,e-1]$.

Για $x<x_1<1$ η h είναι γνησίως αύξουσα άρα $h(x)<h(x_1)<0$.

Για $x_1<x<1$ η h είναι γνησίως αύξουσα άρα $h(x_1)<h(x)\Rightarrow h(x)>0$.

Για $1<x<x_2$ η h είναι γνησίως φθίνουσα άρα $h(x)>h(x_2)>0$.

Για $x>x_2$ η h είναι γνησίως φθίνουσα άρα $h(x)<h(x_2)<0$.

Έτσι προκύπτει ο διπλανός πίνακας.

Άρα η f έχει δύο ακριβώς σημεία καμπής.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
f''	−		+	−
f	$\frown$		$\smile$	$\frown$

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\ln(e^x-x)-\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $\varphi(0)=-1$ και $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln\left(e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\right)-\cancel{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}}^{\,0}>0$.

Πράγματι $e^x\geq x+1\Rightarrow e^x-x\geq 1$ άρα $e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\geq 1\overset{\ln x:\uparrow}{\Rightarrow}\ln\left(e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\right)\geq \ln 1=0$.

Επομένως για τη συνάρτηση f ξέρουμε ότι:

- είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών
- $\varphi(0)\cdot\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$

άρα σύμφωνα με το **Θεώρημα Bolzano** η εξίσωση $\varphi(x)=0$, άρα και η δοσμένη, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\varphi'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}+\eta\mu x>0$ αφού και οι δύο όροι είναι θετικοί στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και επομένως έχει μία το πολύ ρίζα σ' αυτό.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η φ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Παρατήρηση: Η σχέση $e^x\geq x+1$ πρέπει να αποδειχθεί γιατί δεν αναφέρεται στην θεωρία ή σε λυμένη εφαρμογή του σχολικού βιβλίου. Υπάρχουν πολλοί τρόποι απόδειξης. Ένας από αυτούς είναι ο παρακάτω.

Έστω η $f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $f'(x)=e^x$ και $f''(x)=e^x>0$ άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο $(0,1)$ είναι η $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow$

$\Rightarrow y = x + 1$. Όμως η f είναι κυρτή άρα η C_f βρίσκεται «πάνω» από κάθε εφαπτομένη της, εκτός από το σημείο επαφής τους. Άρα $e^x \geq x + 1$.

23. *Πανελλαδικές 2012 (Επαναληπτικές) – 3ο θέμα*

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$xf(x) + 1 = e^x \text{, για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$. **Μονάδες 6**

β) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της. **Μονάδες 6**

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$. Στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2f(x) = x + 2,\ x \in \mathbb{R}$$

έχει ακριβώς μία λύση. **Μονάδες 8**

δ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[x \cdot (\ell n x) \cdot \ell n (f(x)) \right]$ **Μονάδες 5**

Λύση

α) Για $x \neq 0$ είναι $xf(x) + 1 = e^x \Rightarrow xf(x) = e^x - 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$.

Άρα $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(e^x - 1)'}{x'} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x}{1} = 1$.

Η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$, άρα και στο 0. Επομένως $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

β) Για $x \neq 0$ είναι $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} \Rightarrow f'(x) = \left(\dfrac{e^x - 1}{x} \right)' = \dfrac{e^x \cdot x - (e^x - 1)}{x^2} =$

$\dfrac{e^x \cdot x - e^x + 1}{x^2}$.

Έστω η συνάρτηση $g(x) = e^x \cdot x - e^x + 1$ για $x \in \mathbb{R}$. Έτσι είναι $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

Είναι $g'(x) = e^x \cdot x + e^x - e^x = e^x \cdot x$. Προφανώς ισχύει $g'(0) = 0$.

Για $x > 0$ είναι $g'(x) > 0$ και για $x < 0$ είναι $g'(x) < 0$.

Από τον διπλανό πίνακα συμπεραίνουμε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$. Άρα είναι $g(x) \geq g(0) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$). Επομένως

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$		$\nearrow$

- για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$.
- για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Ακόμη η f είναι συνεχής στο 0 άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επομένως η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα το σύνολο τιμών της είναι το (A, B) όπου

- $A = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - 1}{x} = \dfrac{0 - 1}{-\infty} = 0$ και
- $B = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{\text{D.L.H.}}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(e^x - 1)'}{x'} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{1} = +\infty$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $(0, +\infty)$.

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(0, f(0))$ είναι της μορφής

$\varepsilon: y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.

Είναι $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{e^x - 1 - x}{x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{D.L.H.}}{=}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{D.L.H.}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Άρα $\varepsilon: y-1=\frac{1}{2}(x-0)\Rightarrow y-1=\frac{1}{2}x\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+1$.

Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ άρα η γραφική της παράσταση βρίσκεται «πάνω» από την εξίσωση της εφαπτομένης της σε οποιοδήποτε σημείο της C_f.

Δηλαδή ισχύει $f(x)\geq\frac{1}{2}x+1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για το σημείο επαφής της C_f με την εφαπτομένη.

Άρα η $f(x)=\frac{1}{2}x+1\Leftrightarrow 2f(x)=x+2$ έχει ακριβώς μία λύση (την $x=0$).

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot \ell n x)\overset{0\cdot(-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\ell n x}{\frac{1}{x}}\right)\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{\text{D.L.H.}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\ell n x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=$

$=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{x}=-\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$. Για να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ell n(f(x))\right)$ θέτουμε $u=f(x)$. $\lim\limits_{x\to 0^+}u=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ell n(f(x))\right)=\lim\limits_{u\to 1}\left(\ell n(u)\right)=0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x\cdot(\ell n x)\cdot \ell n(f(x))\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x\cdot(\ell n x)\right]\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ell n(f(x))\right]=0\cdot 0=0$

4. Ολοκληρωτικός λογισμός

1. Αποδείξεις

1. *Πανελλήνιες 2002 – Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2008 – Πανελλαδικές 2013*

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$ τότε να δείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

2. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2003 – Πανελλήνιες 2010*

Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι:

α) όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και

β) κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

2. Ορισμοί

1. ***Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2006 – 2011***

Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

3. Ερωτήσεις Σωστό – Λάθος

1. Πανελλαδικές 2002

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε

$$\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx$$

Λάθος. Πρέπει η f να έχει συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$.

2. Πανελλαδικές 2003

Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει

$$\int f'(x)dx = f(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$$

Σωστό.

3. Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2003

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει:

$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$.

Σωστό.

4. Πανελλαδικές 2004

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α, β], τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha)$.

Σωστό.

5. Πανελλαδικές 2005

Αν η f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε ισχύει $\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = f(x) - f(\alpha)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Λάθος. Με τις παραπάνω προϋποθέσεις ισχύει $\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = f(x)$.

6. *Πανελλαδικές 2006*

Ισχύει η σχέση $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$, όπου f′, g′ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β].

Σωστό.

7. *Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2005*

Αν η συνάρτηση f έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ και $\lambda \in \mathbb{R}^*$, τότε ισχύει $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$.

Σωστό.

8. *Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2006*

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α, β], τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$.

Λάθος. Ο τύπος που ισχύει είναι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

9. *Πανελλαδικές 2007*

Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α, β] και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$.

Λάθος. Έπρεπε η συνάρτηση f να μην είναι παντού μηδέν στο διάστημα [α, β].

10. *Πανελλαδικές 2007*

Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε $\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$ με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

Σωστό.

11. Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2007

Αν f, g, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [α, β], τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g'(x)dx$$

Λάθος. Ο τύπος που ισχύει είναι ο τύπος της παραγοντικής ολοκλήρωσης:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$$

12. Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2007

Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε $\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Σωστό.

13. Πανελλαδικές 2008

Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

Σωστό.

14. Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2008

Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x′x μείον των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x′x.

Σωστό.

15. Πανελλαδικές 2009

Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζε-

ται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ και τον άξονα x'x είναι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta f(x)dx$

Λάθος. Είναι $E(\Omega)=-\int_\alpha^\beta f(x)dx$

16. Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2009

Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει $\int f'(x)dx=f(x)+c,\ x\in\Delta$ όπου c είναι μία πραγματική σταθερά.

Σωστό.

17. Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2010

Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\ge 0$.

Σωστό.

18. Πανελλαδικές 2012

$\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g'(x)dx=\left[f(x)\cdot g(x)\right]_\alpha^\beta+\int_\alpha^\beta f'(x)\cdot g(x)dx$, όπου f',g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$.

Λάθος. Είναι $\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g'(x)dx=\left[f(x)\cdot g(x)\right]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta f'(x)\cdot g(x)dx$.

19. Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2012

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\alpha)-G(\beta)$.

Λάθος. Είναι $\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$.

4. Ασκήσεις

1. *Πανελλήνιες 2000 – 4ο θέμα*

Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά. Έστω f(t) η συγκέντρωση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά από χρόνο t από τη χορήγησή του, όπου $t \geq 0$.

Αν ο ρυθμός μεταβολής της f(t) είναι $\frac{8}{t+1} - 2$

α) Να βρείτε τη συνάρτηση f(t). **Μονάδες 6**

β) Σε ποια χρονική στιγμή t, μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, η συγκέντρωσή του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη; **Μονάδες 6**

γ) Να δείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή $t = 8$ υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν τη χρονική στιγμή $t = 10$ η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί. (Δίνεται $\ln 11 \cong 2,4$). **Μονάδες 10**

Λύση

α) Είναι $f'(t) = \frac{8}{t+1} - 2$ άρα $f(t) = \int \left(\frac{8}{t+1} - 2 \right) dt = 8\ln|t+1| - 2t + c$ για $t \geq 0$.

Είναι $t \geq 0 \Rightarrow t+1 > 0$ άρα $f(t) = 8\ln(t+1) - 2t + c$.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς είναι 0 άρα $f(0) = 0$.

Άρα $f(0) = 0 \Rightarrow 8\ln(0+1) - 2 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow 8\ln 1 + c = 0 \Rightarrow c = 0$.

Επομένως είναι $f(t) = 8\ln(t+1) - 2t$.

β) Είναι $f'(t) = 0 \Rightarrow \frac{8}{t+1} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{8}{t+1} = 2 \Rightarrow 4 = t+1 \Rightarrow t = 3$.

$f'(t) > 0 \Rightarrow \frac{8}{t+1} - 2 > 0 \Rightarrow \frac{8}{t+1} > 2 \Rightarrow 4 > t+1 \Rightarrow t < 3$ και

$f'(t) < 0 \Rightarrow \frac{8}{t+1} - 2 < 0 \Rightarrow \frac{8}{t+1} < 2 \Rightarrow 4 < t+1 \Rightarrow t > 3$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η συγκέντρωση του φάρμακου στον οργανισμό γίνεται μέγιστο όταν $t=3$.

x	0	3	$+\infty$
f'	$+$	$-$	
f	$\nearrow$	$\searrow$	

γ) Είναι $f(8)=8\ln 9-16$. Είναι e = 2,718 και e^2 = 7,387. Είναι 9 > e^2 άρα ln9 > $\ln e^2=2\ln e=2$. Επομένως $8\ln 9>16 \Rightarrow 8\ln 9-16>0 \Rightarrow f(8)>0$.

Άρα για t = 8 υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό.

Είναι $f(10)=8\ln 11-20=8\cdot 2,4-20=19,6-20=-0,4$.

Η f είναι φθίνουσα στο $[3,+\infty)$ άρα λίγο πριν από το $t=10$ η επίδραση του φαρμάκου έχει μηδενιστεί.

2. *Πανελλήνιες 2001 – 2ο θέμα*

Έστω f μία πραγματική συνάρτηση με τύπο $f(x)=\begin{cases} ax^2, & x\le 3 \\ \dfrac{1-e^{x-3}}{x-3}, & x>3 \end{cases}$.

α) Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $a=-\dfrac{1}{9}$. **Μονάδες 9**

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(4,f(4))$. **Μονάδες 7**

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$. **Μονάδες 9**

Λύση

α) Η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ άρα και στο x_o = 3.

Επομένως ισχύει $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3)$.

Είναι $f(3)=a\cdot 3^2=9a$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} ax^2=9a$ και

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{1-e^{x-3}}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\left(1-e^{x-3}\right)'}{(x-3)'}=\lim_{x\to 3^+}\frac{-e^{x-3}}{1}=-1.$$

Επομένως είναι $9\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -\dfrac{1}{9}$.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $(4, f(4))$ είναι $y - f(4) = f'(4)(x-4)$.

Είναι $f'(x) = \left(\dfrac{1-e^{x-3}}{x-3}\right)' = \dfrac{-e^{x-3}(x-3) - (1-e^{x-3})}{(x-3)^2} = \dfrac{-xe^{x-3} + 4e^{x-3} - 1}{(x-3)^2}$ άρα

$f'(4) = \dfrac{-4\cdot e^{4-3} + 4e^{4-3} - 1}{(4-3)^2} = \dfrac{-4e + 4e - 1}{1^2} = -1$ και $f(4) = \dfrac{1-e^{4-3}}{4-3} = 1 - e$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y - (1-e) = (-1)(x-4)$

$\Rightarrow y = -x + 4 + 1 - e \Rightarrow y = -x + 5 - e$.

γ) Για $x \in [1,2]$ ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x) = \alpha x^2$ και για $\alpha = -\dfrac{1}{9}$ γίνεται $f(x) = -\dfrac{1}{9}x^2$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με $E = \int_1^2 |f(x)|dx$.

Είναι $f(x) < 0$ άρα $E = -\int_1^2 f(x)dx = -\int_1^2 -\dfrac{1}{9}x^2 dx = \dfrac{1}{9}\int_1^2 x^2 dx = \dfrac{1}{9}\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_1^2$

$= \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{2^3}{3} - \dfrac{1^3}{3}\right) = \dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{7}{3} = \dfrac{7}{27}$ τ.μ.

3. *Πανελλήνιες 2001 – 4ο θέμα*

Έστω μία πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

i) $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) $f(x) = 1 - 2x^2 \cdot \int_0^1 tf^2(xt)dt$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο:

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x) = -2x\cdot f^2(x)$. **Μονάδες 10**

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή. **Μονάδες 4**

γ) Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

Μονάδες 4

δ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot f(x)\cdot \eta\mu 2x\right)$. **Μονάδες 7**

Λύση

α) Η σχέση ii) δίνει $f(x)=1-2\int_0^1 xtf^2(xt)xdt$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Στην παραπάνω σχέση θέτουμε u = xt από όπου προκύπτει ότι $du=xdt$. Επίσης για t = 0 είναι u = 0 και για t = 1 είναι u = x. Είναι:

$f(x)=1-2\int_0^x uf^2(u)du$ άρα $f'(x)=-2xf^2(x)$.

β) Η συνάρτηση g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $g'(x)=-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}-2x=-\dfrac{-2xf^2(x)}{f^2(x)}-2x=0$ άρα $g(x)=c$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Για x = 0 η σχέση ii) δίνει $f(0)=1$.

Από τη σχέση $g(x)=c$ έχουμε ότι $\dfrac{1}{f(x)}-x^2=c$. Για x = 0 η προηγούμενη σχέση δίνει c = 1 άρα $\dfrac{1}{f(x)}-x^2=1\Rightarrow\dfrac{1}{f(x)}=1+x^2\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot f(x)\cdot \eta\mu 2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{1+x^2}\cdot\eta\mu 2x\right)$.

Επίσης $\left|\dfrac{x}{1+x^2}\cdot\eta\mu 2x\right|=\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right|\cdot\left|\eta\mu 2x\right|\le\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right|$ άρα

$-\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right|\le\dfrac{x}{1+x^2}\cdot\eta\mu 2x\le\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right|$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}-\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right|=\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right|=0$ άρα σύμφωνα με το **κριτήριο παρεμβολής** είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{1+x^2}\cdot\eta\mu 2x\right)=0$.

4. *Πανελλήνιες 2002 – 4ο θέμα*

α) Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$.

Να αποδείξετε ότι αν $h(x)>g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε και

$$\int_\alpha^\beta h(x)dx>\int_\alpha^\beta g(x)dx$$ **Μονάδες 2**

β) Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f που ικανοποιεί τις σχέσεις: $f(x)-e^{-f(x)}=x-1$, $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=0$

i) Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f. **Μονάδες 5**

ii) Να δείξετε ότι $\frac{x}{2}<f(x)<xf'(x)$ για κάθε $x>0$. **Μονάδες 12**

iii) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x=0$, $x=1$ και τον άξονα x′x, να δείξετε ότι: $\frac{1}{4}<E<\frac{1}{2}f(1)$. **Μονάδες 6**

Λύση

α) Έστω η συνάρτηση F με $F(x)=h(x)-g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Η F είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών και $F(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα $\int_\alpha^\beta F(x)dx>0\Rightarrow\int_\alpha^\beta(h(x)-g(x))dx>0\Rightarrow\int_\alpha^\beta h(x)dx-\int_\alpha^\beta g(x)dx>0$

$\Rightarrow\int_\alpha^\beta h(x)dx>\int_\alpha^\beta g(x)dx$.

β) i) Παραγωγίζουμε κατά μέλη την $f(x)-e^{-f(x)}=x-1$ και έχουμε:

$$f'(x)+e^{-f(x)}\cdot f'(x)=1\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+e^{-f(x)}}.$$

ii) Η f είναι συνεχής στο [0, x] και παραγωγίσιμη στο (0, x).

Επομένως σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}.$$

Είναι $f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{-f(x)}}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επίσης $f''(x)=-\dfrac{-e^{-f(x)}\cdot f'(x)}{\left(1+e^{-f(x)}\right)^2}>0$

άρα η f′ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,+\infty)$ άρα και στο [0, x].

Επομένως $f'(0)<f'(\xi)<f'(x)\Rightarrow f'(0)<\dfrac{f(x)}{x}<f'(x)$.

Είναι $f'(0)=\dfrac{1}{1+e^{-f(0)}}=\dfrac{1}{1+e^{0}}=\dfrac{1}{2}$ και x > 0 άρα η παραπάνω σχέση δίνει

$\dfrac{x}{2}<f(x)<xf'(x)$.

iii) Είναι $E=\int_0^1 f(x)dx$. Από τη σχέση $f(x)>\dfrac{x}{2}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε ότι

$\int_0^1 f(x)dx>\int_0^1\dfrac{x}{2}dx=\left[\dfrac{x^2}{4}\right]_0^1=\dfrac{1}{4}$.

Από τη σχέση $f(x)<xf'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε ότι

$\int_0^1 f(x)dx<\int_0^1 xf'(x)dx\Rightarrow E<\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 x'f(x)dx\Rightarrow E<f(1)-\int_0^1 f(x)dx$

$\Rightarrow E<f(1)-E\Rightarrow 2E<f(1)\Rightarrow E<\dfrac{1}{2}f(1)$.

5. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2002 – 2ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}. **Μονάδες 10**

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν. **Μονάδες 5**

γ) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x)dx$. **Μονάδες 10**

Λύση

α) Είναι $f'(x)=\dfrac{e^x\left(e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{\left(e^x\right)^2+e^x-\left(e^x\right)^2+e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}>0$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επομένως είναι 1–1 άρα αντιστρέφεται. Για να βρούμε την αντίστροφη της f θέτουμε $y=f(x)$ και λύνουμε ως προς x.

$$y=\frac{e^x-1}{e^x+1}\Rightarrow y\cdot e^x+y=e^x-1\Rightarrow e^x(y-1)=-1-y\Rightarrow e^x=\frac{-1-y}{y-1}\Rightarrow$$

$$e^x=\frac{1+y}{1-y}\overset{(1)}{\Rightarrow}x=\ln\frac{1\_y}{1-y}.$$

Για να ισχύει η (1) πρέπει $\begin{cases}\dfrac{1+y}{1-y}>0\\ 1-y\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1+y)(1-y)>0\\ y\neq 1\end{cases}\Rightarrow y\in(-1,1)$.

Άρα $f^{-1}(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ με $x\in(-1,1)$.

β) Είναι $f^{-1}(x)=0\Rightarrow\ln\dfrac{1+x}{1-x}=0\Rightarrow\dfrac{1+x}{1-x}=1\Rightarrow 1+x=1-x\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0$

δεκτή αφού $0\in(-1,1)$.

γ) Είναι $f^{-1}(-x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)=-f^{-1}(x)$ άρα η f^{-1} είναι περιττή.

Είναι $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f^{-1}(x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}f^{-1}(x)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}f^{-1}(x)dx$.

Στο $\int_{-\frac{1}{2}}^{0}f^{-1}(x)dx$ θέτω $t=-x$.

Άρα $\int_{-\frac{1}{2}}^{0}f^{-1}(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{0}f^{-1}(-t)d(-t)=\int_{0}^{\frac{1}{2}}f^{-1}(-t)dt\overset{f\text{ περιττή}}{=}-\int_{0}^{\frac{1}{2}}f^{-1}(t)dt$. Επομένως

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f^{-1}(x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}f^{-1}(x)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}f^{-1}(x)dx=-\int_{0}^{\frac{1}{2}}f^{-1}(x)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}f^{-1}(x)dx=0$$

6. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2002 – 4ο θέμα*

Έστω η συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με δεύτερη συνεχή παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f''(x)f(x)+\left(f'(x)\right)^2=f(x)f'(x),\ x\in\mathbb{R}\ \text{ και }\ f(0)=2f'(0)=1$$

α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f. **Μονάδες 12**

β) Αν g συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα [0, 1], να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$2x-\int_0^x \frac{g(t)}{1+f^2(t)}dt=1$$

έχει μία μοναδική λύση στο διάστημα [0, 1]. **Μονάδες 13**

Λύση

α) Η σχέση δίνει $\left(f(x)\cdot f'(x)\right)'=\frac{1}{2}\left[f^2(x)\right]'\Leftrightarrow\left(2f(x)\cdot f'(x)\right)'=\left[f^2(x)\right]'$ άρα

$2f(x)\cdot f'(x)=f^2(x)+c$.

Για x = 0 έχουμε $2f(0)\cdot f'(0)=f^2(0)+c\Rightarrow 1=1+c\Rightarrow c=0$.

Άρα είναι $f^2(x)=2f(x)\cdot f'(x)=\left[f^2(x)\right]'$. Επομένως είναι $f^2(x)=ce^x$.

Για x = 0 η σχέση μας δίνει $f^2(0)=ce^0\Rightarrow 1=c$. Άρα είναι $f^2(x)=e^x$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και είναι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ($f^2(x)=e^x\neq 0$).

Άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο και επειδή είναι $f(0)=1>0$ συμπεραίνουμε ότι

$f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως είναι $f^2(x)=e^x\Rightarrow f(x)=e^{\frac{x}{2}}$.

β) Έστω η συνάρτηση $h(x)=2x-\int_0^x \frac{g(t)}{1+f^2(t)}dt-1$ με $x\in[0,1]$.

Είναι $h(0)=-1<0$.

Είναι $h(1)=2\cdot 1-\int_0^1 \frac{g(t)}{1+f^2(t)}dt-1=1-\int_0^1 \frac{g(t)}{1+f^2(t)}dt$.

Η $g(t)$ έχει σύνολο τιμών το [0, 1] άρα ισχύει $0\leq g(t)\leq 1$ για κάθε $t\in[0,1]$.

Κατασκευάζουμε την παράσταση που βρίσκεται μέσα στο ολοκλήρωμα.

Είναι $1 \le e^t \le e \Rightarrow 2 \le 1+e^t \le 1+e \Rightarrow \frac{1}{1+e} \le \frac{1}{1+e^t} \le \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \le \frac{g(t)}{1+e^t} \le \frac{1}{2}$.

Άρα είναι $\frac{1}{2} - \frac{g(t)}{1+e^t} \ge 0 \Rightarrow \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{g(t)}{1+e^t}\right)dt \ge 0 \Rightarrow \int_0^1 \left(-\frac{g(t)}{1+e^t}\right)dt - \frac{1}{2}\int_0^1 dt \ge 0$

$\Rightarrow 1 - \int_0^1 \left(\frac{g(t)}{1+e^t}\right)dt \ge 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow h(1) \ge \frac{1}{2} > 0$.

Για την συνάρτηση h έχουμε ότι:

- Είναι συνεχής στο [0, 1].
- Είναι $h(0) \cdot h(1) < 0$.

Επομένως σύμφωνα με το **Θεώρημα Bolzano** υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$ στο (0, 1). **(1)**

Στο [0, 1] είναι $h'(x) = 2 - \frac{g(x)}{1+f^2(x)} = 2 - \frac{g(x)}{1+e^x} = \frac{2+2e^x - g(x)}{1+e^x}$.

Είναι $0 \le g(x) \le 1 \Rightarrow -1 \le -g(x) \le 0$ και

$0 \le x \le 1 \Rightarrow e^0 \le e^x \le e^1 \Rightarrow 4 \le 2+2e^x \le 2+2e$.

Άρα $2+2e^x - g(x) \ge 4-1 \Rightarrow 2+2e^x - g(x) \ge 3$. Είναι επίσης $1+e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα είναι $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Επομένως η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο [0, 1]. **(2)**

Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $h(x) = 0$, άρα και η $2x - \int_0^x \frac{g(t)}{1+f^2(t)}dt - 1 = 0$ έχει μία μοναδική λύση στο [0, 1].

7. *Πανελλήνιες 2003– 3ο θέμα*

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση. Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 6**

γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0, 0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}. **Μονάδες 5**

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα των x και την ευθεία x = 3.
Μονάδες 8

Λύση

α) Η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη με $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f''(x) = 20x^3 + 6x = 2x(10x^2 + 3)$ άρα είναι $f''(x) < 0$ για κάθε $x < 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

Επομένως η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο $[0, +\infty)$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα είναι γνησίως μονότονη. Επομένως είναι 1 – 1 άρα έχει αντίστροφη συνάρτηση.

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα άρα ισχύει

$f(e^x) \geq f(1+x) \Leftrightarrow e^x \geq 1 + x \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω η συνάρτηση g με $g(x) = e^x - x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$.

Είναι $g'(x) = e^x - 1$ και

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g’	–		+
g	↘		↗

$g'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$.

Άρα ισχύει $g(x) \geq g(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δηλαδή $e^x - x - 1 \geq 0$.

γ) Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ο άξονας συμμετρίας των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι η ευθεία y = x.

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.

Είναι $f(0)=0$ και $f'(0)=1$ άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η y = x.

δ) Είναι $f^{-1}(x)=0 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right)=f(0) \Leftrightarrow x=0$.

Η ρίζα x = 0 είναι μοναδική αφού η f^{-1} είναι αντιστρέψιμη άρα 1 – 1.

Άρα η f^{-1} διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[0,+\infty)$ άρα και στο $[0,3]$.

Είναι $f(1)=3$ άρα $f^{-1}(3)=1$. Επομένως είναι $f^{-1}(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\int_0^3 f^{-1}(x)dx$.

Θέτω $x=f(u)$. Είναι $f(0)=0$ άρα για x = 0 είναι u = 0.

Είναι $f(1)=3$ άρα για x = 3 είναι u = 1.

Το εμβαδόν είναι $E=\int_0^1 f^{-1}\left(f(u)\right)df(u)=\int_0^1 u\cdot f'(u)du=\left[uf(u)\right]_0^1-\int_0^1 u'\cdot f(u)du$

$$=f(1)-\int_0^1 f(u)du=3-\int_0^1\left(u^5+u^3+u\right)du=3-\left[\frac{u^6}{6}+\frac{u^4}{4}+\frac{u^2}{2}\right]_0^1=3-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

$$3-\frac{11}{12}=\frac{25}{12}.$$

8. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2003 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. **Μονάδες 5**

β) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, όταν το x τείνει στο $-\infty$. **Μονάδες 6**

γ) Να αποδείξετε ότι $f'(x)\sqrt{x^2+1}+f(x)=0$. **Μονάδες 6**

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$. **Μονάδες 8**

Λύση

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι όλο το $\mathbb{R}$ άρα έχει νόημα ο υπολογισμός του ορίου στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=0$$

β) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}{x}=-2$ άρα λ = –2.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x+2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=0.$$

Επομένως η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, όταν το x τείνει στο $-\infty$ είναι η y = 2x.

γ) Είναι $f'(x)=\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1$ άρα

$$f'(x)\sqrt{x^2+1}+f(x)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}-x$$

$$=x-\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}-x=0.$$

δ) Από τη σχέση του (γ) ερωτήματος έχουμε ότι

$$f'(x)\sqrt{x^2+1}+f(x)=0\Rightarrow f'(x)\sqrt{x^2+1}=-f(x). \qquad \textbf{(1)}$$

Είναι $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x>0$ αφού $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}\ge|x|\ge x$.

Επομένως η σχέση (1) δίνει $\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Άρα είναι $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=-\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}dx=-\left[\ln(f(x))\right]_0^1=\ln f(0)-\ln f(1)$

$$=\ln1-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)=\ln\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\ln\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}=\ln\left(\sqrt{2}+1\right).$$

9. *Πανελλήνιες 2004– 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^x\cdot f(x)$ όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(0)=f\left(\frac{3}{2}\right)=0$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-f(\xi)$. **Μονάδες 8**

β) Εάν $f(x)=2x^3-3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I(\alpha)=\int_\alpha^0 g(x)dx,\ \alpha\in\mathbb{R}$$ **Μονάδες 8**

γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} I(\alpha)$. **Μονάδες 9**

Λύση

α) Η g είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{3}{2}\right]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ με $g'(x)=e^x\cdot f(x)+e^x\cdot f'(x)=e^x\left(f(x)+f'(x)\right)$.

Ακόμη είναι $g(0)=0$ και $g\left(\frac{3}{2}\right)=0$.

Επομένως σύμφωνα με το **Θεώρημα Rolle** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$ ώστε $g'(\xi)=0$. Άρα $e^\xi\left(f(\xi)+f'(\xi)\right)=0\Rightarrow f(\xi)+f'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=-f(\xi)$.

β) $I(\alpha)=\int_\alpha^0 g(x)dx=\int_\alpha^0\left(2x^2-3x\right)e^x dx=$ (ολοκλήρωση κατά παράγοντες)

$=\int_\alpha^0\left(2x^2-3x\right)\left(e^x\right)'dx=\left[\left(2x^2-3x\right)e^x\right]_\alpha^0-\int_\alpha^0\left(2x^2-3x\right)'e^x dx$

$=-\left(2\alpha^2-3\alpha\right)e^\alpha-\int_\alpha^0(4x-3)e^x dx=-\left(2\alpha^2-3\alpha\right)e^\alpha-\int_\alpha^0(4x-3)\left(e^x\right)'dx$

$=-\left(2\alpha^2-3\alpha\right)e^\alpha-\left(\left[(4x-3)e^x\right]_\alpha^0-4\int_\alpha^0 e^x dx\right)$

$=-\left(2\alpha^2-3\alpha\right)e^\alpha+3+(4\alpha-3)e^\alpha+4\left(1-e^\alpha\right)=e^\alpha\left(-2\alpha^2+3\alpha+4\alpha-3-4\right)+7$

$= e^{\alpha}\left(-2\alpha^2+7\alpha-7\right)+7$

γ) $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} I(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to-\infty}\left[e^{\alpha}\left(-2\alpha^2+7\alpha-7\right)\right]+7$

Είναι $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} e^{\alpha}=0$ και $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}\left(-2\alpha^2+7\alpha-7\right)=-\infty$ άρα το όριο είναι απροσδιόριστη μορφή.

Εφαρμόζουμε τον **κανόνα De L' Hospital**. Είναι:

$$\lim_{\alpha\to-\infty}\left[e^{\alpha}\left(-2\alpha^2+7\alpha-7\right)\right]+7=\lim_{\alpha\to-\infty}\frac{-2\alpha^2+7\alpha-7}{e^{-\alpha}}+7=\lim_{\alpha\to-\infty}\frac{\left(-2\alpha^2+7\alpha-7\right)'}{\left(e^{-\alpha}\right)'}+7$$

$$=\lim_{\alpha\to-\infty}\frac{-4\alpha+7}{-e^{-\alpha}}+7\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=}\lim_{\alpha\to-\infty}\frac{\left(-4\alpha+7\right)'}{\left(-e^{-\alpha}\right)'}+7=\lim_{\alpha\to-\infty}\frac{-4}{e^{-\alpha}}+7=0+7=7.$$

10. *Πανελλήνιες 2004– 4ο θέμα*

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f(1)=1$. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει:

$$g(x)=\int_1^{x^3}|z|\cdot f(t)\,dt-3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1)\geq 0$$

όπου $z=\alpha+\beta i\in\mathbb{C}$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$, τότε:

α) **Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε την g'.** **Μονάδες 5**

β) **Να αποδείξετε ότι $|z|=\left|z+\frac{1}{z}\right|$.** **Μονάδες 8**

γ) **Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος β), να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}\left(z^2\right)=-\frac{1}{2}$.** **Μονάδες 6**

δ) **Αν επιπλέον $f(2)=\alpha>0$, $f(3)=\beta$ και $\alpha>\beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.** **Μονάδες 6**

Λύση

α) Η $|z|f(t)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα από το **Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού** προκύπτει ότι η $\int_1^x |z|\cdot f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Επίσης η x^3 είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και η $\int_1^{x^3} |z|\cdot f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση της $\int_1^x |z|\cdot f(t)dt$ και της x^3.

Ακόμη η $3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως γινόμενο του μέτρου του μιγαδικού (που είναι πραγματικός αριθμός) επί τη συνεχή συνάρτηση x – 1.

Επομένως η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=|z|\cdot f\left(x^3\right)\cdot 3x^2-3\left|z+\frac{1}{z}\right|$.

β) Είναι $g(1)=0$ άρα $g(x)\geq 0=g(1)$.

Το 1 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού, η g είναι παραγωγίσιμη στο 1 και παρουσιάζει στο 1 ακρότατο άρα σύμφωνα με το **Θεώρημα Fermat** είναι $g'(1)=0$.

Επομένως $|z|\cdot f\left(1^3\right)\cdot 3\cdot 1^2-3\left|z+\frac{1}{z}\right|=0 \Rightarrow 3|z|\cdot f(1)-3\left|z+\frac{1}{z}\right|=0$

$\Rightarrow 3|z|\cdot 1-3\left|z+\frac{1}{z}\right|=0 \Rightarrow |z|=\left|z+\frac{1}{z}\right|$.

γ) Είναι $|z|=\left|z+\frac{1}{z}\right| \Leftrightarrow |z|=\left|\frac{z^2+1}{z}\right| \Leftrightarrow |z|=\frac{\left|z^2+1\right|}{|z|} \Leftrightarrow |z|^2=\left|z^2+1\right| \Leftrightarrow \left|z^2\right|=\left|z^2+1\right|$

$\Leftrightarrow \left|z^2-0\right|=\left|z^2-(-1)\right|$.

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι το z^2 ανήκει στη μεσοκάθετο του ΟΑ, όπου Ο(0, 0) και Α(–1, 0), δηλαδή στην ευθεία $x=-\frac{1}{2}$. Άρα $\operatorname{Re}\left(z^2\right)=-\frac{1}{2}$.

δ) Είναι $z^2=(\alpha+\beta i)^2=\alpha^2+2\alpha\beta i-\beta^2=\left(\alpha^2-\beta^2\right)+2\alpha\beta i$.

Άρα $\text{Re}\left(z^2\right)=-\frac{1}{2}\Rightarrow \alpha^2-\beta^2=-\frac{1}{2}\Rightarrow (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$ άρα τα α + β και α − β είναι ετερόσημα.

Είναι α > β άρα α − β > 0. Επομένως είναι α + β < 0 δηλαδή α < −β.

Είναι $-\beta>\alpha>0\Rightarrow -\beta>0\Rightarrow \beta<0$. Άρα $\alpha\cdot\beta<0$.

Επομένως για τη συνάρτηση f που είναι συνεχής στο [2, 3] ισχύει $f(2)\cdot f(3)=\alpha\beta<0$.

Σύμφωνα με το **Θεώρημα Bolzano** υπάρχει $x_o\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=0$.

11. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2004 – 2ο θέμα*

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=2^x+m^x-4^x-5^x$, όπου $m\in\mathbb{R}$ και $m>0$.

α) Να βρείτε τον m ώστε $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Μονάδες 13

β) Αν $m=10$, να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$. Μονάδες 12

Λύση

α) Είναι $f(0)=2^0+m^0-4^0-5^0=0$. Άρα $f(x)\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως το 0 είναι ολικό ακρότατο της συνάρτησης.

Άρα σύμφωνα με το **Θεώρημα Fermat** είναι $f'(0)=0$.

Είναι $f'(x)=2^x\ln 2+m^x\ln m-4^x\ln 4-5^x\ln 5$.

Είναι $f'(0)=0$ άρα $2^0\ln 2+m^0\ln m-4^0\ln 4-5^0\ln 5=0$

$$\Rightarrow \ln 2+\ln m-\ln 4-\ln 5=0\Rightarrow \ln\frac{2m}{4\cdot 5}=0\Rightarrow \frac{2m}{4\cdot 5}=1\Rightarrow m=10.$$

β) Είναι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με

$$E=\int_0^1\left(2^x+10^x-4^x-5^x\right)dx=\left[\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{10^x}{\ln 10}-\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{5^x}{\ln 5}\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{2}{\ln 2}+\frac{10}{\ln 10}-\frac{4}{\ln 4}-\frac{5}{\ln 5}\right)-\left(\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 10}-\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}\right)=\frac{1}{\ln 2}+\frac{9}{\ln 10}-\frac{3}{\ln 4}-\frac{4}{\ln 5}$$

$$=\frac{1}{\ln 2}+\frac{9}{\ln 10}-\frac{3}{2\ln 2}-\frac{4}{\ln 5}=-\frac{1}{2\ln 2}+\frac{9}{\ln 10}-\frac{4}{\ln 5}.$$

12. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2004 – 4ο θέμα*

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,+\infty)\to R$ τέτοια ώστε $f(x)=\frac{x^2}{2}+\int_0^{\frac{1}{2}}2x\cdot f(2xt)dt$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. **Μονάδες 7**

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x-(x+1)$. **Μονάδες 7**

γ) Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα στο $[0,+\infty)$. **Μονάδες 5**

δ) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$. **Μονάδες 6**

ε) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Λύση

α) Θέτουμε $u = 2xt$ άρα $du=2xdt$.

Για $t=0$ είναι $u=0$. Για $t=\frac{1}{2}$ είναι $u=x$.

Η συνάρτηση παίρνει τη μορφή $f(x)=\frac{x^2}{2}+\int_0^x f(u)du$. **(1)**

Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ άρα η $\int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη με $\left(\int_0^x f(u)du\right)'=f(x)$.

Επομένως και η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=x+f(x)$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

β) Είναι $f'(x)=x+f(x)\Rightarrow f'(x)-f(x)=x\Rightarrow e^{-x}\cdot f'(x)-e^{-x}f(x)=xe^{-x}$

$\Rightarrow\left[e^{-x}\cdot f(x)\right]'=xe^{-x}$.

Άρα είναι $\int\left[e^{-x}\cdot f(x)\right]'dx=\int xe^{-x}dx\Rightarrow e^{-x}\cdot f(x)=\int xe^{-x}dx$.

Είναι $\int xe^{-x}dx = -\int x\left(e^{-x}\right)'dx = -xe^{-x} + \int x'e^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx$

$= -xe^{-x} - e^{-x} + c$ άρα $e^{-x} \cdot f(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + c \Leftrightarrow f(x) = -x - 1 + ce^{x}$. **(2)**

Η σχέση (1) για x = 0 δίνει $f(0) = 0$ άρα η (2) γίνεται

$f(0) = -0 - 1 + ce^{0} \Leftrightarrow 0 = -1 + c \Leftrightarrow c = 1$.

Επομένως είναι $f(x) = -x - 1 + 1 \cdot e^{x} \Leftrightarrow f(x) = e^{x} - (x+1)$.

γ) Είναι $f'(x) = e^{x} - 1$ άρα

$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{x} - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f’	$-$	0	$+$
f	↘		↗

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Άρα η f ως γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ έχει μία το πολύ ρίζα σε αυτό το διάστημα.

Όμως είναι $f(0) = 0$ άρα η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα (το 0).

Άρα η f έχει μία μοναδική ρίζα στο $[0, +\infty)$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[e^{x} - (x+1)\right] = 0 + \infty = +\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[e^{x} - (x+1)\right]$.

Όμως $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$ άρα το ζητούμενο όριο είναι απροσδιόριστο της μορφής $(+\infty) - (+\infty)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[e^{x} - (x+1)\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[e^{x}\left(1 - \frac{x+1}{e^{x}}\right)\right]. \quad \textbf{(1)}$$

Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{e^{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x+1)'}{\left(e^{x}\right)'} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^{x}} = 0$ άρα το ζητούμενο όριο της (1) είναι $+\infty \cdot (1 + 0) = +\infty$.

ε) Η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα σ’ αυτό άρα το σύνολο τιμών της είναι το $\left[f(0), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right) = [0, +\infty)$.

13. *Πανελλήνιες 2005 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=e^{\lambda x}$, $\lambda>0$.

α) Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. **Μονάδες 3**

β) Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η y = λex. Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Μ. **Μονάδες 7**

γ) Δείξτε ότι το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτομένης της στο σημείο Μ και του άξονα y'y, είναι $E(\lambda)=\frac{e-2}{2\lambda}$. **Μονάδες 7**

δ) Υπολογίστε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2\cdot E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}$. **Μονάδες 8**

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\lambda e^{\lambda x}>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $M(x_0,f(x_0))$ είναι η $y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

Είναι $f'(x_0)=\lambda e^{\lambda\cdot x_0}$. Η παραπάνω ευθεία διέρχεται από το σημείο $(0,0)$ άρα είναι $0-e^{\lambda x_0}=\lambda e^{\lambda x_0}\cdot(0-x_0)\Rightarrow e^{\lambda x_0}(1-\lambda x_0)=0\Rightarrow x_0=\frac{1}{\lambda}$.

άρα η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η $y-e^{\lambda\frac{1}{\lambda}}=\lambda e^{\lambda\frac{1}{\lambda}}\cdot\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)$

$$\Rightarrow y-e=\lambda e\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)\Rightarrow y-e=\lambda ex-e\Rightarrow y=\lambda ex.$$

Το σημείο επαφής είναι $M\left(\frac{1}{\lambda},e\right)$.

γ) Είναι $f''(x)=\lambda^2e^{\lambda x}>0$ άρα η f είναι κυρτή. Επομένως η εφαπτομένη είναι κάτω από την γραφική παράσταση της συνάρτησης, δηλαδή $f(x)-\lambda ex>0$.

$$E(\lambda)=\int_0^{\frac{1}{\lambda}}\left(e^{\lambda x}-\lambda ex\right)dx=\left[\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}-\lambda e\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}}=\frac{e^{\lambda\frac{1}{\lambda}}}{\lambda}-\lambda e\frac{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2}{2}-\left(\frac{e^{\lambda\cdot 0}}{\lambda}-\lambda e\frac{0^2}{2}\right)$$

$=\dfrac{e}{\lambda}-\dfrac{e}{2\lambda}-\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{e-2}{\lambda}$ τετραγωνικές μονάδες.

δ) Είναι $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda^2\cdot E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda^2\cdot\frac{e-2}{\lambda}}{2+\eta\mu\lambda}=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda(e-2)}{2+\eta\mu\lambda}$.

Είναι e – 2 > 0 άρα το όριο του αριθμητή είναι $+\infty$.

Είναι $-1\le\eta\mu\lambda\le 1$ άρα $1\le 2+\eta\mu\lambda\le 3$ άρα ο παρονομαστής είναι θετικός αριθμός.

Επομένως το ζητούμενο όριο είναι ίσο με $+\infty$.

14. *Πανελλήνιες 2005 – 4ο θέμα*

Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση $2f'(x)=e^{x-f(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=0$.

α) Να δειχθεί ότι: $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)$. **Μονάδες 6**

β) Να βρεθεί το: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x}$. **Μονάδες 6**

γ) Δίνονται οι συναρτήσεις: $h(x)=\int_{-x}^{x}t^{2005}\cdot f(t)dt$ και $g(x)=\dfrac{x^{2007}}{2007}$.

Δείξτε ότι $h(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. **Μονάδες 7**

δ) Δείξτε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^{x}t^{2005}\cdot f(t)dt=\dfrac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μία λύση στο (0, 1). **Μονάδες 6**

Λύση

α) $2f'(x)=e^{x-f(x)}\Rightarrow 2f'(x)=\dfrac{e^x}{e^{f(x)}}\Rightarrow e^{f(x)}f'(x)=\dfrac{e^x}{2}\Rightarrow\left(e^{f(x)}\right)'=\left(\dfrac{e^x}{2}\right)'$.

Επομένως $e^{f(x)}=\dfrac{e^x}{2}+c$, όπου $c\in\mathbb{R}$.

Είναι $f(0)=0$ άρα $e^{f(0)}=\dfrac{e^0}{2}+c\Rightarrow e^0=\dfrac{1}{2}+c\Rightarrow c=1-\dfrac{1}{2}\Rightarrow c=\dfrac{1}{2}$.

Άρα είναι $e^{f(x)}=\dfrac{e^x}{2}+\dfrac{1}{2}\Rightarrow e^{f(x)}=\dfrac{e^x+1}{2}\Rightarrow f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x+1}{2}\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Έστω $F(x)=\int_0^x f(x-t)\,dt$.

Θέτουμε u = x – t. Άρα du = –dt. Για t = 0 είναι u = x και για t = x είναι u = 0.

Επομένως $F(x)=-\int_x^0 f(u)\,du=\int_0^x f(u)\,du$.

Η F είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\int_0^x f(u)\,du=F(0)=\int_0^0 f(u)\,du=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu x=\eta\mu 0=0$.

Επομένως το ζητούμενο όριο είναι απροσδιόριστο της μορφής $\dfrac{0}{0}$.

Εφαρμόζουμε τον κανόνα De l' Hospital και έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(x-t)\,dt}{\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\,du}{\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x f(u)\,du\right)'}{(\eta\mu x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{0}{1}=0.$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(x-t)\,dt}{\eta\mu x}=0$.

γ) Είναι $h(x)=\int_{-x}^x t^{2005}\cdot f(t)\,dt=\int_{-x}^0 t^{2005}\cdot f(t)\,dt+\int_0^x t^{2005}\cdot f(t)\,dt$

$=-\int_0^{-x} t^{2005}\cdot f(t)\,dt+\int_0^x t^{2005}\cdot f(t)\,dt$.

Η h είναι παραγωγίσιμη με

$h'(x)=-(-x)^{2005}\cdot f(-x)\cdot(-x)'+x^{2005}\cdot f(x)=x^{2005}\left(f(x)-f(-x)\right)$.

Είναι $f(-x)=\ln\left(\dfrac{e^{-x}+1}{2}\right)=\ln\left(\dfrac{\frac{1}{e^x}+1}{2}\right)=\ln\left(\dfrac{\frac{1+e^x}{e^x}}{2}\right)=\ln\left(\dfrac{1+e^x}{2e^x}\right)$

$= \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) - \ln e^x = f(x) - x$.

Άρα $h'(x) = x^{2005}\left(f(x) - f(x) + x\right) = x^{2006}$.

Επομένως είναι $h'(x) = g'(x)$ άρα $h(x) = g(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για x = 0 είναι $h(0) = g(0) + c \Rightarrow 0 = 0 + c \Rightarrow c = 0$.

Άρα είναι $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) $\int_{-x}^{x} t^{2005} \cdot f(t)dt = \frac{1}{2008} \Leftrightarrow h(x) = \frac{1}{2008} \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{2008} \Leftrightarrow \frac{x^{2007}}{2007} = \frac{1}{2008}$

$\Leftrightarrow 2008 \cdot x^{2007} - 2007 = 0$.

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x) = 2008 \cdot x^{2007} - 2007$ με $x \in \mathbb{R}$.

Η φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και το [0, 1], ως πολυωνυμική.

Είναι $\varphi(0) \cdot \varphi(1) = -2007 \cdot (2008 - 2007) = -2007 < 0$.

Άρα σύμφωνα με το **Θεώρημα Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\varphi(x_0) = 0$, δηλαδή η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον λύση στο (0, 1).

Είναι $\varphi'(x) = 2008 \cdot 2007 \cdot x^{2006} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως η φ, άρα και η εξίσωση, έχει μία το πολύ λύση.

Άρα η εξίσωση έχει μία ακριβώς λύση στο (0, 1).

15. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2005 – 4ο θέμα*

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 2005.$$

α) Να δείξετε ότι: i) $f(0) = 0$ **Μονάδες 4**

ii) $f'(0) = 1$. **Μονάδες 4**

β) Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + \lambda (f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} = 3$. **Μονάδες 7**

γ) Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι:

i) $xf(x) > 0$ για κάθε $x > 0$. **Μονάδες 6**

ii) $\int_0^1 f(x)dx < f(1)$. **Μονάδες 4**

Λύση

α) i) Έστω η συνάρτηση $h(x) = \dfrac{f(x) - x}{x^2}$.

Είναι $h(x) = \dfrac{f(x) - x}{x^2} \Rightarrow x^2 \cdot h(x) = f(x) - x \Rightarrow f(x) = x^2 \cdot h(x) + x$.

Άρα $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left[x^2 \cdot h(x) + x\right] = 0^2 \cdot 2005 + 0 = 0$.

Όμως η f είναι συνεχής άρα $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

ii) $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \cdot h(x) + x}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \left[x \cdot h(x) + 1\right] = 0 \cdot 2005 + 1 = 1$.

β) $$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + \lambda(f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \lambda\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2}{2 + \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2} = \frac{1 + \lambda(f'(0))^2}{2 + (f'(0))^2} = \frac{1 + \lambda(f'(0))^2}{2 + (f'(0))^2}$$

$$= \frac{1 + \lambda \cdot 1^2}{2 + 1^2} = \frac{1 + \lambda}{3}.$$

Επομένως $A = \dfrac{1 + \lambda}{3} \Rightarrow 3 = \dfrac{1 + \lambda}{3} \Rightarrow 9 = 1 + \lambda \Rightarrow \lambda = 8$.

γ) Είναι $f'(x) > f(x) \Rightarrow f'(x) - f(x) > 0 \Rightarrow e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) > 0 \cdot e^{-x}$ $\Rightarrow \left(e^{-x} \cdot f(x)\right)' > 0$. Επομένως η συνάρτηση $g(x) = e^{-x} \cdot f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

i) Για $x > 0$ είναι $g(x) > g(0) \Rightarrow e^{-x} f(x) > e^{-0} f(0) \Rightarrow e^{-x} f(x) > 0 \Rightarrow f(x) > 0$, άρα $xf(x) > 0$.

ii) Για $x<0$ είναι $g(x)<g(0)\Rightarrow e^{-x}f(x)<e^{-0}f(0)\Rightarrow e^{-x}f(x)<0\Rightarrow f(x)<0$,

άρα $xf(x)>0$.

Είναι $f'(x)>f(x)\Leftrightarrow f'(x)-f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως $\int_0^1(f'(x)-f(x))dx>0\Rightarrow\int_0^1 f'(x)dx-\int_0^1 f(x)dx>0$

$\Rightarrow[f(x)]_0^1-\int_0^1 f(x)dx>0\Rightarrow f(1)-\cancel{f(0)}^{0}-\int_0^1 f(x)dx>0\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx<f(1)$.

16. *Πανελλήνιες 2006 – 2ο θέμα*

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=2+(x-2)^2$ με $x\geq 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1–1. **Μονάδες 6**

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της. **Μονάδες 8**

γ) i) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία y = x. **Μονάδες 4**

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}.

Μονάδες 7

Λύση

α) Είναι $f'(x)=2(x-2)\geq 0$ για κάθε $x\in[2,+\infty)$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$ άρα είναι 1–1.

β) Η f είναι 1 – 1 άρα είναι αντιστρέψιμη.

Για να βρούμε την αντίστροφη της f θέτουμε $y=f(x)$ και λύνουμε ως προς x.

$y=2+(x-2)^2\Rightarrow y=x^2-4x+6\Rightarrow x^2-4x+6-y=0$.

Είναι $\Delta=16-4\cdot 1\cdot(6-y)=4y-8=4(y-2)$. Άρα $x=\dfrac{4\pm 2\sqrt{y-2}}{2}=2\pm\sqrt{y-2}$

Επομένως $x=2+\sqrt{y-2}\geq 2$ άρα δεκτό ή $x = 2 - \sqrt{y-2} \le 2$ απορρίπτεται γιατί είναι $x \ge 2$. Η περίπτωση x = 2 καλύπτεται από την πρώτη λύση.

Άρα $x = 2 + \sqrt{y-2}$ με $y \ge 2$.

Επομένως είναι $f(x) = 2 + (x-2)^2$ με $f : [2,+\infty) \to [2,+\infty)$

και $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-2}$ με $f^{-1} : [2,+\infty) \to [2,+\infty)$.

γ) i) Τα κοινά σημεία της C_f με την $y = x$ είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} y = 2 + (x-2)^2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3 \\ \qquad \to \end{cases}$$

Τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ με την $y = x$ είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} y = 2 + \sqrt{x-2} \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{x-2} \Rightarrow x - 2 = \sqrt{x-2} \Rightarrow (x-2)^2 = x - 2 \\ \qquad \to \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^2 - 4x + 4 = x - 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3.$$

Άρα τα κοινά σημεία είναι τα $A(2,2)$ και $B(3,3)$.

ii) Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι διπλάσιο από το εμβαδόν που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και την y = x.

Το εμβαδόν που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και την y = x είναι $E_1 = \int_2^3 |f(x) - x| dx$.

Είναι $f(x) - x = x^2 - 5x + 6$ και για $2 \le x \le 3$ είναι $f(x) < 0$ άρα

$$E_1 = \int_2^3 x - f(x) dx = \int_2^3 (-x^2 + 5x - 6) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} - 6x \right]_2^3$$

$$= \left(-\frac{3^3}{3} + 5\frac{3^2}{2} - 6 \cdot 3 \right) - \left(-\frac{2^3}{3} + 5\frac{2^2}{2} - 6 \cdot 2 \right) = -9 + \frac{45}{2} - 18 + \frac{8}{3} - 10 + 12 = \frac{1}{6} \text{τ.μ.}$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = 2 \cdot E_1 = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$τ.μ.

Παρατήρηση: Στο γ) i) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το **θεώρημα**:

«Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων της f και f^{-1} βρίσκονται πάνω στην y = x. Επομένως οι εξισώσεις $f(x)=f^{-1}(x)$, $f(x)=x$ και $f^{-1}(x)=x$ είναι ισοδύναμες»

το οποίο όμως δεν υπάρχει μέσα στο σχολικό βιβλίο, άρα πρέπει να το αποδείξουμε. Σε αυτή την περίπτωση συνεχίζουμε γράφοντας:

Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=x$ και έχουμε $x^2-4x+6=x \Rightarrow x^2-5x+6=0 \Rightarrow$

x = 2 ή x = 3.

Είναι $f(2)=2+(2-2)^2=2$ και $f(3)=2+(3-2)^2=3$ άρα τα κοινά σημεία είναι τα $A(2,2)$ και $B(3,3)$.

17. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2006 – 2ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1+e^x}{1+e^{x+1}}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 9

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \dfrac{1}{f(x)}dx$. **Μονάδες 9**

γ) Για κάθε x < 0 να αποδείξετε ότι $f(5^x)+f(7^x)<f(6^x)+f(8^x)$.

Μονάδες 7

Λύση

α) Είναι $f'(x)=\left(\dfrac{1+e^x}{1+e^{x+1}}\right)'=\dfrac{e^x\left(1+e^{x+1}\right)-\left(1+e^x\right)e^{x+1}}{\left(1+e^{x+1}\right)^2}=\dfrac{e^x(1-e)}{\left(1+e^{x+1}\right)^2}<0$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) $\displaystyle\int\frac{1}{f(x)}dx=\int\frac{e^{x+1}+1}{e^x+1}dx=\int\frac{e^{x+1}-e^x+e^x+1}{e^x+1}dx=\int\frac{e^{x+1}-e^x}{e^x+1}dx+\int\frac{e^x+1}{e^x+1}dx$

$$=\int\frac{e^x(e-1)}{e^x+1}dx+\int 1dx=(e-1)\int\frac{e^x}{e^x+1}dx+x=(e-1)\int\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}dx+x$$

$=(e-1)\cdot\ln\left(e^x+1\right)+x+c$.

γ) Για κάθε $x<0$ είναι $5^x>6^x$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ συμπεραίνουμε ότι $f\left(5^x\right)<f\left(6^x\right)$. Ομοίως είναι $7^x>8^x \Rightarrow f\left(7^x\right)<f\left(8^x\right)$.

Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο παραπάνω σχέσεις και βρίσκουμε ότι $f\left(5^x\right)+f\left(7^x\right)<f\left(6^x\right)+f\left(8^x\right)$.

18. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2006 – 3ο θέμα*

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z που ικανοποιούν την ισότητα $(4-z)^{10}=z^{10}$ και η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2+x+\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z που ανήκουν στην ευθεία x = 2. **Μονάδες 7**

β) Αν η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο τομής της με την ευθεία x = 2 τέμνει τον άξονα y′y στο $y_0=-3$, τότε:

i) να βρείτε το α και την εξίσωση της εφαπτομένης (ε). **Μονάδες 9**

ii) να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, της εφαπτομένης (ε), του άξονα x′x και της ευθείας $x=\frac{3}{5}$. **Μονάδες 9**

Λύση

α) Έστω $z=x+yi$, με $x,y\in\mathbb{R}$.

$$(4-z)^{10}=z^{10}\Rightarrow\left|(4-z)^{10}\right|=\left|z^{10}\right|\Rightarrow\left|(4-z)\right|^{10}=|z|^{10}\Rightarrow|(4-z)|=|z|$$

$$\Rightarrow|4-x-yi|=|x+yi|\Rightarrow\sqrt{(4-x)^2+(-y)^2}^{\,2}=\sqrt{x^2+y^2}^{\,2}$$

$$\Rightarrow 16-8x+x^2+y^2=x^2+y^2\Rightarrow x=2.$$

β) i) $\begin{cases}y=x^2+x+\alpha\\x=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=2^2+2+\alpha\\x=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=6+\alpha\\x=2\end{cases}$.

Το σημείο τομής είναι το (2, 6+α).

Είναι $f'(x)=2x+1$ και $f'(2)=5$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $(2,6+\alpha)$ είναι ε: $y-6-\alpha=5(x-2)$.

Η ε τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $(0,-3)$ άρα οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν την εξίσωση της ε.

Είναι $-3-6-\alpha=5(0-2)$ άρα $\alpha=1$.

Η εξίσωση της ε είναι y – 6 – 1 = 5(x – 2) άρα $y=5x-3$.

ii) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E=\int_{\frac{3}{5}}^{2}\left(x^2+x+1-5x+3\right)dx=\int_{\frac{3}{5}}^{2}\left(x^2-4x+4\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right]_{\frac{3}{5}}^{2}=\frac{343}{375}.$$

19. *Πανελλήνιες 2007 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=x^3-3x-2\eta\mu^2\theta$,

όπου $\theta\in\mathbb{R}$ **μία σταθερά με** $\theta\neq \kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

α) Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής. **Μονάδες 7**

β) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ **έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.** **Μονάδες 8**

γ) Αν x_1, x_2 **είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και** x_3 **η θέση του σημείου καμπής της f, να αποδειχθεί ότι τα σημεία** $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$, $\Gamma(x_3,f(x_3))$ **βρίσκονται στην ευθεία** $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$. **Μονάδες 3**

δ) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$. **Μονάδες 7**

Λύση

α) Είναι $f'(x)=3x^2-3$ και $f''(x)=6x$.

Είναι $f'(x)=0\Rightarrow 3x^2-3=0\Rightarrow x=\pm 1$. Επίσης $f''(x)=0\Rightarrow x=0$.

Κατασκευάζουμε πίνακα μεταβολής προσήμων για την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της f.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		↗		↘		↘		↗	
			τ.μ.		σ.κ.		τ.ε.		

β) Στο διάστημα $(-\infty,-1)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-3x-2\eta\mu^2\theta\right)=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\left(x^3-3x-2\eta\mu^2\theta\right)=-1+3-2\eta\mu^2\theta=2-2\eta\mu^2\theta=2\sigma\upsilon\nu^2\theta>0$.

Η f είναι συνεχής άρα το σύνολο τιμών της είναι το $\left(-\infty,2\sigma\upsilon\nu^2\theta\right)$.

Το 0 ανήκει στο παραπάνω σύνολο τιμών, άρα η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-\infty,-1)$. Ως γνησίως αύξουσα έχει μία το πολύ ρίζα άρα τελικά έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(-\infty,-1)$.

Στο διάστημα $[-1,1]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

Είναι $f(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)-2\eta\mu^2\theta=-1+3-2\eta\mu^2\theta=2-2\eta\mu^2\theta=2\sigma\upsilon\nu^2\theta>0$

και $f(1)=1^3-3\cdot 1-2\eta\mu^2\theta=1-3-2\eta\mu^2\theta=-2-2\eta\mu^2\theta<0$.

Η f είναι συνεχής άρα το σύνολο τιμών της είναι το $\left[-2-2\eta\mu^2\theta,2\sigma\upsilon\nu^2\theta\right]$.

Το 0 ανήκει στο παραπάνω σύνολο τιμών, άρα η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[-1,1]$. Ως γνησίως φθίνουσα έχει μία το πολύ ρίζα άρα τελικά έχει ακριβώς μία ρίζα στο $[-1,1]$.

Στο διάστημα $(1,+\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3-3x-2\eta\mu^2\theta\right)=1^3-3\cdot 1-2\eta\mu^2\theta=-2-2\eta\mu^2\theta<0$ και

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^3-3x-2\eta\mu^2\theta\right)=+\infty$.

Η f είναι συνεχής άρα το σύνολο τιμών της είναι το $\left(-2-2\eta\mu^2\theta,+\infty\right)$.

Το 0 ανήκει στο παραπάνω σύνολο τιμών, άρα η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,+\infty)$. Ως γνησίως αύξουσα έχει μία το πολύ ρίζα άρα τελικά έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(1,+\infty)$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η f έχει τρεις ακριβώς ρίζες στο $\mathbb{R}$.

γ) Τα τρία σημεία είναι τα $A\left(-1,2\sigma\upsilon\nu^2\theta\right)$, $B\left(1,-2-2\eta\mu^2\theta\right)$, $\Gamma\left(0,-2\eta\mu^2\theta\right)$.

Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες του Α στην εξίσωση της ευθείας και έχουμε $2\sigma\upsilon\nu^2\theta=-2(-1)-2\eta\mu^2\theta \Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta=2-2\eta\mu^2\theta \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta=1-\eta\mu^2\theta$ που ισχύει άρα το Α ανήκει στην ευθεία.

Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες του Β στην εξίσωση της ευθείας και έχουμε $-2-2\eta\mu^2\theta=-2\cdot 1-2\eta\mu^2\theta$ που ισχύει άρα το Β ανήκει στην ευθεία.

Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες του Γ στην εξίσωση της ευθείας και έχουμε $-2\eta\mu^2\theta=-2\cdot 0-2\eta\mu^2\theta$ που ισχύει άρα το Γ ανήκει στην ευθεία.

δ) Έστω η συνάρτηση g με

$g(x)=f(x)-\left(-2x-2\eta\mu^2\theta\right)=x^3-3x-2\eta\mu^2\theta+2x+2\eta\mu^2\theta=x^3-x$, με $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $g(x)=0 \Rightarrow x^3-x=0 \Rightarrow x\left(x^2-1\right)=0$. Άρα $x = 0$ ή $x = -1$ ή $x = 1$.

Κατασκευάζουμε έναν πίνακα μεταβολής προσήμων της g.

x	$-\infty$ $\quad$ -1	0	1	$+\infty$
$g(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Επομένως, το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E=\int_{-1}^{1}\left|g(x)\right|dx=$

$$=\int_{-1}^{0}g(x)dx-\int_{0}^{1}g(x)dx=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx-\int_{0}^{1}(x^3-x)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}$$

$$=-\left(\frac{(-1)^4}{4}-\frac{(-1)^2}{2}\right)-\left(\frac{1^4}{4}-\frac{1^2}{2}\right)=-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\text{ τ.μ.}$$

20. *Πανελλήνιες 2007 – 4ο θέμα*

Έστω f μία συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα [0, 1] για την οποία ισχύει $f(0)>0$. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα [0, 1] για την οποία ισχύει $g(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1]$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x)=\int_0^x f(t)g(t)dt,\ x\in[0,1],\quad G(x)=\int_0^x g(t)\,dt,\ x\in[0,1]$$

α) Να δειχθεί ότι $F(x)>0$ για κάθε x στο διάστημα (0, 1]. **Μονάδες 8**

β) Να αποδειχθεί ότι: $f(x)\cdot G(x)>F(x)$

για κάθε x στο διάστημα (0, 1]. **Μονάδες 6**

γ) Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $\dfrac{F(x)}{G(x)}\le\dfrac{F(1)}{G(1)}$

για κάθε x στο διάστημα (0, 1]. **Μονάδες 4**

δ) Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)\cdot\left(\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)\cdot x^5}$. **Μονάδες 7**

Λύση

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα άρα για κάθε $x\in(0,1]$ είναι $x>0\Leftrightarrow f(x)>f(0)$

Είναι $f(0)=0$ άρα τελικά $f(x)>0$.

Ακόμη είναι και $g(x)>0$ άρα $f(x)\cdot g(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1]$.

Επομένως είναι και $\int_0^x f(t)g(t)dt>0\Leftrightarrow F(x)>0$.

β) Είναι $f(x)\cdot G(x)>F(x)\Leftrightarrow f(x)\cdot\int_0^x g(t)dt>\int_0^x f(t)\cdot g(t)dt$

$\Leftrightarrow \int_0^x f(x)\cdot g(t)dt>\int_0^x f(t)\cdot g(t)dt \Leftrightarrow \int_0^x f(x)\cdot g(t)dt-\int_0^x f(t)\cdot g(t)dt>0$

$\Leftrightarrow \int_0^x\left[f(x)\cdot g(t)-f(t)\cdot g(t)\right]dt>0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(t)=f(x)\cdot g(t)-f(t)\cdot g(t)$ με $t\in[0,1]$.

Η φ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0, 1] επομένως για κάθε $0<x\le 1$ και για κάθε $t\in[0,x]$ ισχύει $0\le t\le x\Leftrightarrow f(0)\le f(t)\le f(x)\Leftrightarrow f(t)\le f(x)$.

$g(t)>0$ άρα $g(t)\cdot f(t)\le g(t)\cdot f(x)\Leftrightarrow g(t)\cdot f(x)-g(t)\cdot f(t)\ge 0\Leftrightarrow \varphi(t)\ge 0$.

Για x > 0 η φ(t) δεν είναι παντού μηδέν άρα είναι

$\int_0^x\varphi(t)dt>0\Leftrightarrow \int_0^x\left[f(x)\cdot g(t)-f(t)\cdot g(t)\right]dt>0$.

Έτσι αποδείξαμε ότι η σχέση αυτή ισχύει άρα ισχύει και η αρχική.

γ) Έστω η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{F(x)}{G(x)}$ με $x\in(0,1]$.

Είναι $h'(x)=\dfrac{F'(x)\cdot G(x)-F(x)\cdot G'(x)}{G^2(x)}=\dfrac{f(x)\cdot g(x)\cdot G(x)-F(x)\cdot g(x)}{G^2(x)}$

$=g(x)\dfrac{f(x)\cdot G(x)-F(x)}{G^2(x)}$.

Είναι $g(x)>0$ και $f(x)\cdot G(x)-F(x)>0$ από το ερώτημα (β).

Επομένως είναι $h'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1]$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο (0, 1]. Επομένως $x\le 1\Leftrightarrow h(x)\le h(1)\Leftrightarrow \dfrac{F(x)}{G(x)}\le\dfrac{F(1)}{G(1)}$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)\cdot\left(\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)\cdot x^5}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}\cdot\dfrac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt}{x^5}\right)$.

Το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}$ είναι απροσδιόριστο της μορφής $\dfrac{0}{0}$.

Σύμφωνα με τον **κανόνα του De L' Hospital** είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)'}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)g(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \quad \text{(η f είναι συνεχής).}$$

Το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\int_0^{x^2} ημt^2 dt}{x^5}$ είναι απροσδιόριστο της μορφής $\dfrac{0}{0}$.

Σύμφωνα με τον **κανόνα του De L' Hospital** είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} ημt^2 dt}{x^5} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\int_0^{x^2} ημt^2 dt\right)'}{\left(x^5\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{ημx^4 \cdot 2x}{5x^4} = \frac{2}{5} \lim_{x\to 0^+} \frac{ημx^4}{x^4} \cdot \lim_{x\to 0^+} x = \frac{2}{5} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

Επομένως το ζητούμενο αρχικό όριο είναι ίσο με $f(0) \cdot 0 = 0$.

21. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2007 – 2ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ημ3x}{x}, & x < 0 \\ x^2 + αx + βσυνx, & x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 3$. **Μονάδες 8**

β) Αν $f'\left(\dfrac{π}{2}\right) = π$ **και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο** $x_0 = 0$, **να αποδειχθεί ότι α = β = 3.** **Μονάδες 9**

γ) Αν α = β = 3, να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^π f(x)dx$. **Μονάδες 8**

Λύση

α) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{ημ3x}{x} = 3 \cdot \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{ημ3x}{3x}$.

Θέτουμε $t = 3x$. Όταν το x τείνει στο 0 τότε και το t τείνει στο 0.

Άρα $3\cdot\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{ημ3x}{3x}=3\cdot\lim\limits_{t\to 0^-}\frac{ημt}{t}=3\cdot 1=3$.

β) Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x^2+αx+βσυνx\right]=0^2+α\cdot 0+βσυν0=β$ και $f(0)=β$ άρα

τελικά β = 3.

Για $x>0$ είναι $f'(x)=2x+α-β\cdot ημx\Rightarrow f'(x)=2x+α-3ημx$.

Είναι $f'\left(\frac{π}{2}\right)=π\Rightarrow 2\cdot\frac{π}{2}+α-3ημ\frac{π}{2}=π\Rightarrow α=3\cdot 1\Rightarrow α=3$.

γ) $\int_0^π f(x)dx=\int_0^π\left(x^2+3x+3συνx\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}+3ημx\right]_0^π$

$\left(\frac{π^3}{3}+3\frac{π^2}{2}+3ημπ\right)-\left(\frac{0^3}{3}+3\frac{0^2}{2}+3ημ0\right)=\frac{π^3}{3}+3\frac{π^2}{2}$.

22. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2007 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-e\ln x$, $x>0$.

α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1,+\infty)$. **Μονάδες 10**

β) Να αποδειχθεί ότι ισχύει $f(x)\ge e$ για κάθε $x>0$. **Μονάδες 7**

γ) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\int_{x^2+1}^{x^2+2}f(t)dt=\int_{x^2+3}^{x^2+2}f(t)dt+\int_2^4 f(t)dt$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0,+\infty)$. **Μονάδες 8**

Λύση

α) Είναι $f'(x)=e^x-\frac{e}{x}$.

Για $x>1$ είναι $e^x>e$. Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη της δύο προηγούμενες ανισότητες και έχουμε $x\cdot e^x>1\cdot e\Rightarrow xe^x-e>0\Rightarrow e^x-\frac{e}{x}>0\Rightarrow f'(x)>0$,

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα για $x>1$.

β) $f'(x)=0 \Rightarrow e^x-\dfrac{e}{x}=0 \Rightarrow xe^x-e=0$.

Το 1 είναι προφανής ρίζα της παραπάνω εξίσωσης. Πράγματι $1\cdot e^1-e=0$.

Είναι $f''(x)=e^x+xe^x>0$ για $x>0$. Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα για $x>0$.

Επομένως η f' έχει μοναδική ρίζα, την $x_0=1$.

Για $0<x<1$ είναι $e^x<e$. Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη της δύο προηγούμενες ανισότητες και έχουμε $x\cdot e^x<1\cdot e \Rightarrow xe^x-e<0 \Rightarrow e^x-\dfrac{e}{x}<0 \Rightarrow f'(x)<0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα για $0<x<1$.

Επομένως η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ ίσο με $f(1)=e^1-1\cdot\ln 1=e$.

x	0	1	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	↘		↗

Άρα $f(x)\geq f(1) \Rightarrow f(x)\geq e$ για κάθε $x>0$.

γ) $\int_{x^2+1}^{x^2+2} f(t)dt=\int_{x^2+3}^{x^2+2} f(t)dt+\int_2^4 f(t)dt \Rightarrow \int_{x^2+1}^{x^2+2} f(t)dt-\int_{x^2+3}^{x^2+2} f(t)dt=\int_2^4 f(t)dt$

$\Rightarrow \int_{x^2+1}^{x^2+2} f(t)dt+\int_{x^2+2}^{x^2+3} f(t)dt=\int_2^4 f(t)dt \Rightarrow \int_{x^2+1}^{x^2+3} f(t)dt-\int_2^4 f(t)dt=0$.

Έστω η συνάρτηση $g(x)=\int_{x^2+1}^{x^2+3} f(t)dt-\int_2^4 f(t)dt$ με $x\in(0,+\infty)$.

Για την συνάρτηση g έχουμε ότι $g(1)=\int_{1^2+1}^{1^2+3} f(t)dt-\int_2^4 f(t)dt=0$ άρα η g έχει προφανή ρίζα το 1.

Υποθέτουμε ότι έχει και δεύτερη ρίζα, έστω x_1 με $1<x_1$ (παρόμοια αποδεικνύεται και για $0<x_1<1$)

Τότε για την συνάρτηση g έχουμε ότι:

- είναι συνεχής στο $[1,x_1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο $(1,x_1)$ με $g'(x)=\left(\int_{x^2+1}^{x^2+3} f(t)dt-\int_2^4 f(t)dt\right)'$

$$=\left(-\int_0^{x^2+1} f(t)dt+\int_0^{x^2+3} f(t)dt\right)'=-f(x^2+1)\cdot(x^2+1)'+f(x^2+3)\cdot(x^2+3)'$$

$$=2x\cdot f(x^2+3)-2x\cdot f(x^2+1)=2x\left(f(x^2+3)-f(x^2+1)\right)$$

- είναι $g(1)=g(x_1)=0$

άρα σύμφωνα με το **Θεώρημα Rolle** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,x_1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0$.

Όμως $g'(\xi)=0\Rightarrow 2\xi\left(f(\xi^2+3)-f(\xi^2+1)\right)=0$ άρα $\begin{cases} f(\xi^2+3)-f(\xi^2+1)=0 \\ \text{ή} \\ \xi=0 \end{cases}$.

Είναι $\xi>1$ άρα το ξ διάφορο του μηδενός.

Επίσης είναι $\xi^2+3>\xi^2+1>1\Rightarrow f(\xi^2+3)>f(\xi^2+1)\Rightarrow f(\xi^2+3)-f(\xi^2+1)>0$

(αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$).

Επομένως το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle είναι άτοπο.

Άρα η συνάρτηση g, επομένως και η δοσμένη εξίσωση έχει μία μόνο ρίζα.

23. *Πανελλήνιες 2008 – 4ο θέμα*

Έστω f μία συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\mathbf{f(x)=(10x^3+3x)\int_0^2 f(t)dt-45}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=20x^3+6x-45$. **Μονάδες 8**

β) Δίνεται επίσης μία συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι $g''(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$. **Μονάδες 4**

γ) Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει ότι:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2}=f(x)+45$$

και $g(0)=g'(0)=1$, τότε

i) να αποδείξετε ότι $g(x)=x^5+x^3+x+1$. **Μονάδες 10**

ii) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1 – 1. **Μονάδες 3**

Λύση

α) **1^{ος} τρόπος**

Έστω $\int_0^2 f(t)dt = c$ άρα $f(x) = 10cx^3 + 3cx - 45$.

Επομένως $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (10cx^3 + 3cx - 45)dx \Rightarrow c = \left[10c\frac{x^4}{4} + 3c\frac{x^2}{2} - 45x\right]_0^2$

$c = 10c\frac{2^4}{4} + 3c\frac{2^2}{2} - 45\cdot 2 \Rightarrow c = 40c + 6c - 90 \Rightarrow 45c = 90 \Rightarrow c = 2$.

Άρα $f(x) = 10\cdot 2\cdot x^3 + 3\cdot 2\cdot x - 45 \Rightarrow f(x) = 20x^3 + 6x - 45$.

2ος τρόπος

Έστω $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Τότε $F'(x) = f(x)$ και $F(0) = \int_0^0 f(x)dx = 0$.

Η αρχική ισότητα γράφεται: $F'(x) = (10x^3 + 3x)F(2) - 45$.

Άρα $F(x) = \left(10\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^2}{2}\right)F(2) - 45x + c$, $c \in \mathbb{R}$ και $F(0) = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} c = 0$.

Επομένως $F(2) = \left(10\frac{2^4}{4} + 3\frac{2^2}{2}\right)F(2) - 45\cdot 2 \Rightarrow F(2) = 46F(2) - 90 \Rightarrow F(2) = 2$.

Τελικά $f(x) = (10x^3 + 3x)\cdot 2 - 45 = 20x^3 + 6x - 90$.

β) Είναι $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{g'(x-h) - g'(x)}{-h}$.

Θέτουμε όπου –h = u. Όταν το h τείνει στο 0 τότε και το u τείνει στο 0.

Είναι $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g'(x-h) - g'(x)}{-h} = \lim\limits_{u\to 0}\frac{g'(x+u) - g'(x)}{u} = g''(x)$ (αφού η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη).

γ) i) Είναι $\lim\limits_{h\to 0}\left[g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)\right] = g(x) - 2g(x) + g(x) = 0$ και $\lim\limits_{h\to 0} h^2 = 0$ άρα το δοσμένο όριο είναι απροσδιόριστη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Η g(x) είναι συνεχής (αφού είναι παραγωγίσιμη) και οι g(x + h) και g(x – h) είναι παραγωγίσιμες ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Άρα για να υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2}$ μπορούμε να εφαρμόσουμε τον **κανόνα του De l' Hospital**.

(ΠΡΟΣΟΧΗ: Παραγωγίσουμε ως προς h).

Είναι $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\left[g(x+h)-2g(x)+g(x-h)\right]'}{\left[h^2\right]'}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)+g(x)-g(x-h)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x)}{h}+\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}=\frac{1}{2}g''(x)+\frac{1}{2}g''(x)=g''(x).$$

Επομένως είναι $g''(x)=f(x)+45\Rightarrow g''(x)=20x^3+6x$.

Είναι $g'(x)=5x^4+3x^2+c_1$ και $g'(0)=1$ άρα $5\cdot 0^4+3\cdot 0^2+c_1=1\Rightarrow c_1=1$.

Επομένως $g'(x)=5x^4+3x^2+1$.

Είναι $g(x)=x^5+x^3+x+c_2$ και $g(0)=1$ άρα $0^5+0^3+0+c_2=1\Rightarrow c_2=1$.

Επομένως $g(x)=x^5+x^3+x+1$.

ii) Είναι $g'(x)=5x^4+3x^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επομένως είναι 1 – 1.

24. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2008 – 4ο θέμα*

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,+\infty)$ για την οποία ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x>0$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt,\quad x\in[0,+\infty),\qquad h(x)=\frac{F(x)}{\int_0^x tf(t)dt},\quad x\in(0,+\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 e^{t-1}\left[f(t)+F(t)\right]dt=F(1)$. **Μονάδες 6**

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$. **Μονάδες 8**

γ) Αν $h(1)=2$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(t)dt < 2\int_0^2 tf(t)dt$. **Μονάδες 6**

ii) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(t)dt = \frac{1}{2}F(1)$. **Μονάδες 5**

Λύση

α) $e^{t-1}\left[f(t)+F(t)\right] = e^{t-1}f(t)+e^{t-1}F(t) = e^{t-1}F'(t)+\left(e^{t-1}\right)'F(t) = \left(e^{t-1}\cdot F(t)\right)'$.

Είναι $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ άρα $F(0)=\int_0^0 f(t)dt = 0$.

Άρα $\int_0^1 e^{t-1}\left[f(t)+F(t)\right]dt = \int_0^1 \left[e^{t-1}\cdot F(t)\right]'dt = \left[e^{t-1}\cdot F(t)\right]_0^1$

$= e^{1-1}\cdot F(1) - e^{0-1}\cdot F(0) = F(1)-0 = F(1)$

β) Είναι $h'(x) = \left(\dfrac{F(x)}{\int_0^x tf(t)dt}\right)' = \dfrac{f(x)\cdot\int_0^x tf(t)dt - F(x)\left(\int_0^x tf(t)dt\right)'}{\left(\int_0^x tf(t)dt\right)^2}$

$$= \frac{f(x)\cdot\int_0^x tf(t)dt - F(x)\cdot x\cdot f(x)}{\left(\int_0^x tf(t)dt\right)^2} = \frac{f(x)\cdot\left(\int_0^x tf(t)dt - F(x)\cdot x\right)}{\left(\int_0^x tf(t)dt\right)^2}.$$

Είναι $\int_0^x tf(t)dt - F(x)\cdot x = \int_0^x tf(t)dt - x\int_0^x f(t)dt = \int_0^x tf(t)dt - \int_0^x xf(t)dt$

$= \int_0^x (t-x)f(t)dt$.

Όμως $t\in(0,x) \Rightarrow 0<t<x \Rightarrow t-x<0$ και επειδή είναι $f(t)>0$ συμπεραίνουμε ότι είναι $(t-x)f(t)<0$ άρα $\int(t-x)f(t)dt<0$.

Άρα $\dfrac{f(x)\cdot\left(\int_0^x tf(t)dt - F(x)\cdot x\right)}{\left(\int_0^x tf(t)dt\right)^2} < 0$ και η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

γ) i) Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ άρα ισχύει

$$h(2)<h(1) \Rightarrow \frac{F(2)}{\int_0^2 tf(t)dt} < 2 \Rightarrow F(2) < 2\int_0^2 tf(t)dt \Rightarrow \int_0^2 f(t)dt < 2\int_0^2 tf(t)dt.$$

ii) $\int_0^1 F(t)dt = \int_0^1 t'F(t)dt = [tF(t)]_0^1 - \int_0^1 tF'(t)dt = F(1) - \int_0^1 tf(t)dt$. **(1)**

Από τη σχέση $h(1)=2$ συμπεραίνουμε ότι $\dfrac{F(1)}{\int_0^1 tf(t)dt} = 2 \Rightarrow \int_0^1 tf(t)dt = \dfrac{1}{2}F(1)$.

Άρα η σχέση (1) μας δίνει $\int_0^1 F(t)dt = F(1) - \int_0^1 tf(t)dt = F(1) - \dfrac{1}{2}F(1) = \dfrac{1}{2}F(1)$.

25. *Πανελλήνιες 2009 – 4ο θέμα*

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,2]$ για την οποία ι-σχύει:

$$\int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$H(x) = \int_0^x tf(t)dt, \qquad x \in (0,2],$$

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3, & x \in (0,2] \\ 6\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}, & x = 0 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα $[0,2]$. **Μονάδες 5**

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,2)$ και ότι ισχύει: $G'(x) = -\dfrac{H(x)}{x^2}$, $0 < x < 2$. **Μονάδες 6**

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\alpha \in (0,2)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $H(\alpha) = 0$. **Μονάδες 7**

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\xi \in (0,\alpha)$ τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\alpha\int_0^\xi tf(t)dt = \xi^2\int_0^\alpha f(t)dt$$

Μονάδες 7

Λύση

α) Οι συναρτήσεις $t, f(t)$ είναι συνεχείς στο $[0,2]$ άρα οι συναρτήσεις $H(x)=\int_0^x tf(t)dt$ και $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμες και επομένως συνεχείς στο $[0,2]$.

Άρα η $G(x)$ είναι συνεχής στο $(0,2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη συνέχεια στο 0.

Η συνάρτηση $H(x)$ είναι συνεχής άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} H(x)=H(0)=0$ επομένως εφαρμόζοντας τον κανόνα De l' Hospital είναι:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{H(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}H'(x)=\lim_{x\to 0^+}(xf(x))=0\cdot f(0)=0$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}G(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{H(x)}{x}-\lim\limits_{x\to 0^+}\int_0^x f(t)dt+3=0-0+3=3$.

Επίσης $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}=\dfrac{1}{2}$ άρα $G(0)=3$.

Συνοψίζοντας καταλήγουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}G(x)=G(0)=3$ άρα η G είναι συνεχής στο $[0,2]$.

β) Οι συναρτήσεις $t, f(t)$ είναι συνεχείς στο $[0,2]$ άρα οι συναρτήσεις $H(x)=\int_0^x tf(t)dt$ και $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμες στο $[0,2]$.

Επομένως η G είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $G'(x)=\left(\dfrac{H(x)}{x}\right)'-f(x)=\dfrac{H'(x)\cdot x-H(x)}{x^2}-f(x)=\dfrac{-H(x)}{x^2}$

γ) Είναι $G(2)=\dfrac{H(2)}{2}-\int_0^2 f(t)dt+3=\dfrac{1}{2}\left[H(2)-2\int_0^2 f(t)dt\right]+3=$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^2 tf(t)dt-2\int_0^2 f(t)dt\right]+3=\frac{1}{2}\int_0^2(t-2)f(t)dt+3=3$$

Επομένως για τη συνάρτηση G έχουμε ότι:

- είναι συνεχής στο $[0,2]$
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$
- $G(0)=G(2)=3$

Άρα σύμφωνα με το **Θεώρημα Rolle** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\alpha\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $G'(\alpha)=0 \Leftrightarrow -\dfrac{H(\alpha)}{\alpha^2}=0 \Leftrightarrow H(\alpha)=0$

δ) Για τη συνάρτηση G για $\alpha\in(0,2)$ έχουμε ότι:

- είναι συνεχής στο $[0,\alpha]$
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\alpha)$

Άρα σύμφωνα με **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,\alpha)$ τέτοιο ώστε:

$$G'(\xi)=\frac{G(\alpha)-G(0)}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha G'(\xi)=G(\alpha)-G(0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\alpha\frac{H(\xi)}{\xi^2}=\frac{\cancelto{0}{H(\alpha)}}{\alpha}-\int_0^\alpha f(t)dt+3-3 \Leftrightarrow -\alpha\frac{H(\xi)}{\xi^2}=-\int_0^\alpha f(t)dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha\int_0^\xi tf(t)dt=\xi^2\int_0^\alpha f(t)dt$$

26. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2009 – 4ο θέμα*

Δίνεται μία συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$f''(x)-4f'(x)+4f(x)=kxe^{2x},\ 0\le x\le 2$$

$$f'(0)=2f(0),\ f'(2)=2f(2)+12e^4,\ f(1)=e^2$$

όπου k ένας πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=3x^2-\dfrac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}},\ 0\le x\le 2$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0,2]$. **Μονάδες 4**

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f''(\xi)+4f(\xi)=6\xi e^{2\xi}+4f'(\xi)$$ **Μονάδες 6**

γ) Να αποδείξετε ότι $k=6$ και ότι ισχύει $g(x)=0$ για κάθε $x\in[0,2]$.

Μονάδες 6

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3e^{2x}$, $0\le x\le 2$. **Μονάδες 5**

ε) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}dx$. **Μονάδες 4**

Λύση

α) Για την g έχουμε ότι:

- είναι συνεχής στο $[0,2]$ ως συνάρτηση που προκύπτει από πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ ως συνάρτηση που προκύπτει από πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων
- $g(0)=g(2)=0$ γιατί $g(0)=-\frac{f'(0)-2f(0)}{1}=-\frac{2f(0)-2f(0)}{1}=0$ και

  $g(2)=3\cdot 2^2-\frac{f'(2)-2f(2)}{e^4}=12-\frac{2f(2)+12e^4-2f(2)}{e^4}=12-12=0$

άρα η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θεωρήματος Rolle** στο $[0,2]$.

β) Είναι $g'(x)=6x-\frac{[f''(x)-2f'(x)]e^{2x}-2e^{2x}[f'(x)-2f(x)]}{e^{4x}}=$

$6x-\frac{f''(x)-2f'(x)-2f'(x)+4f(x)}{e^{2x}}=6x-\frac{f''(x)-4f'(x)+4f(x)}{e^{2x}}$

Από το (α) γνωρίζουμε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0 \Rightarrow$

$6\xi-\frac{f''(\xi)-4f'(\xi)+4f(\xi)}{e^{2\xi}}=0 \Rightarrow f''(\xi)-4f'(\xi)+4f(\xi)=6\xi e^{2\xi} \Rightarrow$

$f''(\xi)+4f(\xi)=6\xi e^{2\xi}+4f'(\xi)$ **(1)**

γ) Για κάθε $x\in[0,2]$ είναι $f''(x)-4f'(x)+4f(x)=kxe^{2x}$ άρα

$f''(\xi)-4f'(\xi)+4f(\xi)=k\xi e^{2\xi}$ **(2)**

Από τις (1)–(2) συμπεραίνουμε ότι $6\xi e^{2\xi} = k\xi e^{2\xi} \Rightarrow (6-k)\xi e^{2\xi} = 0 \Rightarrow k = 6$

αφού $\xi \in (0,2)$ και $e^{2\xi} > 0$.

Άρα ισχύει $f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = 6xe^{2x}$ για κάθε $x \in [0,2]$.

Επομένως είναι $g'(x) = 6x - \dfrac{f''(x) - 4f'(x) + 4f(x)}{e^{2x}} = 6x - \dfrac{6xe^{2x}}{e^{2x}} = 0$ για κάθε $x \in [0,2]$. Άρα είναι $g(x) = c$ για κάθε $x \in [0,2]$.

Στο (α) βρήκαμε ότι $g(0) = 0$ άρα είναι $g(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,2]$.

δ) Είναι $g(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - \dfrac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}} = 0 \Rightarrow 3x^2e^{2x} - f'(x) + 2f(x) = 0 \Rightarrow$

$f'(x) - 2f(x) = 3x^2e^{2x} \Rightarrow f'(x)e^{-2x} - 2e^{-2x}f(x) = 3x^2 \Rightarrow \left(f(x)\cdot e^{-2x}\right)' = \left(x^3\right)' \Rightarrow$

$f(x)\cdot e^{-2x} = x^3 + c$.

Είναι $f(1) = e^2$. Για $x = 1$ η παραπάνω σχέση δίνει $f(1)\cdot e^{-2\cdot 1} = 1^3 + c \Rightarrow$

$e^2 \cdot e^{-2} = 1 + c \Rightarrow c = 0$. Άρα είναι $f(x)\cdot e^{-2x} = x^3 \Rightarrow f(x) = x^3 \cdot e^{2x}$.

ε) $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}dx = \int_1^2 \frac{x^3e^{2x}}{x^2}dx = \int_1^2 xe^{2x}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 x\left(e^{2x}\right)'dx =$

$$\frac{1}{2}\left(\left[xe^{2x}\right]_1^2 - \int_1^2 e^{2x}dx\right) = \frac{1}{2}\left(2e^4 - e^2 - \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_1^2\right) = \frac{1}{2}\left(2e^4 - e^2 - \frac{e^4}{2} + \frac{e^2}{2}\right) = \frac{3e^4 - e^2}{4}$$

27. *Πανελλήνιες 2010 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln\left(x^2 + 1\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f. **Μονάδες 5**

β) Να λύσετε την εξίσωση $2\left(x^2 - 3x + 2\right) = \ln\left[\dfrac{(3x-2)^2 + 1}{x^4 + 1}\right]$. **Μονάδες 7**

γ) Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$. **Μονάδες 6**

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^{1} xf(x)dx$. **Μονάδες 7**

Λύση

α) Η $\ln(x^2+1)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2x^2+2+2x}{x^2+1} = 2\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $x^2+1>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $x^2+x+1>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (Είναι $\Delta = 1-4 = -3 < 0$ άρα το τριώνυμο είναι πάντα ομόσημο του συντελεστή του x^2 δηλαδή πάντα θετικό).

Επομένως είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Είναι $2(x^2-3x+2) = \ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right] \Rightarrow$

$$2x^2 - 2(3x-2) = \ln\left[(3x-2)^2+1\right] - \ln(x^4+1) \Rightarrow$$

$$2x^2 + \ln(x^4+1) = 2(3x-2) + \ln\left[(3x-2)^2+1\right] \Rightarrow f(x^2) = f(3x-2) \overset{f:1-1}{\Rightarrow}$$

$x^2 = 3x-2 \Rightarrow x^2-3x+2 = 0 \Rightarrow x=1$ ή $x=2$.

Παρατήρηση: Η f είναι 1 – 1 γιατί είναι γνησίως μονότονη (αύξουσα) στο $\mathbb{R}$.

γ) Η $f'(x) = 2\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή συνάρτηση με

$$f''(x) = 2\frac{(2x+1)\cdot(x^2+1)-(x^2+x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$2\frac{\cancel{2x^3}+\cancel{2x}+x^2+1-\cancel{2x^3}-2x^2-\cancel{2x}}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

Είναι $f''(x) = 0 \Rightarrow -2x^2+2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Άρα

$f(-1) = 2\cdot(-1) + \ln\left((-1)^2+1\right) = -2+\ln 2$ και $f(1) = 2\cdot(1) + \ln\left((1)^2+1\right) = 2+\ln 2$

Είναι $(x^2+1)^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα το πρόσημο της f'' εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμητή που είναι τριώνυμο με αρνητικό συντελεστή για το x^2.

Από τον διπλανό πίνακα συμπεραίνουμε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής, τα $A(-1,-2+\ln 2)$ και $B(1,2+\ln 2)$.

x	$-\infty$ $\quad -1$	1	$+\infty$
f''	$-$	$+$	$-$
f			

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(-1,-2+\ln 2)$ έχει εξίσωση

$$y-(-2+\ln 2)=f'(-1)\cdot(x+1)\Rightarrow y+2-\ln 2=2\frac{(-1)^2+(-1)+1}{(-1)^2+1}(x+1)\Rightarrow$$

$$y+2-\ln 2=x+1\Rightarrow y=x+\ln 2-1.$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $B(1,2+\ln 2)$ έχει εξίσωση

$$y-(2+\ln 2)=f'(1)\cdot(x-1)\Rightarrow y-2-\ln 2=2\frac{1^2+1+1}{1^2+1}(x-1)\Rightarrow$$

$$y-2-\ln 2=2\cdot\frac{3}{2}(x-1)\Rightarrow y-2-\ln 2=3x-3\Rightarrow y=3x+\ln 2-1.$$

Η πρώτη εφαπτομένη τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $y=0+\ln 2-1=\ln 2-1$.

Η δεύτερη εφαπτομένη τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $y=3\cdot 0+\ln 2-1=\ln 2-1$.

Επομένως οι δύο εφαπτομένες τέμνονται στο $(0,\ln 2-1)$.

δ) Είναι $I=\int_{-1}^{1}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}x\left(2x+\ln\left(x^2+1\right)\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(2x^2+x\ln\left(x^2+1\right)\right)dx=$

$$\int_{-1}^{1}2x^2dx+\int_{-1}^{1}x\ln\left(x^2+1\right)dx=\left[2\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}x\ln\left(x^2+1\right)dx=$$

$$\frac{2}{3}\left(1^3-(-1)^3\right)+\int_{-1}^{1}x\ln\left(x^2+1\right)dx=\frac{4}{3}+\int_{-1}^{1}x\ln\left(x^2+1\right)dx$$

Στο $\int_{-1}^{1}x\ln\left(x^2+1\right)dx$ θέτουμε $u=x^2+1$. Είναι $du=2xdx$. Όταν $x\to -1$ τότε $u\to 2$ και όταν $x\to 1$ τότε $u\to 2$.

Άρα είναι $\int_{-1}^{1}x\ln\left(x^2+1\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}2x\ln\left(x^2+1\right)dx=\int_{2}^{2}\ln u\,du=0$.

Επομένως $I=\frac{4}{3}$

28. *Πανελλήνιες 2010 – 4ο θέμα*

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x)\neq x \quad \text{και} \quad f(x)-x=3+\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)-x}$, $x\in\mathbb{R}$. **Μονάδες 5**

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=(f(x))^2-2xf(x)$, $x\in\mathbb{R}$, είναι σταθερή. **Μονάδες 7**

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$, $x\in\mathbb{R}$. **Μονάδες 6**

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_x^{x+1} f(t)dt<\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Λύση

α) Είναι $f(x)-x=3+\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt \Leftrightarrow f(x)=x+3+\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$. **(1)**

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα η συνάρτηση $\dfrac{t}{f(t)-t}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Επομένως η $\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Από την (1) προκύπτει $f'(x)=1+\dfrac{x}{f(x)-x}=\dfrac{f(x)-x}{f(x)-x}+\dfrac{x}{f(x)-x}=\dfrac{f(x)}{f(x)-x}$.

β) Είναι $g'(x)=2f(x)\cdot f'(x)-2f(x)-2xf'(x)=2f'(x)\cdot(f(x)-x)-2f(x)=$

$2\dfrac{f(x)}{\cancel{f(x)-x}}\cdot\cancel{(f(x)-x)}-2f(x)=0$ άρα $g(x)=c$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Για $x=0$

η σχέση $f(x)-x=3+\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$ δίνει $f(0)-0=3+\int_0^0 \frac{t}{f(t)-t}dt \Rightarrow f(0)=3$

άρα από τη σχέση $g(x)=(f(x))^2-2xf(x)$ προκύπτει

$g(0)=(f(0))^2-2\cdot 0\cdot f(0)=3^2=9$ οπότε $g(x)=9$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g(x)=9\Rightarrow (f(x))^2-2xf(x)=9\Rightarrow$

$(f(x))^2-2xf(x)+x^2=x^2+9\Rightarrow (f(x)-x)^2=x^2+9\Rightarrow |f(x)-x|=\sqrt{x^2+9}$. **(2)**

Έστω η συνάρτηση $h(x)=f(x)-x$. Είναι $f(x)\neq x\Leftrightarrow f(x)-x\neq 0\Leftrightarrow h(x)\neq 0$ και η $h(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $h(0)=f(0)-0=3>0$ άρα $h(x)=f(x)-x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $f(x)-x=\sqrt{x^2+9}\Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$.

δ) Είναι $f'(x)=1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}=\frac{2\sqrt{x^2+9}+2x}{2\sqrt{x^2+9}}=\frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}}$.

Ο παρονομαστής είναι πάντα θετικός. Για τον αριθμητή έχουμε:

Είναι $\sqrt{x^2+9}+x>\sqrt{x^2}+x>|x|+x\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

<u>1^{ος} τρόπος</u>

Στο ολοκλήρωμα $\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$ θέτουμε $u=t-1$. Άρα $du=dx$.

Όταν $t\to x+1$ το $u\to x+1-1=x$ και όταν $t\to x+2$ το $u\to x+2-1=x+1$.

Επομένως $\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt=\int_x^{x+1} f(u+1)du \overset{u\to x}{=} \int_x^{x+1} f(t+1)dt$.

Άρα $\int_x^{x+1} f(t)dt<\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt\Leftrightarrow \int_x^{x+1} f(t)dt<\int_x^{x+1} f(t+1)dt$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα

$t<t+1\Leftrightarrow f(t)<f(t+1)\Leftrightarrow f(t)-f(t+1)<0\Leftrightarrow \int_x^{x+1}[f(t)-f(t+1)]dt<\int_x^{x+1} 0dt\Leftrightarrow$
$\int_x^{x+1} f(t)dt-\int_x^{x+1} f(t+1)dt<0\Leftrightarrow \int_x^{x+1} f(t)dt<\int_x^{x+1} f(t+1)dt$

2ος τρόπος

Έστω η συνάρτηση $F(u)=\int_1^u f(t)dt$ για κάθε $u\in\mathbb{R}$.

Για την F ξέρουμε ότι είναι:

- συνεχής στο $[x,x+1]$
- παραγωγίσιμη στο $(x,x+1)$ με $F'(x)=f(x)$

άρα σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει $\xi_1\in(x,x+1)$ ώστε

$$F'(\xi_1)=\frac{F(x+1)-F(x)}{x+1-x}=F(x+1)-F(x)=\int_1^{x+1}f(t)dt-\int_1^{x}f(t)dt.$$

Ομοίως για την F ξέρουμε ότι είναι:

- συνεχής στο $[x+1,x+2]$
- παραγωγίσιμη στο $(x+1,x+2)$ με $F'(x)=f(x)$

άρα σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει $\xi_2\in(x+1,x+2)$ ώστε

$$F'(\xi_2)=\frac{F(x+2)-F(x+1)}{x+2-x-1}=F(x+2)-F(x+1)=\int_1^{x+2}f(t)dt-\int_1^{x+1}f(t)dt.$$

Είναι $\xi_1<\xi_2\overset{f:\uparrow}{\Rightarrow}f(\xi_1)<f(\xi_2)\Rightarrow\int_1^{x+1}f(t)dt-\int_1^{x}f(t)dt<\int_1^{x+2}f(t)dt-\int_1^{x+1}f(t)dt\Rightarrow$

$$\int_1^{x+1}f(t)dt+\int_x^{1}f(t)dt<\int_1^{x+2}f(t)dt+\int_{x+1}^{1}f(t)dt\Rightarrow\int_x^{x+1}f(t)dt<\int_{x+1}^{x+2}f(t)dt$$

3ος τρόπος

Έστω η συνάρτηση $F(u)=\int_0^{x+u} f(t)dt$ για κάθε $u\in\mathbb{R}$.

Για την F ξέρουμε ότι είναι:

- συνεχής στο $[0,1]$
- παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $F'(x)=f(x)$

άρα σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει $\xi_1\in(0,1)$ ώστε

$$F'(\xi_1)=F(1)-F(0)=\int_0^{x+1}f(t)dt-\int_0^{x}f(t)dt=\int_x^{x+1}f(t)dt.$$

Ομοίως για την F ξέρουμε ότι είναι:

- συνεχής στο $[1,2]$

- παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με $F'(x)=f(x)$

άρα σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει $\xi_2 \in (1,2)$ ώστε

$F'(\xi_2)=F(2)-F(1)=\int_0^{x+2} f(t)dt-\int_0^{x+1} f(t)dt=\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$.

Είναι $\xi_1<\xi_2 \overset{f:\uparrow}{\Rightarrow} f(\xi_1)<f(\xi_2) \Rightarrow \int_1^{x+1} f(t)dt-\int_1^{x} f(t)dt<\int_1^{x+2} f(t)dt-\int_1^{x+1} f(t)dt \Rightarrow$

$\int_1^{x+1} f(t)dt+\int_x^{1} f(t)dt<\int_1^{x+2} f(t)dt+\int_{x+1}^{1} f(t)dt \Rightarrow \int_x^{x+1} f(t)dt<\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$

29. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2010 – 4ο θέμα*

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=1$ και $f'(0)=0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)\ge 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. **Μονάδες 4**

β) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\int_0^1 f(xt)dt+x^3}{\eta\mu^3 x}=+\infty$. **Μονάδες 6**

Αν επιπλέον δίνεται ότι $f'(x)+2x=2x\cdot\left(f(x)+x^2\right)$, $x\in\mathbb{R}$, τότε:

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{x^2}-x^2$, $x\in\mathbb{R}$. **Μονάδες 8**

δ) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$$h(x)=\int_x^{x+2} f(t)dt,\ x\ge 0$$

και να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την ανίσωση

$$\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t)dt+\int_6^4 f(t)dt<0$$ **Μονάδες 7**

Λύση

α) Η εφαπτομένη της C_f στο $(0,f(0))$ έχει εξίσωση $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow$

$y-1=0\Rightarrow y=1$.

Η f είναι κυρτή άρα η γραφική της παράσταση βρίσκεται «πάνω» από την εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο της C_f, δηλαδή $f(x)\ge 1$.

β) Θέτουμε $u = xt$. Άρα όταν $t \to 0$ τότε $u \to 0$ και όταν $t \to 1$ τότε $u \to x$. Ακόμη $du = xdt$. Επομένως:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\int_0^1 f(xt)\,dt + x^3}{\eta\mu^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\,du + x^3}{\eta\mu^3 x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\int_0^x f(u)\,du}{\eta\mu^3 x} + \frac{x^3}{\eta\mu^3 x}\right)$$

Το $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\,du}{\eta\mu^3 x}$ είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ και υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x f(u)\,du\right)'}{\left(\eta\mu^3 x\right)'}$. Επομένως σύμφωνα με τον **κανόνα De L' Hospital** είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\,du}{\eta\mu^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x f(u)\,du\right)'}{\left(\eta\mu^3 x\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{3\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x} = +\infty. \qquad \textbf{(1)}$$

Είναι $\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\eta\mu^3 x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\eta\mu x}\right)^3 = \left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}}\right)^3 = 1^3 = 1$. **(2)**

Από τα (1) και (2) προκύπτει ότι $\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\int_0^1 f(xt)\,dt + x^3}{\eta\mu^3 x} = +\infty + 1 = +\infty$.

γ) Θέτουμε $g(x) = f(x) + x^2$ άρα $g'(x) = f'(x) + 2x$.

Από τη δοσμένη σχέση προκύπτει $g'(x) = 2xg(x) \Rightarrow g'(x) - 2xg(x) = 0 \Rightarrow$

$$e^{-x^2}g'(x) - 2xe^{-x^2}g(x) = 0 \Rightarrow \left[e^{-x^2}g(x)\right]' = 0 \Rightarrow e^{-x^2}g(x) = c \Rightarrow g(x) = ce^{x^2}$$

Για $x = 0$ προκύπτει $g(0) = c\cdot e^0 \Rightarrow f(0) + 0 = c \Rightarrow c = 1$.

Άρα $g(x) = e^{x^2}$ και $f(x) = e^{x^2} - x^2$.

δ) Είναι $h(x) = \int_x^{x+2} f(t)\,dt = \int_0^{x+2} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt$ άρα $h'(x) = f(x+2) - f(x)$.

Είναι $f'(x) = 2xe^{x^2} - 2x = 2x\left(e^{x^2} - 1\right)$. Άρα $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x\left(e^{x^2} - 1\right) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x=0 \\ e^{x^2}-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ e^{x^2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2=0 \end{cases} \Rightarrow x=0.$$

Για $x>0$ είναι $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Επομένως είναι $x+2>x \overset{f:\uparrow}{\Rightarrow} f(x+2)>f(x) \Rightarrow f(x+2)-f(x)>0 \Rightarrow h'(x)>0$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Είναι $\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t)dt+\int_6^4 f(t)dt<0 \Rightarrow \int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t)dt<-\int_6^4 f(t)dt \Rightarrow$

$\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t)dt<\int_4^6 f(t)dt \Rightarrow h(x^2+2x+1)<h(4) \overset{h:\uparrow}{\Rightarrow} x^2+2x+1<4 \Rightarrow$

$x^2+2x-3<0$.

Η x^2+2x-3 έχει διακρίνουσα $\Delta=4+12=16>0$ άρα $x=\dfrac{-2\pm4}{2} \Rightarrow$ $x=-3$ ή $x=1$. Άρα $x^2+2x-3<0 \Rightarrow x\in(-3,1)$.

30. *Πανελλήνιες 2011 – 4ο θέμα*

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, οι οποίες για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

i) $f(x)>0$ **και** $g(x)>0$

ii) $\dfrac{1-f(x)}{e^{2x}}=\int_0^{-x}\dfrac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$

iii) $\dfrac{1-g(x)}{e^{2x}}=\int_0^{-x}\dfrac{e^{2t}}{f(x+t)}dt$

α) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ότι $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. **Μονάδες 9**

β) Να αποδείξετε ότι: $f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$. **Μονάδες 4**

γ) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln f(x)}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}$. **Μονάδες 5**

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x)=\int_1^x f(t^2)\,dt$, τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x=1$. **Μονάδες 7**

Λύση

α) Από τις ii) και iii) προκύπτει ότι:

$f(x)=1-e^{2x}\int_0^{-x}\dfrac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$ και $g(x)=1-e^{2x}\int_0^{-x}\dfrac{e^{2t}}{f(x+t)}dt$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $\dfrac{e^{2t}}{g(x+t)}$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών άρα η $\int_0^{-x}\dfrac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$ είναι παραγωγίσιμη. Άρα και η $e^{2x}\int_0^{-x}\dfrac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$ είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη. Ομοίως και η g.

Θέτουμε $u=x+t\Rightarrow\left|\begin{array}{l}du=dt\\ t=0\to u=x\\ t=-x\to u=0\end{array}\right.$.

Άρα είναι $f(x)=1-e^{2x}\int_x^0\dfrac{e^{2u-2x}}{g(u)}du=1+\int_0^x\dfrac{e^{2u}}{g(u)}du$ και $f'(x)=\dfrac{e^{2x}}{g(x)}$ με $x\in\mathbb{R}$.

Ομοίως $g(x)=1-e^{2x}\int_x^0\dfrac{e^{2u-2x}}{f(u)}du=1+\int_0^x\dfrac{e^{2u}}{f(u)}du$ και $g'(x)=\dfrac{e^{2x}}{f(x)}$ με $x\in\mathbb{R}$.

Από τα παραπάνω προκύπτει $f'(x)\cdot g(x)=e^{2x}$ και $f(x)\cdot g'(x)=e^{2x}$.

Αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει $f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)=0\Rightarrow$

$\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}=0 \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0$ άρα από τις **συνέπειες του Θ.Μ.Τ.**

προκύπτει $\frac{f(x)}{g(x)}=c \Rightarrow f(x)=cg(x)$.

Για $x=0$ είναι $f(0)=cg(0) \Rightarrow c=1$ άρα $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Ισχύει $f'(x)\cdot g(x)=e^{2x}$ άρα $f'(x)\cdot f(x)=e^{2x} \Rightarrow 2f'(x)\cdot f(x)=2e^{2x} \Rightarrow$

$\left(f^2(x)\right)'=\left(e^{2x}\right)'$ άρα από με τις **συνέπειες του Θ.Μ.Τ.** προκύπτει $f^2(x)=e^{2x}+c_1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Για $x=0$ είναι $f^2(0)=1+c_1 \Rightarrow c_1=0$ άρα $f^2(x)=e^{2x}$. Όμως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)>0$ άρα $f(x)=e^x$.

γ) Για $x<0$ είναι $\frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}}=\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}=\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$. Θέτουμε $t=\frac{1}{x}$ άρα όταν $x\to 0^-$

τότε $t\to-\infty$ και το προηγούμενο κλάσμα είναι ίσο με $\frac{e^{-t}}{t}$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\ln e^x}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{-t}}{t}\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{\underset{\text{D.L.H.}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-e^{-t}\right)=-\infty$.

δ) Η $f(t^2)$ είναι συνεχής άρα η F είναι παραγωγίσιμη με

$F'(x)=\left(\int_1^x f(t^2)dt\right)'=f(x^2)=e^{x^2}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η $F\uparrow\mathbb{R}$.

Επομένως για $x\le 1$ είναι $F(x)\le F(1)\Rightarrow F(x)\le 0$.

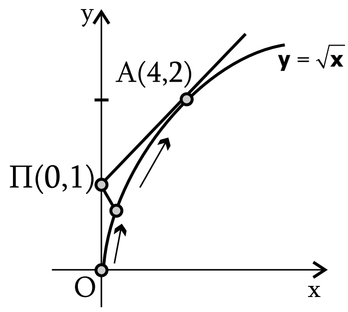
Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$E(\Omega)=\int_0^1 -F(x)dx=-\int_0^1 F(x)dx=-\int_0^1 x'F(x)dx=-\left[xF(x)\right]_0^1+\int_0^1 xF'(x)dx=$

$-1\cdot F(1)+0\cdot F(0)+\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(e^{x^2}\right)'dx=\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1=\frac{e-1}{2}$ τ.μ.

31. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2011 – 3ο θέμα*

Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=\sqrt{x}$, $x \geq 0$. Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση $\Pi(0,1)$ ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχή Ο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t, $t \geq 0$ είναι $x'(t)=16\,m/min$.

α) Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμη t, δίνεται από τον τύπο: $x(t)=16t$. **Μονάδες 5**

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το $A(4,2)$ και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή. **Μονάδες 6**

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που διαγράφει η οπτική ακτίνα ΠΜ του παρατηρητή από το σημείο Ο μέχρι το σημείο Α.

Μονάδες 6

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in \left(0,\frac{1}{4}\right)$, κατά την οποία η απόσταση $d=(\Pi M)$ του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη. **Μονάδες 8**

Να θεωρήσετε ότι το κινητό Μ και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων Oxy.

Λύση

α) Είναι $x'(t)=16 \Rightarrow x'(t)=(16t)' \Rightarrow x(t)=16t+c$, με $c \in \mathbb{R}$.

Είναι $x(0)=0 \Rightarrow 16\cdot 0+c=0 \Rightarrow c=0$. Άρα είναι $x(t)=16t$.

β) Για την f ισχύει: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και $f''(x)=-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}<0$ άρα η f είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$.

Η εφαπτομένη της C_f σε σημείο της $(x_0,f(x_0))$ έχει εξίσωση $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Rightarrow y-\sqrt{x_0}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)$.

Η εφαπτομένη διέρχεται από το $(0,1)$ άρα οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν την εξίσωσή της. Επομένως είναι $1-\sqrt{x_0}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}(0-x_0)\Rightarrow$

$$2\sqrt{x_0}-2x_0=-x_0\Rightarrow 2\sqrt{x_0}-x_0=0\Rightarrow \sqrt{x_0}\left(2-\sqrt{x_0}\right)=0\Rightarrow \begin{cases} x_0=0 \\ 2-\sqrt{x_0}=0\Rightarrow x_0=4 \end{cases}$$

Είναι $f(0)=0$ και $f(4)=2$.

Από το $(0,1)$ διέρχονται δύο εφαπτομένες, η μία στο $(0,0)$ και η άλλη στο $(4,2)$.

Η f είναι κυρτή άρα η C_f βρίσκεται «πάνω» από την εφαπτομένη της σε κάθε σημείο, άρα και στο $(4,2)$.

Η οπτική επαφή διαρκεί όσο το κινητό βρίσκεται βρίσκεται στο τόξο ΟΑ.

Στο σημείο Ο βρίσκεται όταν $x(t)=0\Rightarrow 16t=0\Rightarrow t=0$.

Στο σημείο Α βρίσκεται όταν $x(t)=4\Rightarrow 16t=4\Rightarrow t=\dfrac{1}{4}$.

Άρα η οπτική επαφή διαρκεί $\dfrac{1}{4}$ min.

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $(4,2)$ είναι η $y-2=\dfrac{1}{4}(x-4)\Rightarrow y=\dfrac{x}{4}+1$.

Είναι $E(\Omega)=\int_0^{\frac{1}{4}}\left(\dfrac{x}{4}+1-\sqrt{x}\right)dx=\left[\dfrac{x^2}{8}+x-\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\dfrac{16}{8}+4-\dfrac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}$ τ.μ.

δ) Είναι $ΠΜ=d(x)=\sqrt{(0-x)^2+\left(1-\sqrt{x}\right)^2}=\sqrt{x^2+1-2\sqrt{x}+x}$.

Έστω η συνάρτηση $h(x)=x^2+x-2\sqrt{x}+1$ με $x\in[0,4]$.

Είναι $h'(x)=2x+1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{2x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$.

Το πρόσημο της $h'(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμητή.

Έστω η συνάρτηση $t(x)=2x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1$. Για την $t(x)$ ξέρουμε ότι είναι:

- συνεχής στο $[0,4]$
- $t(0)\cdot t(4)=-1\cdot 17<0$

άρα σύμφωνα με το **Θεώρημα Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,4)$ τέτοιο ώστε $t(x_0)=0\Rightarrow h'(x_0)=0$.

Είναι $t'(x)=3\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0$ άρα η t είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,4]$.

Επομένως για $x<x_0$ είναι $t(x)<t(x_0)=0$ και για $x>x_0$ είναι $t(x)>t(x_0)=0$

Από τον διπλανό πίνακα συμπεραίνουμε ότι η h παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0.

x	0	x_0	4
h'	$-$		$+$
h	$\searrow$		$\nearrow$

Επομένως υπάρχει $x_0\in(0,4)$ τέτοιο ώστε η h, άρα και η d, να παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0.

Είναι $0<x_0(t)<4\Rightarrow 0<16t_0<4\Rightarrow 0<4t_0<1\Rightarrow 0<t_0<\dfrac{1}{4}$.

Άρα υπάρχει κάποια χρονική στιγμή $t_0\in\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$ τέτοια ώστε η απόσταση του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη.

32. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2011 – 4ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι 3 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

i) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1+f(0)$

ii) $f'(0) < f(1) - f(0)$ και

iii) $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$. Μονάδες 3

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Μονάδες 5

Αν επιπλέον $g(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

γ) Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{xg(x)}$. Μονάδες 6

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(x)dx > 2$. Μονάδες 5

ε) Αν το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 1$ είναι $E(\Omega) = e - \dfrac{5}{2}$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 f(x)dx$$

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_0^{\xi} f(t)dt = 2$$

Μονάδες 6

Λύση

α) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.

Θέτουμε $h(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, άρα $f(x) = x \cdot h(x)$.

(i) → $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 1 + f(0)$. Άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x \cdot h(x) = \lim\limits_{x\to 0} x \cdot (1 + f(0)) = 0$.

Η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη, άρα $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

(i) → $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 1 + \cancel{f(0)}^{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \Rightarrow f'(0) = 1$.

Επομένως η εφαπτομένη έχει εξίσωση $y - 0 = 1 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = x$.

β) Η $f''(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη και $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η $f''(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Έστω ότι η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$. Άρα θα είναι $f''(x) < 0$, δηλαδή η f' είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Όμως αν εφαρμόσουμε το **Θ.Μ.Τ.** στην συνεχή και παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[0,1]$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} \Rightarrow$ $f'(\xi) = f(1) - f(0)$.

iii) → $f'(0) < f'(\xi)$ για $0 < \xi$. Άτοπο, γιατί η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Επομένως η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

γ) Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, άρα η C_f βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική παράσταση της εφαπτομένης της σε οποιοδήποτε σημείο της, άρα και στο $(0,0)$.

Επομένως είναι $f(x) \geq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$).

Άρα $f(x) - x \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu x}{xg(x)} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\dfrac{1}{g(x)} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{g(x)} = 1\cdot(+\infty) = +\infty$

δ) Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $f(x) > x \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx > \int_0^2 xdx = \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2$.

ε) Από την εκφώνηση συμπεραίνουμε ότι $E(\Omega) = \int_0^1 g(x) = e - \dfrac{5}{2}$ τ.μ.

Είναι $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (g(x)+x)dx = \int_0^1 g(x)dx + \int_0^1 xdx = e - \dfrac{5}{2} + \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^1 =$

$e - \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2} = e - 2$ τ.μ.

Έστω η συνάρτηση $K(t) = \int_0^x f(t)dt - 2$, $x \in [1,2]$. Για την Κ ξέρουμε ότι είναι:

- συνεχής στο $[1,2]$ γιατί η f είναι παραγωγίσιμη, άρα η $\int_0^x f(t)dt$ συνεχής

- $K(1)\cdot K(2)=\int_0^1 f(t)dt\cdot\int_0^2 f(t)dt=(e-2-2)\cdot\int_0^2 f(t)dt=(e-4)\cdot\int_0^2 f(t)dt$

  που είναι αρνητικό γιατί $e-4<0$

επομένως σύμφωνα με το **Θεώρημα Bolzano** υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε

$K(\xi)=0\Rightarrow\int_0^{\xi} f(t)dt-2=0\Rightarrow\int_0^{\xi} f(t)dt=2$

33. *Πανελλήνιες 2012– 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\cdot\ln x-1$, $x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f. **Μονάδες 6**

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$, $x>0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες. **Μονάδες 6**

γ) Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (β), να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$, τέτοιο ώστε

$$f'(x_0)+f(x_0)=2012$$ **Μονάδες 6**

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x)+1$ με $x>0$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=e$. **Μονάδες 7**

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=\left[(x-1)\ln x-1\right]'=\ln x+\frac{x-1}{x}=\ln x+1-\frac{1}{x}$$

<u>1ος τρόπος</u>

$f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$ για κάθε $x>0$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Είναι $f'(1)=0$ άρα:

- Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $f'(x) < f'(1) = 0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $Δ_1$.
- Για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > f'(1) = 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $Δ_2$.

2ος τρόπος

- Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $\ln x < 0$ και $\frac{x-1}{x} < 0$ άρα $f'(x) < 0$. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $Δ_1$.
- Για κάθε $x > 1$ $\ln x > 0$ και $\frac{x-1}{x} > 0$ άρα $f'(x) > 0$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $Δ_2$.

Σύνολο τιμών

Είναι $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left[(x-1)\ln x - 1\right] = (-1)\cdot(-\infty) - 1 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[(x-1)\ln x - 1\right] = (+\infty)\cdot(+\infty) - 1 = +\infty$ και

$f(1) = (1-1)\cdot\ln 1 - 1 = 0 - 1 = -1$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $Δ_1 = (0,1]$ άρα το σύνολο τιμών της είναι το $f(Δ_1) = \left[f(1), \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)\right) = [-1, +\infty)$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $Δ_2 = [1, +\infty)$ άρα το σύνολο τιμών της είναι το $f(Δ_2) = \left(f(1), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right] = (-1, +\infty]$.

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $f(Δ_1) \cup f(Δ_2) = [-1, +\infty)$

β) Είναι $x^{x-1} = e^{2013} \Rightarrow \ln x^{x-1} = \ln e^{2013} \Rightarrow (x-1)\ln x = 2013 \ln e \Rightarrow$

$(x-1)\ln x = 2013 \Rightarrow (x-1)\ln x - 1 = 2013 - 1 \Rightarrow f(x) = 2012$

- Το 2012 ανήκει στο $f(Δ_1)$ και η f είναι 1–1 στο $Δ_1$ ως γνησίως φθίνουσα άρα η εξίσωση $f(x) = 2012$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $Δ_1$.
- Το 2012 ανήκει στο $f(Δ_2)$ και η f είναι 1–1 στο $Δ_2$ ως γνησίως αύξουσα άρα η εξίσωση $f(x) = 2012$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $Δ_2$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x)=2012$, άρα και η $x^{x-1}=e^{2013}$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

γ) <u>1^{ος} τρόπος</u>

Οι x_1,x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης του προηγούμενου ερωτήματος άρα ισχύει $f(x_1)=f(x_2)=2012$. Επίσης είναι $x_1<x_2$ άρα $x_1\in\Delta_1\Rightarrow f'(x_1)<0$ και $x_2\in\Delta_2\Rightarrow f'(x_2)>0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f'(x)+f(x)-2012$ με $x\in[x_1,x_2]$.

Είναι $g(x_1)=f'(x_1)+f(x_1)-2012=f'(x_1)<0$ και

$g(x_2)=f'(x_2)+f(x_2)-2012=f'(x_2)<0$

Για την g ισχύει ότι:

- είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως πράξεις συνεχών
- $g(x_1)\cdot g(x_2)<0$

Επομένως από το **Θεώρημα Bolzano** προκύπτει ότι υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)+f(x_0)-2012=0\Leftrightarrow f'(x_0)+f(x_0)=2012$.

<u>2^{ος} τρόπος</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^{x}\left(f(x)-2012\right)$ με $x\in[x_1,x_2]$.

Είναι $h(x_1)=e^{x_1}\left(f(x_1)-2012\right)=0$ και $h(x_2)=e^{x_2}\left(f(x_2)-2012\right)=0$.

Για την h ισχύει ότι:

- είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων
- είναι $h(x_1)=h(x_2)$

Επομένως από το **Θεώρημα Rolle** προκύπτει ότι υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $h'(x_0)=0\Rightarrow\left[e^{x_0}\left(f(x_0)-2012\right)\right]'=0\Rightarrow$

$\left(e^{x_0}\right)'\left(f(x_0)-2012\right)+e^{x_0}\left(f(x_0)-2012\right)'=0\Rightarrow$

$$e^{x_0}f(x_0)-e^{x_0}2012+e^{x_0}f'(x_0)=0 \Rightarrow e^{x_0}\left(f'(x_0)+f(x_0)-2012\right)=0 \Rightarrow$$

$$f'(x_0)+f(x_0)-2012=0 \Rightarrow f'(x_0)+f(x_0)=2012$$

δ) Είναι $g(x)=f(x)+1=(x-1)\ln x$ για κάθε $x>0$.

Είναι $g(x)=0 \Rightarrow (x-1)\ln x=0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \text{ή} \\ \ln x=0 \end{cases} \Rightarrow x=1$.

Επομένως τα όρια ολοκλήρωσης στο ολοκλήρωμα υπολογισμού του ζητούμενου εμβαδού είναι το 1 και το e.

Η $g(x)$ στο $[1,e]$ είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Το σύνολο τιμών της f είναι το $[-1,+\infty)$ δηλαδή είναι $f(x)\geq -1$.

Άρα $g(x)=f(x)+1\geq -1+1=0 \Rightarrow g(x)\geq 0$ για $x>0$ άρα και για $x\in[1,e]$.

Το ζητούμενο εμβαδό είναι το

$$E=\int_1^e g(x)dx=\int_1^e (x-1)\ln x dx=\int_1^e \left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)'\ln x dx=$$

$$\left[\frac{(x-1)^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e \frac{(x-1)^2}{2}(\ln x)'dx=\frac{(e-1)^2}{2}\ln e-\frac{(1-1)^2}{2}\ln 1-\int_1^e \frac{(x-1)^2}{2x}dx=$$

$$\frac{(e-1)^2}{2}-\int_1^e \frac{x^2-2x+1}{2x}dx=\frac{(e-1)^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e\left(x-2+\frac{1}{x}\right)dx=$$

$$\frac{(e-1)^2}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-2x+\ln x\right]_1^e=\frac{(e-1)^2}{2}-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{e^2}{2}-2e+\ln e\right)-\left(\frac{1^2}{2}-2\cdot 1+\ln 1\right)\right]=$$

$$\frac{e^2-2e+1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2}-2e+1-\frac{1}{2}+2\right)=\frac{2e^2-4e+2-e^2+4e+1-6}{4}=\frac{e^2-3}{4}\text{ τ.μ.}$$

34. *Πανελλαδικές 2012 – 4ο θέμα*

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x>0$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

- **$f(x)\neq 0$**

- $\int_{1}^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e}$
- $\ln x - x = -\left(\int_{1}^{x} \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)\cdot|f(x)|$

α) **Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.** **Μονάδες 10**

Αν είναι $f(x)=e^{-x}(\ln x - x)$, $x>0$, **τότε:**

β) **Να υπολογίσετε το όριο:** $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(f(x))^2 ημ\frac{1}{f(x)} - f(x)\right]$. **Μονάδες 5**

γ) **Με τη βοήθεια της ανισότητας** $\ln x \leq x-1$, **που ισχύει για κάθε** $x>0$, **να αποδείξετε ότι η συνάρτηση**

$$F(x)=\int_{α}^{x} f(t)dt,\ x>0$$

όπου $α>0$, **είναι κυρτή.** **Μονάδες 2**

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$F(x)+F(3x)>2F(2x),\ \text{για κάθε } x>0$$ **Μονάδες 4**

δ) **Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός** $β>0$. **Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό** $ξ\in(β,2β)$ **τέτοιο ώστε:**

$$F(β)+F(3β)=2F(ξ)$$ **Μονάδες 4**

Λύση

α) Είναι $\int_{1}^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e} \Leftrightarrow \int_{1}^{x^2-x+1} f(t)dt - \frac{x-x^2}{e} \geq 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\int_{1}^{x^2-x+1} f(t)dt - \frac{x-x^2}{e}$ για κάθε $x>0$ για την οποία προφανώς ισχύει

- $g(x)\geq 0$ για κάθε $x>0$
- $g(1)=\int_{1}^{1^2-1+1} f(t)dt - \frac{1-1^2}{e} = 0-\frac{0}{e}=0$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ άρα η συνάρτηση $\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη. Επομένως και η συνάρτηση $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Άρα η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=f(x^2-x+1)\cdot(2x-1)-\frac{1}{e}(1-2x)$.

Για την συνάρτηση g που είναι ορισμένη στο $(0,+\infty)$ ισχύει:

- το 1 είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος
- παρουσιάζει ακρότατο στο 1
- είναι παραγωγίσιμη στο 1

Επομένως σύμφωνα με το **Θεώρημα Fermat** ισχύει $g'(1)=0 \Rightarrow$

$f(1^2-1+1)\cdot(2\cdot1-1)-\frac{1}{e}(1-2\cdot1)=0 \Rightarrow f(1)\cdot1+\frac{1}{e}=0 \Rightarrow f(1)=-\frac{1}{e}$.

Πρόσημο της f

Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Επομένως η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$ και επειδή είναι $f(1)=-\frac{1}{e}$ συμπεραίνουμε ότι $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Παραγωγισιμότητα της f

Είναι $f(x)<0 \Rightarrow |f(x)|=-f(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Άρα $\ln x - x=\left(\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)\cdot f(x)$. **(1)**

Για κάθε $x>0$ ισχύει $\ln x\le x-1$ άρα $\ln x<x \Rightarrow \ln x-x<0$. Επομένως στην παραπάνω σχέση και το δεύτερο μέλος είναι διάφορο του μηδενός.

Άρα ισχύει $f(x)=\dfrac{\ln x-x}{\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e}$ από την οποία συμπεραίνουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Τύπος της f

(1) → $\ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)\cdot f(x) \overset{f(x)\neq 0}{\Rightarrow} \frac{\ln x - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e$

Και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης είναι παραγωγίσιμα.

Παραγωγίζουμε και προκύπτει:

$$\left(\frac{\ln x - x}{f(x)}\right)' = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)' \Rightarrow \left(\frac{\ln x - x}{f(x)}\right)' = \frac{\ln x - x}{f(x)} \qquad \textbf{(2)}$$

Εφαρμογή του σχ. βιβλίου συμπεραίνει ότι η λύση της εξίσωσης $f'(x) = f(x)$ είναι η $f(x) = c\cdot e^x$.

Άρα από την (2) προκύπτει ότι $\frac{\ln x - x}{f(x)} = c\cdot e^x$ όπου $c \in \mathbb{R}$.

Για $x = 1$ προκύπτει $\frac{\ln 1 - 1}{f(1)} = c\cdot e^1 \Rightarrow \frac{-1}{-\frac{1}{e}} = c\cdot e \Rightarrow e = c\cdot e \Rightarrow c = 1$.

Επομένως $\frac{\ln x - x}{f(x)} = e^x \Rightarrow f(x) = \frac{\ln x - x}{e^x} \Rightarrow f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$ για $x > 0$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{-x}(\ln x - x)\right) = 1\cdot(-\infty - 0) = -\infty$.

Στο ζητούμενο όριο θέτουμε $\frac{1}{f(x)} = u$. Άρα $u \to 0$. Το όριο γράφεται

$$\lim_{u\to 0}\left(\frac{\eta\mu u}{u^2} - \frac{1}{u}\right) = \lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u - u}{u^2} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{u\to 0}\frac{(\eta\mu u - u)'}{(u^2)'} = \lim_{u\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{2u} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

γ) Είναι $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x > 0$ και $F''(x) = f'(x) = \left(e^{-x}\cdot(\ln x - x)\right)' =$

$$-e^{-x}\cdot(\ln x - x) + e^{-x}\cdot\left(\frac{1}{x} - 1\right) = e^{-x}\cdot\left(\frac{1}{x} - 1 + x - \ln x\right)$$

Είναι $\ln x \le x - 1 \Rightarrow x - \ln x - 1 \ge 0$ και $\frac{1}{x} > 0$ για $x > 0$ άρα $F''(x) > 0$ για κάθε $x > 0$. Επομένως η F είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

Για την F ισχύει ότι:

- είναι συνεχής στο $\left[x,2x\right]$
- είναι παραγωγίσιμη στο $\left(x,2x\right)$

Επομένως σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει $\xi_1 \in \left(x,2x\right)$ για το οποίο ισχύει

$$F'\left(\xi_1\right)=\frac{F\left(2x\right)-F\left(x\right)}{2x-x}\Rightarrow F'\left(\xi_1\right)=\frac{F\left(2x\right)-F\left(x\right)}{x}. \qquad \textbf{(3)}$$

Ομοίως για την F ισχύει ότι:

- είναι συνεχής στο $\left[2x,3x\right]$
- είναι παραγωγίσιμη στο $\left(2x,3x\right)$

Επομένως σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει $\xi_2 \in \left(2x,3x\right)$ για το οποίο ισχύει

$$F'\left(\xi_2\right)=\frac{F\left(3x\right)-F\left(2x\right)}{3x-2x}\Rightarrow F'\left(\xi_2\right)=\frac{F\left(3x\right)-F\left(2x\right)}{x}. \qquad \textbf{(4)}$$

Η F είναι κυρτή στο $\left(0,+\infty\right)$ άρα η F' είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,+\infty\right)$ και ισχύει $\xi_1<2x<\xi_2$.

Άρα $\xi_1<\xi_2\Rightarrow F'\left(\xi_1\right)<F'\left(\xi_2\right)\overset{(3)-(4)}{\Rightarrow}\frac{F\left(2x\right)-F\left(x\right)}{x}<\frac{F\left(3x\right)-F\left(2x\right)}{x}\Rightarrow$

$F\left(2x\right)-F\left(x\right)<F\left(3x\right)-F\left(2x\right)\Rightarrow F\left(x\right)+F\left(3x\right)>2F\left(2x\right)$ για κάθε $x>0$.

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $H\left(x\right)=F\left(\beta\right)+F\left(3\beta\right)-2F\left(x\right)$ με $x\in\left[\beta,2\beta\right]$, $\beta>0$.

Είναι $F'\left(x\right)=f\left(x\right)<0$ άρα η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\beta,3\beta\right]$. Ισχύει:

- $H\left(\beta\right)=F\left(\beta\right)+F\left(3\beta\right)-2F\left(\beta\right)=F\left(3\beta\right)-F\left(\beta\right)<0$ $\left(\beta<3\beta\overset{F'\downarrow\left[\beta,3\beta\right]}{\Rightarrow}F\left(\beta\right)>F\left(3\beta\right)\right)$
- $H\left(2\beta\right)=F\left(\beta\right)+F\left(3\beta\right)-2F\left(2\beta\right)>0$ (από το προηγούμενο ερώτημα)

Επομένως για την Η ισχύει ότι:

- είναι συνεχής στο $\left[\beta,2\beta\right]$ αφού η F είναι συνεχής στο $\left[\beta,2\beta\right]$
- $H\left(\beta\right)\cdot H\left(2\beta\right)<0$

Άρα σύμφωνα με το **Θεώρημα Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\beta, 2\beta)$ τέτοιο ώστε $H(\xi)=0 \Rightarrow F(\beta)+F(3\beta)-2F(\xi)=0 \Rightarrow F(\beta)+F(3\beta)=2F(\xi)$.

Είναι $H'(x)=-2F'(x)=-2f(x)>0$ άρα η H είναι γνησίως αύξουσα στο $[\beta, 2\beta]$. Άρα έχει μία το πολύ ρίζα σ' αυτό το διάστημα.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\beta, 2\beta)$ τέτοιο ώστε $F(\beta)+F(3\beta)=2F(\xi)$.

35. *Πανελλαδικές 2012 (Επαναληπτικές) – 4ο θέμα*

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με $A=(0,+\infty)$, για την οποία ισχύουν:

- **$f(A)=(-\infty, 0]$**
- **η παράγωγος της f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και**
- **$2f(x)+\left(x+\frac{1}{x}\right)e^{f(x)}=\int_1^x e^{f(t)}\cdot f'(t)\left(t+\frac{1}{t}\right)dt+2$, για κάθε $x>0$**

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $F(x)=\int_1^x f(t)dt$, $x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$. **Μονάδες 8**

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της F έχει μοναδικό σημείο καμπής $\Sigma(x_0, F(x_0))$, $x_0>0$, το οποίο και να βρείτε. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (x_0, \beta)$ με $\beta > x_0$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της F στο σημείο $M(\xi, F(\xi))$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία

$$\varepsilon : F(\beta)\cdot x-(\beta-1)y+2012(\beta-1)=0$$ **Μονάδες 6**

γ) Αν $\beta>1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{\left[F(\beta)+(1-\beta)f(\beta)\right]x^5}{x-1}+\frac{(\beta-1)(x+1)^3}{x-3}=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα, ως προς x, στο διάστημα $(1,3)$.

Μονάδες 5

δ) Να αποδείξετε ότι

$$\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right)dt \le \int_1^x tf(t)dt\text{, για κάθε } x>0$$

Μονάδες 6

Λύση

α) Είναι $2f(x)+\left(x+\frac{1}{x}\right)e^{f(x)}=\int_1^x e^{f(t)}\cdot f'(t)\left(t+\frac{1}{t}\right)dt+2$ για κάθε $x>0$.

Παραγωγίζουμε κατά μέλη τη δοσμένη σχέση και προκύπτει:

$$2f'(x)+\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{f(x)}+\left(x+\frac{1}{x}\right)e^{f(x)}\cdot f'(x)=e^{f(x)}\cdot f'(x)\left(x+\frac{1}{x}\right)\Rightarrow$$

$$2f'(x)=-\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{f(x)}\Rightarrow -2e^{-f(x)}f'(x)=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\Rightarrow\left[2e^{-f(x)}\right]'=\left(x+\frac{1}{x}\right)'$$

Από **τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ.** προκύπτει ότι:

$$2e^{-f(x)}=x+\frac{1}{x}+c \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ με } c\in\mathbb{R}. \quad \mathbf{(1)}$$

Από την αρχική σχέση για $x=1$ προκύπτει:

$$2f(1)+\left(1+\frac{1}{1}\right)e^{f(1)}=\int_1^1 e^{f(t)}\left(t+\frac{1}{t}\right)dt+2\Rightarrow 2f(1)+2e^{f(1)}=2\Rightarrow f(1)+e^{f(1)}=1 \quad \mathbf{(2)}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση G με $G(x)=x+e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $G'(x)=1+e^x>0$ άρα η G είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επομένως είναι 1 – 1.

Άρα από την (2) προκύπτει $G(f(1))=G(0)\overset{G:1-1}{\Rightarrow} f(1)=0$.

Από την (1) για $x=1$ προκύπτει:

$$2e^{-f(1)}=1+\frac{1}{1}+c\Rightarrow 2e^{-f(1)}=2+c\Rightarrow 2e^{-0}=2+c\Rightarrow c=0$$

Άρα $2e^{-f(x)}=x+\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{2}{e^{f(x)}}=\frac{x^2+1}{x}\Rightarrow\frac{e^{f(x)}}{2}=\frac{x}{x^2+1}\Rightarrow e^{f(x)}=\frac{2x}{x^2+1}\Rightarrow$

$f(x)=\ell n\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$ για κάθε $x>0$.

β) Είναι $F(x)=\int_1^x f(t)dt \Rightarrow F'(x)=f(x) \Rightarrow F''(x)=f'(x)=\left[\ell n\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)\right]'=$

$$=\frac{1}{\dfrac{2x}{x^2+1}}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'=\frac{x^2+1}{2x}\cdot\frac{2\left(x^2+1\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^2+2-4x^2}{2x\left(x^2+1\right)}=\frac{2\left(1-x^2\right)}{2x\left(x^2+1\right)}=$$

$$\frac{1-x^2}{x\left(x^2+1\right)}$$

Είναι $F''(x)=0 \Rightarrow 1-x^2=0 \Rightarrow x=\pm 1$.

x	0		1		$+\infty$
F''		$-$		$+$	
F		$\frown$		$\smile$	

Είναι $F(1)=\int_1^1 f(t)dt=0$ άρα η γραφική παράστασης της F παρουσιάζει σημείο καμπής στο $(1,0)$ το οποίο από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι είναι μοναδικό.

Η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=\dfrac{F(\beta)}{\beta-1}$.

Για την F έχουμε ότι:

- είναι συνεχής στο $[1,\beta]$
- είναι παραγωγίσιμη στο $(1,\beta)$

άρα σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$F'(\xi)=\frac{F(\beta)-F(1)}{\beta-1}=\frac{F(\beta)}{\beta-1}=\lambda_\varepsilon.$$

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της F στο $M(\xi,F(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία ε.

Είναι $F''(x)<0$ στο $[1,\beta]$ άρα η F' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,\xi]$.

Επομένως υπάρχει μοναδικό $\xi \in (1,\beta)$ ώστε η εφαπτομένη της F στο $M(\xi,F(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία ε.

γ) Είναι $\dfrac{\left[F(\beta)+(1-\beta)f(\beta)\right]x^5}{x-1}+\dfrac{(\beta-1)(x+1)^3}{x-3}=0 \Rightarrow$

$\left[F(\beta)+(1-\beta)f(\beta)\right]x^5(x-3)+(\beta-1)(x-1)(x+1)^3=0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$G(x)=\left[F(\beta)+(1-\beta)f(\beta)\right]x^5(x-3)+(\beta-1)(x-1)(x+1)^3$ για κάθε $x\in[1,3]$.

$$G(1)=\left[F(\beta)+(1-\beta)f(\beta)\right]1^5(1-3)+(\beta-1)(1-1)(1+1)^3=$$

$$-2\left[F(\beta)+(1-\beta)f(\beta)\right]<0 \text{ γιατί } 1<\xi<\beta \Rightarrow F'(\xi)>F'(\beta)\Rightarrow \frac{F(\beta)}{\beta-1}>f(\beta)\Rightarrow$$

$$F(\beta)>f(\beta)(\beta-1)\Rightarrow F(\beta)-f(\beta)(1-\beta)>0$$

$$G(3)=\left[F(\beta)+(1-\beta)f(\beta)\right]3^5(3-3)+(\beta-1)(3-1)(3+1)^3=128(\beta-1)>0$$

Για την G ξέρουμε ότι:

- είναι συνεχής στο $[1,3]$ ως πολυωνυμική
- $G(1)\cdot G(3)<0$

άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** η συνάρτηση $G(x)$, άρα και η δοσμένη εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,3)$.

δ) Στο ολοκλήρωμα $\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right)dt$ θέτουμε $\frac{t}{x}=u \Rightarrow t=ux \Rightarrow dt=xdu$.

Για $t=x$ είναι $u=1$. Για $t=x^2$ είναι $u=x$.

Άρα $\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right)dt=\int_1^x f(u)du$.

Επομένως από τη δοσμένη σχέση:

$$\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right)dt \le \int_1^x tf(t)dt \Leftrightarrow \int_1^x xf(u)du \le \int_1^x tf(t)dt \Leftrightarrow$$

$x\int_1^x f(t)dt \le \int_1^x tf(t)dt \Leftrightarrow x\int_1^x f(t)dt - \int_1^x tf(t)dt \le 0 \Leftrightarrow$

$x\int_1^x f(t)dt - \int_1^x tf(t)dt \le 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση h με $h(x) = x\int_1^x f(t)dt - \int_1^x tf(t)dt$ για κάθε $x > 0$.

Είναι $h'(x) = \int_1^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \int_1^x f(t)dt = F(x)$.

$f(A) = (-\infty, 0]$ άρα $f(x) \le 0 \Rightarrow -f(x) \ge 0$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$)

Αν $0 < x < 1$ τότε $\int_x^1 -f(t)dt > 0 \Rightarrow \int_1^x f(t)dt > 0 \Rightarrow h'(x) > 0$.

Αν $x > 1$ τότε $\int_1^x -f(t)dt > 0 \Rightarrow -\int_1^x f(t)dt > 0 \Rightarrow h'(x) < 0$.

x	0	1	$+\infty$
h'	+		−
h	↗		↘

Άρα για κάθε $x > 0$ είναι:

$h(x) \le 0 \Leftrightarrow x\int_1^x f(t)dt - \int_1^x tf(t)dt \le 0 \Leftrightarrow \int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right)dt \le \int_1^x tf(t)dt$

36. *Πανελλαδικές 2013 – 3ο θέμα*

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$, **για κάθε** $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$
- $g(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1$

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$, $x \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 9**

β) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης

$$f(g(x)) = 1$$ **Μονάδες 8**

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε: $\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x_0$ **Μονάδες 8**

Λύση

α) $\left(f(x)+x\right)\left(f'(x)+1\right) = x \Rightarrow \left(\frac{\left(f(x)+x\right)^2}{2}\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' \Rightarrow \left(\left(f(x)+x\right)^2\right)' = \left(x^2\right)'$

Από το **πόρισμα των συνεπειών του Θ.Μ.Τ.** προκύπτει ότι

$\left(f(x)+x\right)^2 = x^2 + c$, με $c \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $x = 0$ είναι $f(0) = c \Rightarrow c = 1$ άρα $\left(f(x)+x\right)^2 = x^2 + 1$.

Είναι $x^2 + 1 \neq 0$ άρα $\left(f(x)+x\right)^2 \neq 0 \Rightarrow f(x)+x \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και συνεχής άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επομένως $\left|f(x)+x\right| = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow \begin{cases} f(x)+x = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2+1} - x \\ \text{ή} \\ f(x)+x = -\sqrt{x^2+1} \Rightarrow f(x) = -\sqrt{x^2+1} - x \end{cases}$.

Για $x = 0$ από την πρώτη σχέση προκύπτει $f(0) = \sqrt{1} = 1$ δεκτή.

Για $x = 0$ από την δεύτερη σχέση προκύπτει $f(0) = -\sqrt{1} = -1$, απορρίπτεται.

Άρα $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Είναι $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = -\frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1}} < 0$.

Είναι $\sqrt{x^2+1} - x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > x$.

- Για $x \geq 0$ είναι $\sqrt{x^2+1}^2 > x^2 \Leftrightarrow x^2 + 1 > x^2 \Leftrightarrow 1 > 0$, ισχύει πάντα.
- Για $x < 0$ ισχύει γιατί $\sqrt{x^2+1} > 0$.

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και 1 – 1.

Είναι $f(g(x))=1 \Rightarrow f(g(x))=f(0) \Rightarrow g(x)=0 \Rightarrow x^3+\frac{3x^2}{2}-1=0$.

Είναι $g'(x)=3x^2+3x=3x(x+1)$. Άρα $g'(x)=0 \Rightarrow x=0$ ή $x=-1$.

x	$-\infty$ -1	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$-$	$+$
$g(x)$	↗	↘	↗
		τ.μ.	τ.ε.

Είναι $g(-1)=-\frac{1}{2}$, $g(0)=-1$ και $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=+\infty$.

Άρα η g δεν έχει ρίζα στο $(-\infty,-1)$ και στο $[-1,0]$ ενώ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $(0,+\infty)$.

γ) **1^ος^ τρόπος**

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt-\varepsilon\varphi x\cdot f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

Για την φ ισχύει:

- είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών. (η f είναι συνεχής άρα το ολοκλήρωμα είναι παραγωγίσιμο και άρα συνεχές)
- $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\cdot f\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}<0$

  $\varphi(0)=\int_{0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt-\varepsilon\varphi 0\cdot f\left(0-\frac{\pi}{4}\right)=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt<0$ γιατί $f(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$

Επομένως σύμφωνα με το **Θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε: $\varphi(x_0)=0 \Rightarrow \int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt=f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x_0$.

2^ος^ τρόπος

Είναι $\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt=f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x_0 \Leftrightarrow \int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt=f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\frac{\eta\mu x_0}{\sigma\upsilon\nu x_0} \Leftrightarrow$

$$συνx_0 \cdot \int_{x_0-\frac{π}{4}}^{0} f(t)dt = f\left(x_0 - \frac{π}{4}\right)ημx_0 \Leftrightarrow συνx_0 \cdot \int_{x_0-\frac{π}{4}}^{0} f(t)dt - f\left(x_0 - \frac{π}{4}\right)ημx_0 = 0$$

Έστω η συνάρτηση $g(x) = ημx \cdot \int_{x-\frac{π}{4}}^{0} f(t)dt,\ x \in \left[-\frac{π}{4}, 0\right]$.

Για την g ξέρουμε ότι:

- είναι συνεχής στο $\left[-\frac{π}{4}, 0\right]$ ως γινόμενο συνεχών (η f είναι συνεχής άρα το ολοκλήρωμα παραγωγίσιμο και άρα συνεχές)
- είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{π}{4}, 0\right)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων
- $g\left(-\frac{π}{4}\right) = g(0) = 0$

Επομένως σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{π}{4}\right)$ τέτοιο ώστε: $g'(x_0) = 0 \Rightarrow$

$$συνx_0 \cdot \int_{x_0-\frac{π}{4}}^{0} f(t)dt - f\left(x_0 - \frac{π}{4}\right) \cdot ημx_0 = 0 \Rightarrow \int_{x_0-\frac{π}{4}}^{0} f(t)dt = f\left(x_0 - \frac{π}{4}\right)εφx_0$$

37. *Πανελλαδικές 2013 – 4ο θέμα*

Έστω $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- **Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$**
- **$f(1) = 1$**
- **$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0$**

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$g(x) = \int_{a}^{x} \frac{f(t)-1}{t-1}dt,\ x \in (1,+\infty) \text{ και } a > 1$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f'(1)=0$ **(Μονάδες 4), καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο** $x_0=1$ **(Μονάδες 2).** **Μονάδες 6**

β) Η g είναι γνησίως αύξουσα (Μονάδες 3), και στη συνέχεια, να λύσετε την ανίσωση στο $\mathbb{R}$ $\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)du$ **(Μονάδες 6).**

γ) Η g είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση

$$(\alpha-1)\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt=(f(\alpha)-1)(x-\alpha),\ x>1$$

έχει ακριβώς μία λύση. **Μονάδες 10**

Λύση

α) Είναι $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=0\Rightarrow\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1+5h)-f(1)}{h}-\frac{f(1-h)-f(1)}{h}=0\Rightarrow$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+5h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}=0 \quad (1)$$

Στο πρώτο κλάσμα θέτουμε $u=5h$ και στο $w=-h$. Από την (1) προκύπτει

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+u)-f(1)}{\frac{u}{5}}-\lim_{h\to0}\frac{f(1+w)-f(1)}{-w}=0\Rightarrow 5f'(1)+f'(1)=0\Rightarrow f'(1)=0$$

Για $x>1\overset{f':\uparrow\mathbb{R}}{\Rightarrow}f'(x)>f'(1)=0$.

Για $0<x<1\overset{f':\uparrow\mathbb{R}}{\Rightarrow}f'(x)<f'(1)=0$.

x	0	1	$+\infty$
f'		−	+
f		↘	↗

Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=1$ το $f(1)=1$.

β) Η $\frac{f(t)-1}{t-1}$ είναι συνεχής άρα η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=\frac{f(x)-1}{x-1}>0$.

Από το προηγούμενο ερώτημα για $x>1$ είναι $f(x)>f(1)\Rightarrow f(x)>1$.

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

<u>1ος τρόπος</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\int_{x}^{x+1}g(u)du,\ x>1$.

Είναι $\varphi'(x)=g(x+1)-g(x)>0$ γιατί $x<x+1 \overset{g:\uparrow(1,+\infty)}{\Rightarrow} g(x)<g(x+1)$.

Από τη δοσμένη σχέση προκύπτει $\varphi(8x^2+5)>\varphi(2x^4+5)$ $\qquad \varphi\uparrow(1,+\infty)$

Άρα $8x^2+5>2x^4+5 \Rightarrow 8x^2>2x^4 \Rightarrow 2x^2(x^2-4)<0 \Rightarrow x\in(-2,0)\cup(0,2)$

2ος τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\int_{2x^2+5}^{2x^2+6} g(u)du$, $x\in\mathbb{R}$. Η φ είναι παραγωγίσιμη με $\varphi'(x)=4x\cdot g(2x^2+6)-4x\cdot g(2x^2+5)=4x\left(g(2x^2+6)-g(2x^2+5)\right)$. Άρα

$$2x^2+6>2x^2+5 \overset{g\uparrow(1,+\infty)}{\Rightarrow} g(2x^2+6)>g(2x^2+5) \Rightarrow g(2x^2+6)-g(2x^2+5)>0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
φ′	−	0	+
φ	↘		↗

- Για $x>0$ είναι $\varphi(2x)>\varphi(x^2) \overset{\varphi\uparrow}{\Rightarrow} 2x>x^2 \Rightarrow$

  $x^2-2x<0 \Rightarrow x\in(0,2)$
- Για $x<0$ είναι $\varphi(2x)>\varphi(x^2) \Rightarrow$

  $\varphi(-2x)>\varphi(x^2) \overset{\varphi\uparrow}{\Rightarrow} -2x>x^2 \Rightarrow x^2+2x<0 \Rightarrow x\in(-2,0)$
- Για $x=0$ η ανίσωση γράφεται $\int_5^6 g(u)du>\int_5^6 g(u)du$ που δεν ισχύει.

Άρα $x\in(-2,0)\cup(0,2)$.

γ) Είναι $g'(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g''(x)=\dfrac{f'(x)(x-1)-(f(x)-1)}{(x-1)^2}$. $\qquad$ (1)

Για τη συνάρτηση f στο $[1,x]$ ισχύει:

- είναι συνεχής στο $[1,x]$
- είναι παραγωγίσιμη στο $(1,x)$

Άρα σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει $\xi\in(1,x)$ ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

Είναι $1<\xi<x \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(1)<f'(\xi)<f'(x) \Rightarrow f'(\xi)<f'(x) \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}<f'(x) \Rightarrow$

$f'(x)(x-1)-\big(f(x)-f(1)\big)>0$

Από την (1) προκύπτει $g''(x)>0$ στο $(1,+\infty)$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$ άρα η g είναι κυρτή.

<u>$1^{ος}$ τρόπος</u>

Η εφαπτομένη της C_g στο $x=\alpha$ έχει εξίσωση

$$y-g(\alpha)=g'(\alpha)(x-\alpha) \Rightarrow y=g'(\alpha)(x-\alpha)$$

Η g είναι κυρτή στο $(1,+\infty)$ άρα η C_g βρίσκεται «πάνω» από την εφαπτομένη της σε κάθε σημείο και το μόνο κοινό σημείο τους είναι το σημείο επαφής.

Επομένως $g(x)\geq y \Leftrightarrow g(x)\geq g'(\alpha)(x-\alpha)$ και το «ίσον» ισχύει για $x=\alpha$.

Άρα η εξίσωση $g(x)=g'(\alpha)(x-\alpha)$ έχει μοναδική λύση την $x=\alpha$. Επομένως

$$\int_\alpha^x \frac{f(t)-1}{t-1}dt=\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}(x-\alpha) \Rightarrow (\alpha-1)\int_\alpha^x \frac{f(t)-1}{t-1}dt=\big(f(\alpha)-1\big)(x-\alpha)$$

<u>$2^{ος}$ τρόπος</u>

Έστω η συνάρτηση $h(x)=(\alpha-1)g(x)-\big(f(\alpha)-1\big)(x-\alpha)$, με $x\in(1,+\infty)$.

Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=(\alpha-1)g'(x)-\big(f(\alpha)-1\big)$

Η συνάρτηση g είναι κυρτή άρα η g' είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως

- για $x>\alpha>1$ είναι $g'(x)>g'(\alpha) \Rightarrow g'(x)>\dfrac{f(\alpha)-1}{\alpha-1} \Rightarrow$

  $(\alpha-1)g'(x)>f(\alpha)-1 \Rightarrow (\alpha-1)g'(x)-\big(f(\alpha)-1\big)>0 \Rightarrow h'(x)>0 \Rightarrow h\uparrow$

  Άρα για $x>\alpha$ είναι $h(x)>h(\alpha)=0$. **(1)**

- για $x=\alpha$ είναι $h'(\alpha)=(\alpha-1)g'(\alpha)-\big(f(\alpha)-1\big)=$

  $(\alpha-1)\dfrac{f(\alpha)-1}{1-1}-\big(f(\alpha)-1\big)=0$

- για $1 < x < \alpha$ είναι $g'(x) < g'(\alpha) \Rightarrow g'(x) < \dfrac{f(\alpha)-1}{\alpha-1} \Rightarrow$

  $(\alpha-1)g'(x) < f(\alpha)-1 \Rightarrow (\alpha-1)g'(x)-(f(\alpha)-1) < 0 \Rightarrow h'(x) < 0 \Rightarrow h\downarrow$

  Άρα για $1 < x < \alpha$ είναι $h(x) > h(\alpha) = 0$. **(2)**

Είναι $h(\alpha)=0$. Επομένως από τις (1) και (2) προκύπτει ότι η δοσμένη εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=\alpha$.

3ος τρόπος

Είναι $g'(x) = \dfrac{f(x)-1}{x-1} \Rightarrow g'(\alpha) = \dfrac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}$

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται: $(\alpha-1)g(x) = (f(\alpha)-1)(x-\alpha) \Leftrightarrow$

$\dfrac{g(x)}{x-\alpha} = \dfrac{f(\alpha)-1}{\alpha-1} \Leftrightarrow \dfrac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha} = \dfrac{f(\alpha)-f(1)}{\alpha-1}$ **(1)**

Για την g ισχύει:

- είναι συνεχής στο $[\alpha, x]$
- είναι παραγωγίσιμη στο (α, x)

άρα σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει $\xi \in (\alpha, x)$ ώστε $g'(\xi) = \dfrac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$.

Από την (1) προκύπτει $g'(\xi) = g'(\alpha) \Rightarrow \xi = \alpha$.

(Η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$ άρα είναι και 1–1).

38. *Πανελλαδικές 2013 (Επαναληπτικές) – 3ο θέμα*

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $\mathbf{2xf(x)+x^2(f'(x)-3) = -f'(x)}$ **για κάθε $x\in\mathbb{R}$**
- $\mathbf{f(1)=\frac{1}{2}}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$ και στη συνέχεια ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. **Μονάδες 6**

β) **Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f του ερωτήματος (α).** **Μονάδες 4**

γ) **Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση:**

$$f\left(5\left(x^2+1\right)^3-8\right)\le f\left(8\left(x^2+1\right)^2\right)$$ **Μονάδες 7**

δ) **Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε:**

$$\int_0^{\xi^3-\xi} f(t)dt=-\xi\left(3\xi^2-1\right)f\left(\xi^3-\xi\right)$$ **Μονάδες 8**

Λύση

α) $2xf(x)+x^2\left(f'(x)-3\right)=-f'(x)\Rightarrow 2xf(x)+x^2f'(x)-3x^2+f'(x)=0\Rightarrow$

$2xf(x)+x^2f'(x)+f'(x)=3x^2\Rightarrow 2xf(x)+\left(x^2+1\right)f'(x)=3x^2\Rightarrow$

$\left[\left(x^2+1\right)f(x)\right]'=\left(x^3\right)'$.

Επομένως, σύμφωνα με το πόρισμα των συνεπειών του Θ.Μ.Τ. είναι

$\left(x^2+1\right)f(x)=x^3+c$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$.

Για $x=1$ είναι $2f(1)=1+c\Rightarrow 2\dfrac{1}{2}=1+c\Rightarrow c=0$.

Άρα $\left(x^2+1\right)f(x)=x^3\Rightarrow f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$ (είναι $x^2+1\neq 0$)

Είναι $f'(x)=\dfrac{3x^2\left(x^2+1\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{3x^4+3x^2-2x^4}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2}>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες γιατί είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x\left(x^2+1\right)}=1\Rightarrow\lambda=1$ και

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-x^3-x}{x^2+1}\right)=0\Rightarrow\beta=0$$

Άρα η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=x$.

Πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x(x^2+1)}=1\Rightarrow\lambda=1$ και

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-x^3-x}{x^2+1}\right)=0\Rightarrow\beta=0$$

Άρα η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y=x$.

γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα

$$f\left(5(x^2+1)^3-8\right)\le f\left(8(x^2+1)^2\right)\Rightarrow 5(x^2+1)^3-8\le 8(x^2+1)^2\Rightarrow$$

$$5(x^2+1)^3\le 8(x^2+1)^2+8\Rightarrow 5(x^2+1)^3\le 8\left[(x^2+1)^2+1\right]\Rightarrow\frac{(x^2+1)^3}{(x^2+1)^2+1}\le\frac{8}{5}\Rightarrow$$

$$f\left((x^2+1)\right)\le\frac{8}{5}\Rightarrow f\left((x^2+1)\right)\le f(2)\Rightarrow x^2+1\le 2\Rightarrow x^2\le 1\Rightarrow |x|\le 1\Rightarrow -1\le x\le 1$$

δ) Έστω η συνάρτηση $g(x)=x\int_0^{x^3-x}f(t)dt$, $x\in[0,1]$.

Η f είναι συνεχής και η x^3-x είναι συνεχής άρα η $\int_0^{x^3-x}f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη.

Για την g ισχύει:

- είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων

  με $g'(x)=\int_0^{x^3-x}f(t)dt+x(3x^2-1)f(x)$
- $g(0)=g(1)$ ($g(0)=0$ και $g(1)=1\cdot\int_0^{1^3-1}f(t)dt=0$)

Επομένως σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0\Rightarrow\int_0^{\xi^3-\xi}f(t)dt+\xi(3\xi^2-1)f(\xi^3-\xi)=0\Rightarrow$

$$\int_0^{\xi^3-\xi}f(t)dt=-\xi(3\xi^2-1)f(\xi^3-\xi)$$

39. *Πανελλαδικές 2013 (Επαναληπτικές) – 4ο θέμα*

Δίνεται συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0,+\infty)$, για την οποία ισχύουν:

- $f(x)=x+\int_1^x\left(\int_1^u\frac{(f'(t))^2-1}{f(t)}dt\right)du$
- $f(x)\cdot f'(x)\neq 0$ **για κάθε** $x>0$ **και** $f(0)=0$

Θεωρούμε επίσης τις συναρτήσεις:

$g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$ **με** $x>0$ **και** $h(x)=(f'(x))^3$ **με** $x\geq 0$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)\cdot f''(x)+1=(f'(x))^2$ για κάθε $x>0$

Μονάδες 4

β) i) Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων f και f' στο $(0,+\infty)$

Μονάδες 4

ii) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=1$ **Μονάδες 3**

γ) Δεδομένου ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι:

i) $g(x)\geq 2-x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ **Μονάδες 2**

ii) $\int_0^1(2-x)f(x)dx<1$ **Μονάδες 4**

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$. **Μονάδες 8**

Λύση

α) Έστω η συνάρτηση $g(u)=\int_1^u \frac{(f'(t))^2-1}{f(t)}dt$. Η $\frac{(f'(t))^2-1}{f(t)}$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών άρα η $g(u)$ είναι παραγωγίσιμη (επομένως και συνεχής).

Άρα η $\int_1^x g(u)du$ είναι παραγωγίσιμη και επομένως και η $f(x)=x+\int_1^x g(u)du$.

Είναι $f(x)=x+\int_1^x g(u)du \Rightarrow f'(x)=1+g(x)\Rightarrow f'(x)=1+\int_1^x \frac{(f'(t))^2-1}{f(t)}dt$ **(1)**

Στην προηγούμενη σχέση το δεύτερο μέλος είναι παραγωγίσιμο άρα και το πρώτο. Επομένως είναι $f''(x)=\frac{(f'(x))^2-1}{f(x)}\Rightarrow$ **(2)**

$f(x)\cdot f''(x)=(f'(x))^2-1\Rightarrow f(x)\cdot f''(x)+1=(f'(x))^2$ για $x>0$. **(3)**

β) i) Είναι $f(x)\cdot f'(x)\neq 0$ για $x>0$ και η $f(x)\cdot f'(x)$ είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο για $x>0$.

Είναι $f(1)=1+\int_1^1\left(\int_1^u \frac{(f'(t))^2-1}{f(t)}dt\right)du=1$

και από την (1) $f'(1)=1+\int_1^1 \frac{(f'(t))^2-1}{f(t)}dt=1$ άρα $f(1)\cdot f'(1)=1>0$ επομένως είναι $f(x)\cdot f'(x)>0$ για κάθε $x>0$.

Δηλαδή η f και η f' είναι ομόσημες και επειδή $f(1)=1>0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x)>0$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x>0$.

ii) Η f' είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής.

Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι η f'' είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής.

Επομένως $f'(0)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)\Rightarrow [f'(0)]^2=\lim_{x\to 0^+}[f'(x)]^2=\lim_{x\to 0^+}[f(x)\cdot f''(x)+1]=$ $f(0)\cdot f''(0)+1=1$.

Άρα $[f'(0)]^2=1\Rightarrow f'(0)=\pm 1$.

Όμως είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x>0$ άρα $f'(0)=1$.

Παρατήρηση: Η σχέση (3) ισχύει για $x>0$ άρα δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε σε αυτήν το $x=0$ και να λύσουμε ως προς $f'(0)$.

γ) i) Είναι $g(1)=\dfrac{f'(1)}{f(1)}=1$. Η g είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και $g'(x)=\dfrac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}$ $x>0$. Άρα $g'(1)=\dfrac{0\cdot 1-1^2}{1^2}=-1$.

Η εφαπτομένη της C_g στο $(1,g(1))$ έχει εξίσωση $\varepsilon: y-g(1)=g'(1)(x-1)\Rightarrow$
$y-1=-1(x-1)\Rightarrow y=-x+2$.

Η g είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ άρα η C_g βρίσκεται «πάνω» από την εξίσωση της εφαπτομένης της σε οποιοδήποτε σημείο και το μόνο κοινό σημείο είναι το σημείο επαφής.

Άρα είναι $g(x)\geq -x+2$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$.

ii) $g(x)\geq -x+2\Rightarrow -x+2\leq g(x)\Rightarrow -x+2\leq \dfrac{f'(x)}{f(x)}\overset{f(x)>0}{\Rightarrow}(-x+2)f(x)\leq f'(x)\Rightarrow$

Άρα $\int_0^1(-x+2)f(x)dx\leq\int_0^1 f'(x)dx=\left[f(x)\right]_0^1=f(1)-f(0)=1-0=1$

δ) <u>1ος τρόπος</u>

Είναι $E=\int_0^1|h(x)|dx=\int_0^1\left[f'(x)\right]^3dx=\int_0^1 f'(x)\left[f'(x)\right]^2dx=$

$\left[f(x)(f'(x))^2\right]_0^1-2\int_0^1 f(x)f'(x)f''(x)dx\overset{(3)}{=}$

$f(1)(f'(1))^2-f(0)(f'(0))^2-2\int_0^1\left[(f'(x))^2-1\right]f'(x)dx=$

$1-2\int_0^1 f'(x)(f'(x))^2dx+2\int_0^1 f'(x)dx=1-2\int_0^1(f'(x))^3dx+2\left[f(1)-f(0)\right]=$

$1-2\Omega+2\cdot 1=3-2\Omega$

Άρα $\Omega=3-2\Omega\Rightarrow 3\Omega=3\Rightarrow\Omega=1$ τ.μ.

<u>2ος τρόπος</u>

Από την (2) προκύπτει

$$f(x)\cdot f''(x)+1=\left(f'(x)\right)^2 \Rightarrow \left(f'(x)\right)^2 - f(x)\cdot f''(x)=1 \Rightarrow \left[f(x)\cdot f'(x)\right]' = (x)'$$

Επομένως, σύμφωνα με το **πόρισμα των συνεπειών του Θ.Μ.Τ.** είναι

$f(x)\cdot f'(x)=x+c,\ x>0,\ c\in\mathbb{R}$.

Για $x=1$ είναι $f(1)\cdot f'(1)=1+c \Rightarrow 1=1+c \Rightarrow c=0$.

Άρα $f(x)\cdot f'(x)=x,\ x>0$.

Είναι $f(x)\cdot f'(x)=x \Rightarrow 2f(x)\cdot f'(x)=2x \Rightarrow \left(f^2(x)\right)'=\left(x^2\right)'$

Επομένως, σύμφωνα με το **πόρισμα των συνεπειών του Θ.Μ.Τ.** είναι

$$f^2(x)=x^2 \Rightarrow |f(x)|=|x| \overset{f(x)>0}{\Rightarrow} f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1.$$

Άρα $E=\int_0^1 |h(x)|dx=\int_0^1 \left[f'(x)\right]^3 dx=\int_0^1 1^3 dx=\int_0^1 1dx=\left[x\right]_0^1=1-0=1$ τ.μ.

«Αν μου έδιναν μόνο μια ώρα για να λύσω ένα πρόβλημα

από το οποίο να εξαρτάται η ζωή μου, θα αφιέρωνα

40 λεπτά για να το μελετήσω,

15 λεπτά για να το αναθεωρήσω και

5 λεπτά να το λύσω. »

Albert Einstein