

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΙΟΥΛΙΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1ο

- A. 1. Να αποδείξετε ότι: αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Μονάδες 12

2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 5

- B. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη Σ, αν η πρόταση είναι **Σωστή**, ή Λ, αν αυτή είναι **Λανθασμένη**.

1. Για δύο οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς $a+bi$ και $\gamma+di$ η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματός τους ισούται με τη διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

Μονάδες 2

2. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 2

3. Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Μονάδες 2

4. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 έχουν ασύμπτωτες.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει $|z-1+i|=|iz|$.

- α. i) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων M των μιγαδικών z .

Μονάδες 10

- ii) Να βρείτε ποια από τα σημεία M απέχουν από την αρχή $O(0,0)$ απόσταση ίση με $\sqrt{5}$.

Μονάδες 10

- β. Αν $\operatorname{Re}(z)=0$, τότε να δείξετε ότι $z=-i$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}, & x < 2 \\ \frac{x^2 - 5x + 6}{2(x-1)}, & x \geq 2 \end{cases}.$$

- α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0=2$.

Μονάδες 12

- β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(0, f(0))$.

Μονάδες 6

- γ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \frac{1}{2}x - 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται μια συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 8x - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1.

Μονάδες 8

- β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια μόνο ρίζα στο $(0, 1)$.

Μονάδες 9

- γ. Αν για τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(g(x) - 3x) = f(x^2 + 2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το x_0 στο οποίο η g παρουσιάζει ελάχιστο.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Δεν θα αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ