ΣΕΛΙΔΑ 1

ΓΕΝΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
Δ΄ ΤΑΞΗ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΛ

ΘΕΜΑ Α

$\boxed{A_1} \to$ σελ. 28 $\boxed{A2} \to$ σελ. 14 $\boxed{A3} \to$ σελ. 87

$\boxed{A_4} \to$ α) $\to$ Λ, β) $\to$ Σ, γ) $\to$ Λ, δ) $\to$ Λ

ε) $\to$ Σ

ΘΕΜΑ Β

$\boxed{B1}$ $\gamma = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+6}-3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+6}+3)}{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)} =$

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x+3)\cdot(\sqrt{x+6}+3)}{(\sqrt{x+6})^2-3^2} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x+3)\cdot(\sqrt{x+6}+3)}{x+6-9} =$

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\cancel{(x-3)}(x+3)\cdot(\sqrt{x+6}+3)}{\cancel{x-3}} = 6\cdot(\sqrt{9}+3) = 6\cdot 6 = 36$

$\boxed{B2}$ $f(x) = x^3 - \alpha x^2 + \beta x + 36,\ x \in \mathbb{R}$

f: παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με

$f'(x) = 3x^2 - 2\alpha x + \beta$

Εστω $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία με τετμημένες $x_1 = 1$ και $x_2 = \frac{1}{3}$ αντίστοιχα.

Από υπόθεση: $\varepsilon_1 \parallel x'x$ και $\varepsilon_2 \parallel x'x$

άρα: $\begin{cases} \lambda_{\varepsilon_1} = 0 \\ \text{και} \\ \lambda_{\varepsilon_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(1) = 0 \\ \text{και} \\ f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2\alpha + \beta = 0 \\ 3 \cdot \frac{1}{9} - 2 \cdot \alpha \cdot \frac{1}{3} + \beta = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha + \beta = -3 \\ \frac{1}{3} - \frac{2\alpha}{3} + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha + \beta = -3 \\ 1 - 2\alpha + 3\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{2\alpha} - \beta = 3 \quad (1) \\ -\cancel{2\alpha} + 3\beta = -1 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} 2\beta = 2 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 1}$$

Για $\beta = 1$ η (1) $\Leftrightarrow 2\alpha = 4 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 2}$

B3 $\quad f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 36, \; x \in \mathbb{R}$

Για $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \Delta = 4$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm 2}{6} \begin{cases} \frac{6}{6} = 1 \\ \frac{2}{6} = 1/3 \end{cases}$$

• $f'(x)>0 \Leftrightarrow 3x^2-4x+1>0 \Leftrightarrow$

$x\in\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	Τ.Μ	$\searrow$	Τ.Ε	$\nearrow$	

Άρα: $f: \uparrow$ (γν. αύξουσα) στο $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$

$f: \downarrow$ (γν. φθίνουσα) στο $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$

$f: \uparrow$ (γν. αύξουσα) στο $[1, +\infty)$

• Για $x=\frac{1}{3}$ η f παρουσιάζει Τ.ΜΕΓΙΣΤΟ, το $f\left(\frac{1}{3}\right)=$

$= \frac{1}{27} - 2\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 36 = \frac{1}{27} - \frac{6}{27} + \frac{9}{27} + 36 =$

$= \frac{4}{27} + 36 = \frac{976}{27}$

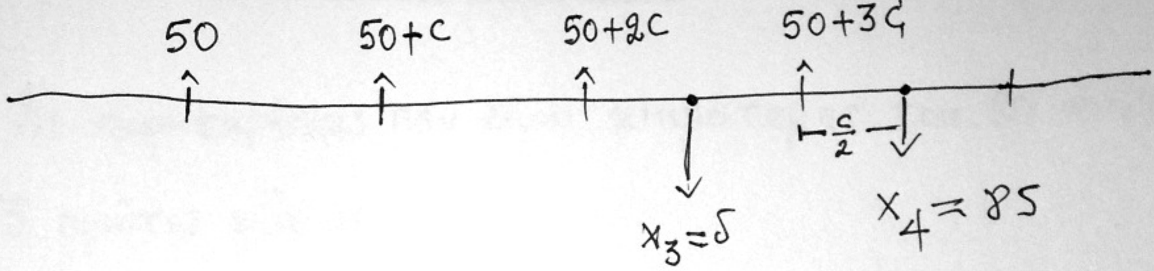
• Για $x=1$ η f παρουσιάζει Τ.ΕΛΑΧΙΣΤΟ, το $f(1)=$

$1-2+1+36 = 36$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Απο υπόθεση, εφόσον η μικρότερη παρατήρηση είναι 50 και η κεντρική τιμή της 4ης κλάσης είναι $x_4 = 85$ έχουμε ότι: $50 + 3c + \frac{1}{2}\cdot c = 85 \Leftrightarrow$

$6\cdot c + c = 170 - 100 \Leftrightarrow 7\cdot c = 70 \Leftrightarrow \boxed{c = 10}$



Γ2

Απο υπόθεση: $f_4 = 2\cdot f_3$ (1) και $\delta = 75$, δηλαδή $\delta = x_3$

Ισχύει: $f_1 + f_2 + \frac{1}{2}\cdot\cancel{f_3} = \frac{1}{2}\cancel{f_3} + f_4 \Leftrightarrow f_1 + f_2 = f_4 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$f_1 + f_2 = 2f_3$ (2).

Όμως: $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \underset{(1)}{\overset{(2)}{\Leftrightarrow}} 2f_3 + f_3 + 2f_3 = 1 \Leftrightarrow$

$5f_3 = 1 \Leftrightarrow f_3 = \frac{1}{5} = 0,2$, οπότε: $f_4 = 0,4$ και $f_1 + f_2 = 0,4$ (3)

Επιπλέον: $\bar{x} = 74 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} x_i f_i = 74 \Leftrightarrow 55\cdot f_1 + 65f_2 + 75f_3 +$

$85f_4 = 74 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} 55f_1 + 65\cdot(0,4 - f_1) + 75\cdot 0,2 + 85\cdot 0,4 = 74 \Leftrightarrow$

$-10f_1 + 26 + 15 + 34 = 74 \Leftrightarrow f_1 = 0,1$, οπότε: $f_2 = 0,3$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

κλάσεις	x_i	f_i
[50 – 60)	55	0,1
[60 – 70)	65	0,3
[70 – 80)	75	0,2
[80 – 90)	85	0,4
Σύνολο		1

$\boxed{Γ3}$ Οι παρατηρήσεις που είναι μικρότερες του 80 ανήκουν στις 3 πρώτες κλάσεις

Αν $\bar{x}'$ η μέση τιμή αυτών των παρατηρήσεων τότε

$$\bar{x}' = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3}{v_1 + v_2 + v_3} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3}{v \cdot f_1 + v \cdot f_2 + v \cdot f_3} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3}{v \cdot (f_1 + f_2 + f_3)}$$

$$= \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3}{0,6 \cdot v} = \frac{10}{6} \cdot \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3}{v} =$$

$$= \frac{10}{6} \cdot \left(x_1 \cdot \frac{v_1}{v} + x_2 \cdot \frac{v_2}{v} + x_3 \cdot \frac{v_3}{v} \right) =$$

$$= \frac{10}{6} \left(x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 \right) = \frac{10}{6} \left(55 \cdot 0,1 + 65 \cdot 0,3 + 75 \cdot 0,2 \right)$$

$$= \frac{10}{6} \cdot \left(5,5 + 19,5 + 15 \right) = \frac{10}{6} \cdot 40 = \frac{400}{6} = \frac{200}{3}$$

ΘΕΜΑ Δ

$\boxed{\Delta_1}$ Είναι $f(x) = x^2 + k + 1$ με $f'(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$

Έχουμε: $f(1) = 2 + k$, $f'(1) = 2$ και αν

$(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ η εφαπτομένη της C_f στο $(1, f(1))$

είναι $\lambda = f'(1) = 2$, οπότε $(\varepsilon): y = 2x + \beta$

Για $x = 1$ και $y = f(1) = 2 + k$, η εξίσωση της

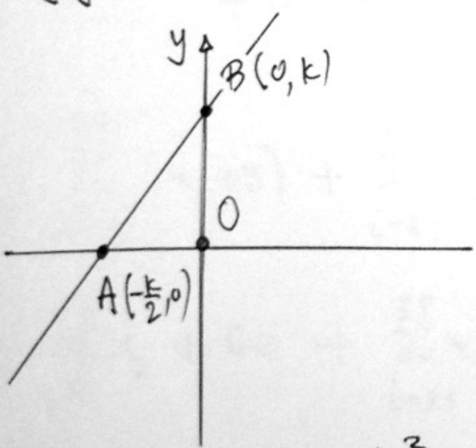
(ε) γίνεται: $2 + k = 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = k$

Άρα $\boxed{(\varepsilon): y = 2x + k}$

Για $x = 0$ είναι: $y = k$, επί για $y = 0$ είναι: $x = -\frac{k}{2}$

Άρα η (ε) τέμνει τον $x'x$ στο $A\left(-\frac{k}{2}, 0\right)$ και τον

$y'y$ στο $B(0, k)$ με $k > 2$ (k: ακέραιος)



Από υπόθεση το εμβαδόν E

του τριγώνου AOB είναι:

$E < 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot (OA) \cdot (OB) < 4 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2} \cdot |x_A| \cdot |y_B| < 4 \Leftrightarrow \left|-\frac{k}{2}\right| \cdot |k| < 8 \Leftrightarrow$

$\frac{k^2}{2} < 8 \Leftrightarrow k^2 < 16 \Leftrightarrow k < 4$, οπότε

ο ακέραιος k με $2 < k < 4$ είναι $\boxed{k = 3}$

Δ2 Για $k=3$ είναι $(\varepsilon): y=2x+3$

(α) Έχουμε $\nu=50$ σημεία (x_i, y_i) της $(\varepsilon): y=2x+3$

για τα οποία: $y_i = 2x_i + 3$ και αφού οι τεταγμένες

y_i έχουν $\bar{y}=63$, από γνωστή εφαρμογή:

$$\bar{y} = 2\cdot\bar{x} + 3 \Leftrightarrow 63 = 2\cdot\bar{x} + 3 \Leftrightarrow 2\bar{x} = 60 \Leftrightarrow$$

$$\bar{x} = 30$$

(β) Έστω $t_1, t_2, \ldots, t_{50}$ οι νέες παρατηρήσεις, για τις

οποίες:
$$t_i = x_i + 3, \text{ για } i=1,2,\ldots,20$$
$$t_i = x_i, \text{ για } i=21,22,\ldots,35$$
$$t_i = x_i - \lambda, \text{ για } i=36,37,\ldots,50$$

Τότε: $\bar{t} = 31 \Leftrightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{50} t_i}{50} = 31 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{50} t_i = 1550$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{20}(x_i+3) + \sum_{i=21}^{35} x_i + \sum_{i=36}^{50}(x_i-\lambda) = 1550$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{20} x_i + 60 + \sum_{i=21}^{35} x_i + \sum_{i=36}^{50} x_i - 15\lambda = 1550$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{50} x_i + 60 - 15\lambda = 1550 \Leftrightarrow \nu\cdot\bar{x} + 60 - 15\lambda = 1550$$

$$\Leftrightarrow 50\cdot 30 + 60 - 15\lambda = 1550 \Leftrightarrow 1500 + 60 - 15\lambda = 1550$$

$$\Leftrightarrow -15\lambda = -10 \Leftrightarrow \lambda = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$\boxed{\Delta 3}$ $f(x) = x^2 + 4$ με $f'(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$

Απο υπόθεση: $0 < \alpha < \beta < \gamma < 1 \Rightarrow$

$0 < \alpha^2 < \beta^2 < \gamma^2 < 1 \Rightarrow 0 < 4 < \alpha^2 + 4 < \beta^2 + 4 < \gamma^2 + 4 < 5 \Rightarrow$

$f'(0) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(1)$.

Τοτε: $R = f(1) - f'(0) = 5 - 0 = 5$

και $\bar{x} = \dfrac{f'(0) + f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(1)}{5}$

$= \dfrac{0 + \alpha^2 + 4 + \beta^2 + 4 + \gamma^2 + 4 + 5}{5}$

$= \dfrac{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 17}{5} = \dfrac{6 + 17}{5} = \dfrac{23}{5}$

Επιμέλεια: Κων/νος Γεωργίου