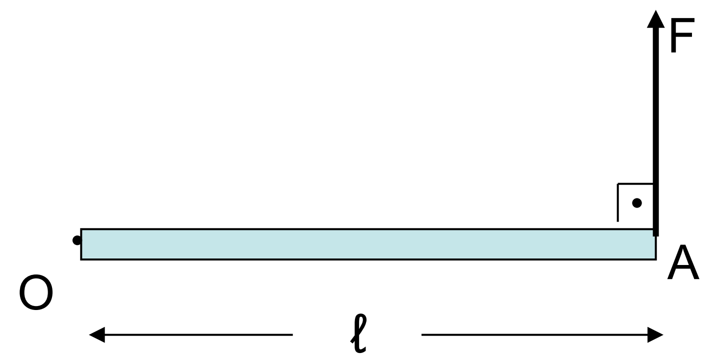
ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

Α. Ροπή δύναμης ως προς άξονα περιστροφής

Έστω ένα στερεό που δέχεται στο άκρο Α δύναμη F όπως στο σχήμα.

Στο Ο διέρχεται άξονας περιστροφής κάθετος στο στερεό και στη σελίδα



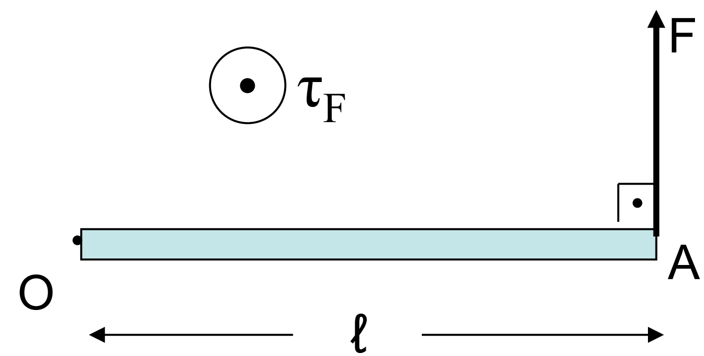
Η Ροπή της **F** έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της **F** επί την κάθετη απόσταση ℓ της **F** από τον άξονα περιστροφής.

Συμβολίζεται με τ και είναι μέγεθος ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟ

→ Μέτρο της ροπής: $\boxed{\tau_F = F \cdot \ell}$

→ Η κάθετη απόσταση ℓ της **F** από τον άξονα περιστροφής ονομάζεται: «**μοχλοβραχίονας**».

→ Η διεύθυνση της τ_F είναι ίδια με τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής.

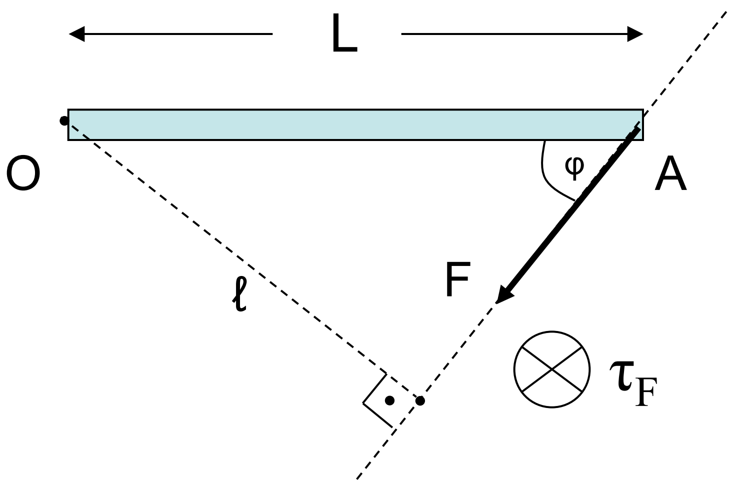


→ Η φορά της τ_F προκύπτει από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

→ Μονάδα μέτρησης της ροπής το 1 N · m (SI) .

Υπολογισμός της Ροπής Δύναμης

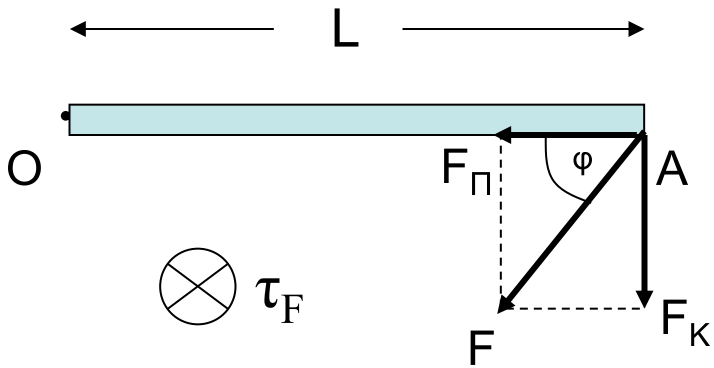
$1^{η}$ Περίπτωση:



$$\tau_F = F\cdot \ell \Rightarrow \tau_F = F\cdot L\cdot ημφ$$

Μηδέν διότι η $F_Π$ διέρχεται από τον άξονα περιστροφής

$2^{η}$ Περίπτωση:

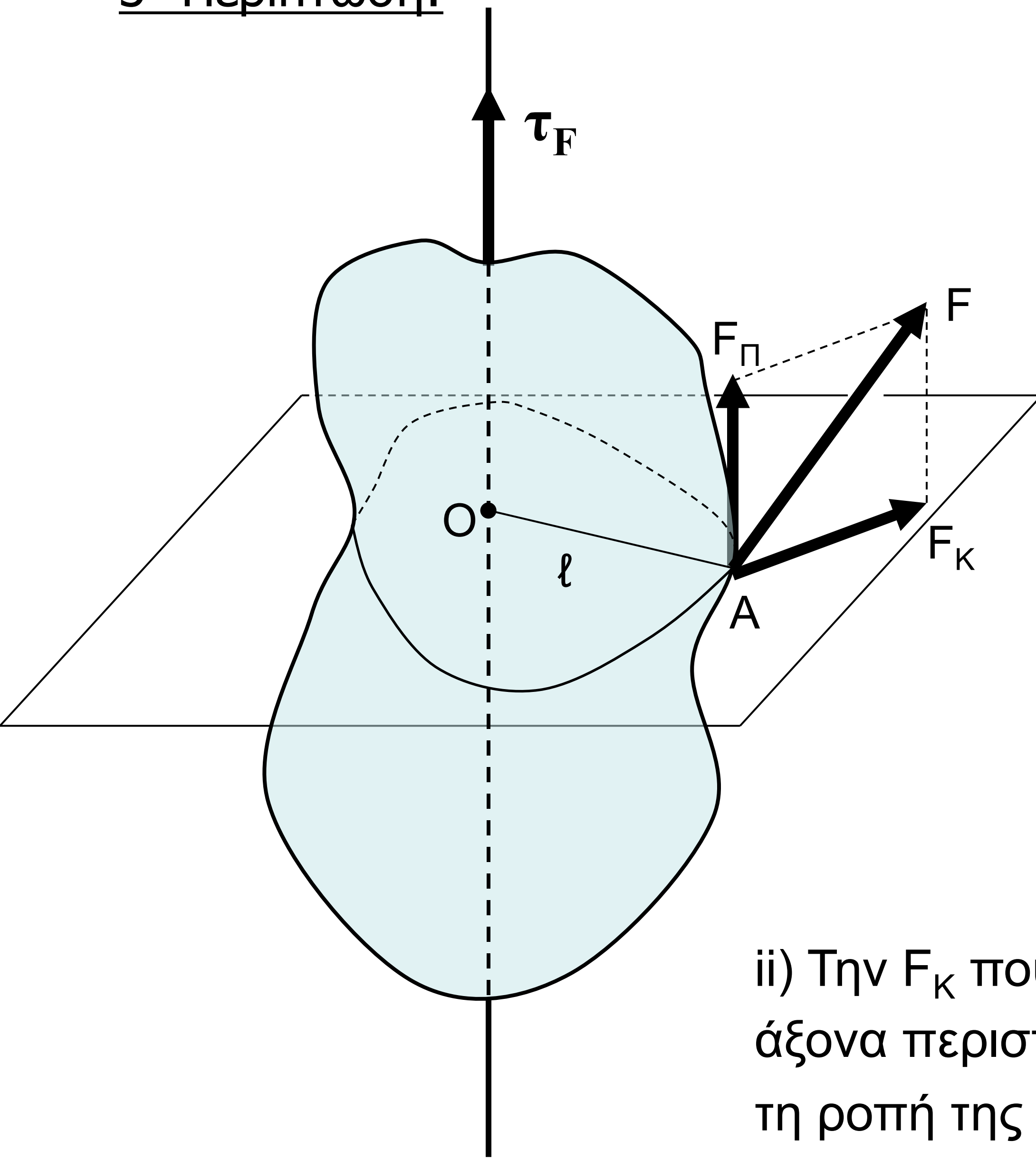


$$\tau_F = \tau_{FK} + \cancelto{0}{\tau_{FΠ}} =$$

$$= \tau_{FK} = F_K\cdot L =$$

$$= F\cdot ημφ\cdot L$$

3η Περίπτωση:



Στο σημείο Α του στερεού ασκείται η δύναμη F.

η F δε βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής.

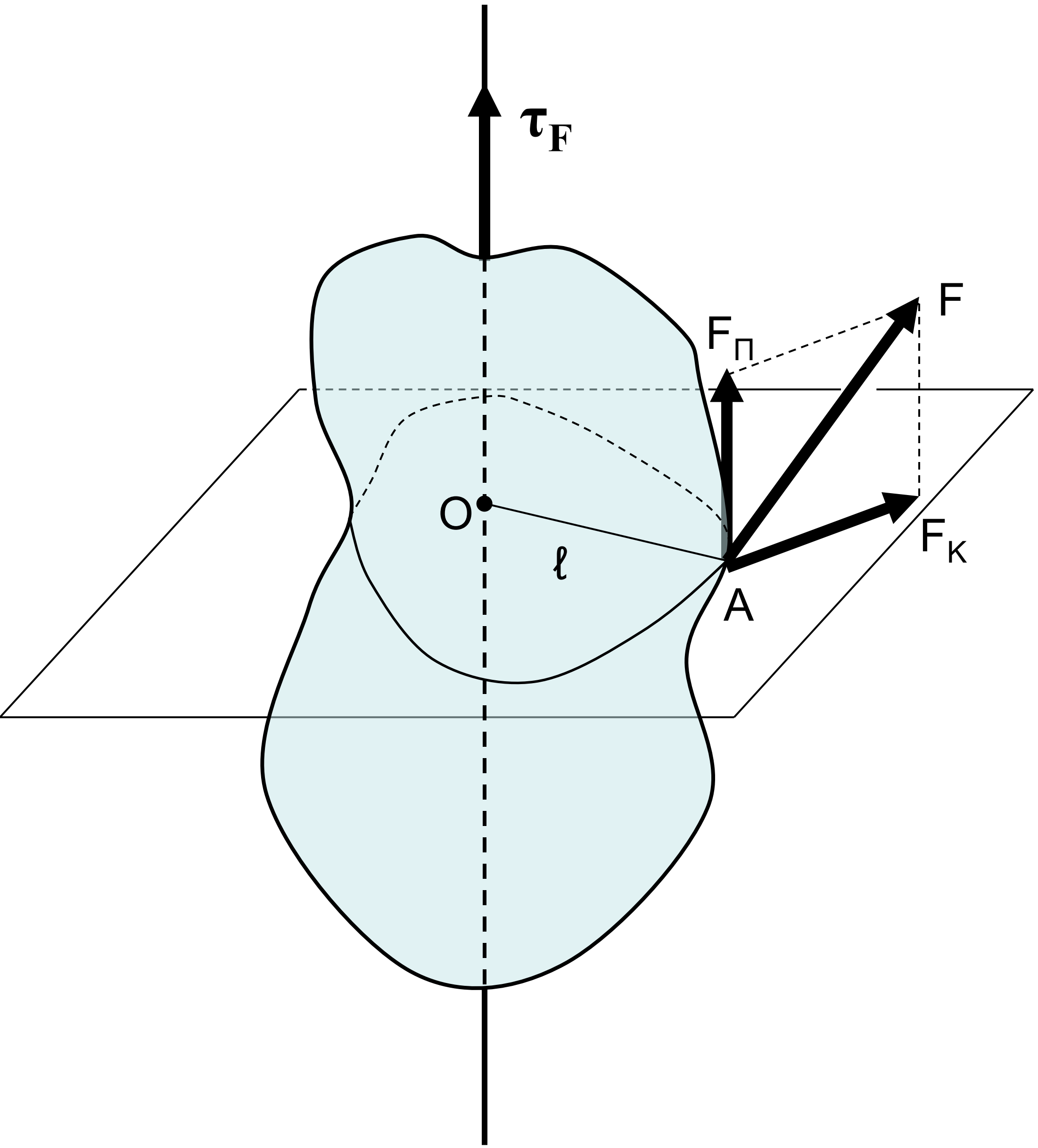
η F αναλύεται σε δύο συνιστώσες:

i) την F_Π που είναι παράλληλη στον άξονα περιστροφής και η οποία δε δημιουργεί ροπή

$$\tau_{F\Pi}=0$$

ii) Την F_K που είναι σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής. Η ροπή της είναι ίση με τη ροπή της F:

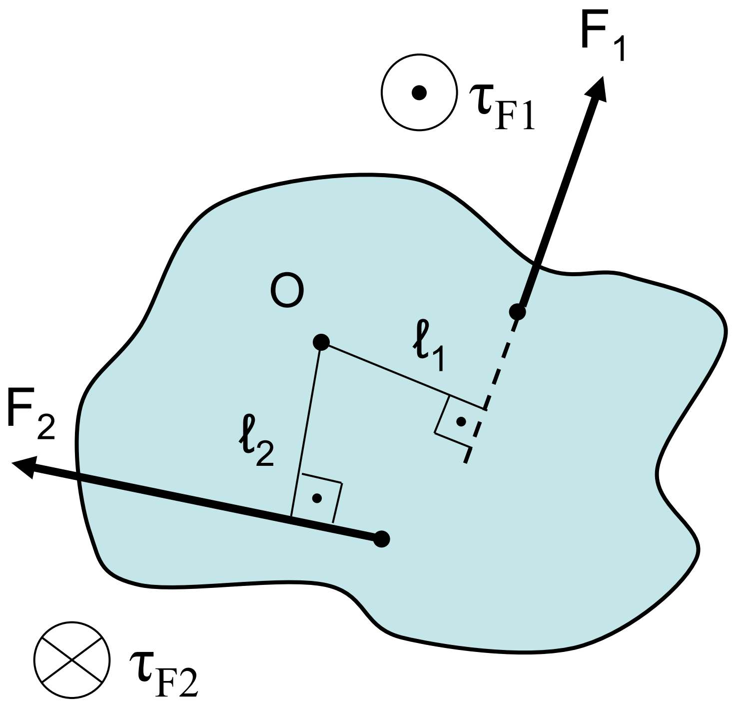
$$\tau_{FK} = \tau_F = F_K \cdot \ell$$



Τελικά η ροπή της F είναι η ροπή της F_K και έχει τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής.

Η φορά της βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού.

4η Περίπτωση:



Στο σημείο O διέρχεται ο άξονας περιστροφής κάθετα στη σελίδα.

Το στερεό δέχεται δύο δυνάμεις F_1 , F_2 με μοχλοβραχίονες ℓ_1 και ℓ_2 αντίστοιχα.

Οι ροπές των F_1 και F_2 έχουν μέτρα:

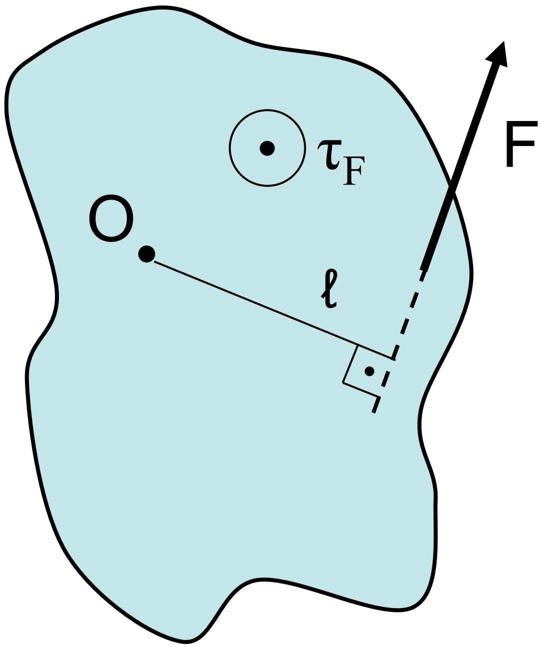
$$\tau_{F1} = F_1 \cdot \ell_1$$

$$\tau_{F2} = F_2 \cdot \ell_2$$

Η συνισταμένη ροπή βρίσκεται αν αθροίσουμε **διανυσματικά**:
(θεωρούμε **θετική** τη **φορά** περιστροφής που είναι **αντίθετη από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού**)

$$\Sigma\tau = F_1 \cdot \ell_1 - F_2 \cdot \ell_2$$

Β. Ροπή ως προς σημείο



Ορίζουμε ως **ροπή μιας δύναμης ως προς σημείο** το διανυσματικό μέγεθος που έχει:

α) **μέτρο** : το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί την απόσταση του φορέα της δύναμης από το σημείο

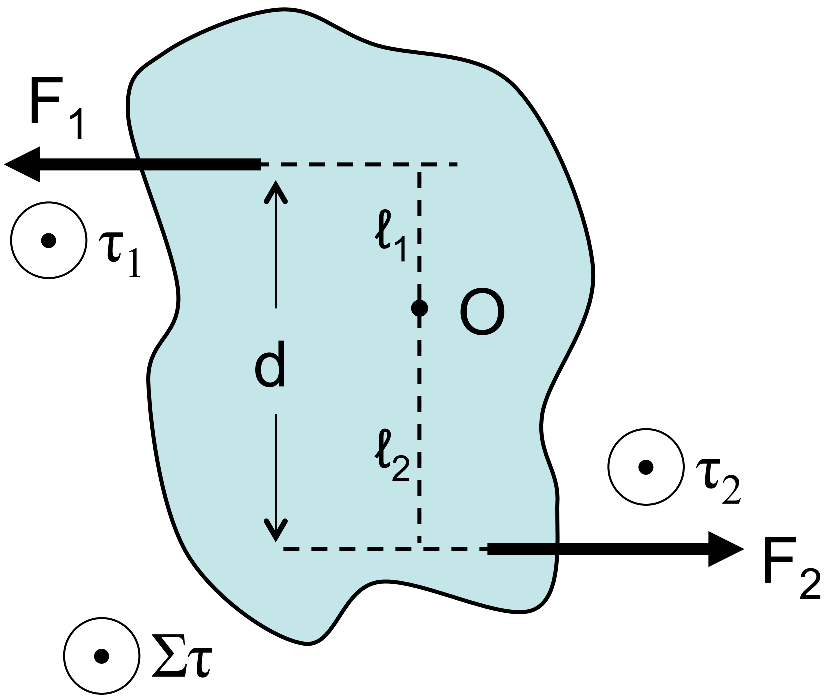
$$\tau_F = F \cdot \ell$$

β) **διεύθυνση** : κάθετη στο φορέα της δύναμης και στη διεύθυνση της κάθετης απόστασης της δύναμης από το σημείο.

γ) **φορά** : όπως ορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Γ. Ροπή ζεύγους δυνάμεων

Ζεύγος δυνάμεων ονομάζουμε δύο δυνάμεις που είναι αντίθετες (έχουν ίσα μέτρα, ίδια διεύθυνση, αντίθετη φορά), αλλά ασκούνται σε διαφορετικά σημεία του στερεού.



$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

και $\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right|$ (ίσα μέτρα)

$\tau_1 = F_1 \cdot \ell_1$ και $\tau_2 = F_2 \cdot \ell_2$

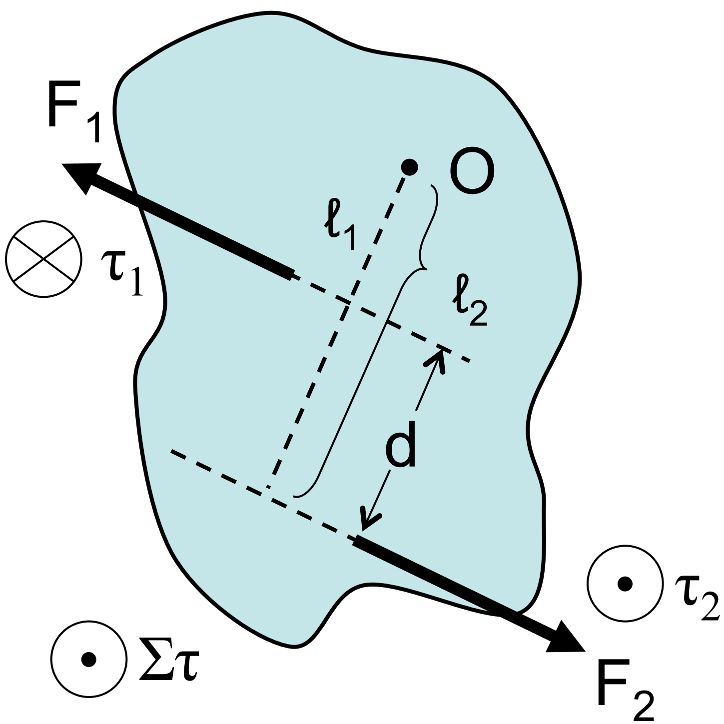
$$\Sigma\tau = \tau_1 + \tau_2 = F_1 \cdot \ell_1 + F_2 \cdot \ell_2 =$$

$$= F_1 \cdot (\ell_1 + \ell_2) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\Sigma\tau = F_1 \cdot d}}$$

Άρα: Ροπή ζεύγους δυνάμεων $\Sigma\tau = F_1 \cdot d$

Η ροπή ζεύγους έχει μέτρο που ισούται με το γινόμενο του μέτρου της μίας δύναμης, επί, τη μεταξύ τους απόσταση.

Αυτό ισχύει ανεξάρτητα από τη θέση του άξονα περιστροφής. Π.χ.:



$\tau_1 = -F_1 \cdot \ell_1$ και $\tau_2 = F_2 \cdot \ell_2$

$\Sigma\tau = \tau_1 + \tau_2 = -F_1 \cdot \ell_1 + F_2 \cdot \ell_2 =$

$= F_1 \cdot (-\ell_1 + \ell_2) \Rightarrow \boxed{\mathbf{\Sigma\tau = F_1 \cdot d}}$

ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Για να έχουμε **ισορροπία** σε ένα στερεό σώμα θα πρέπει:

1ον : Η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται να είναι μηδέν

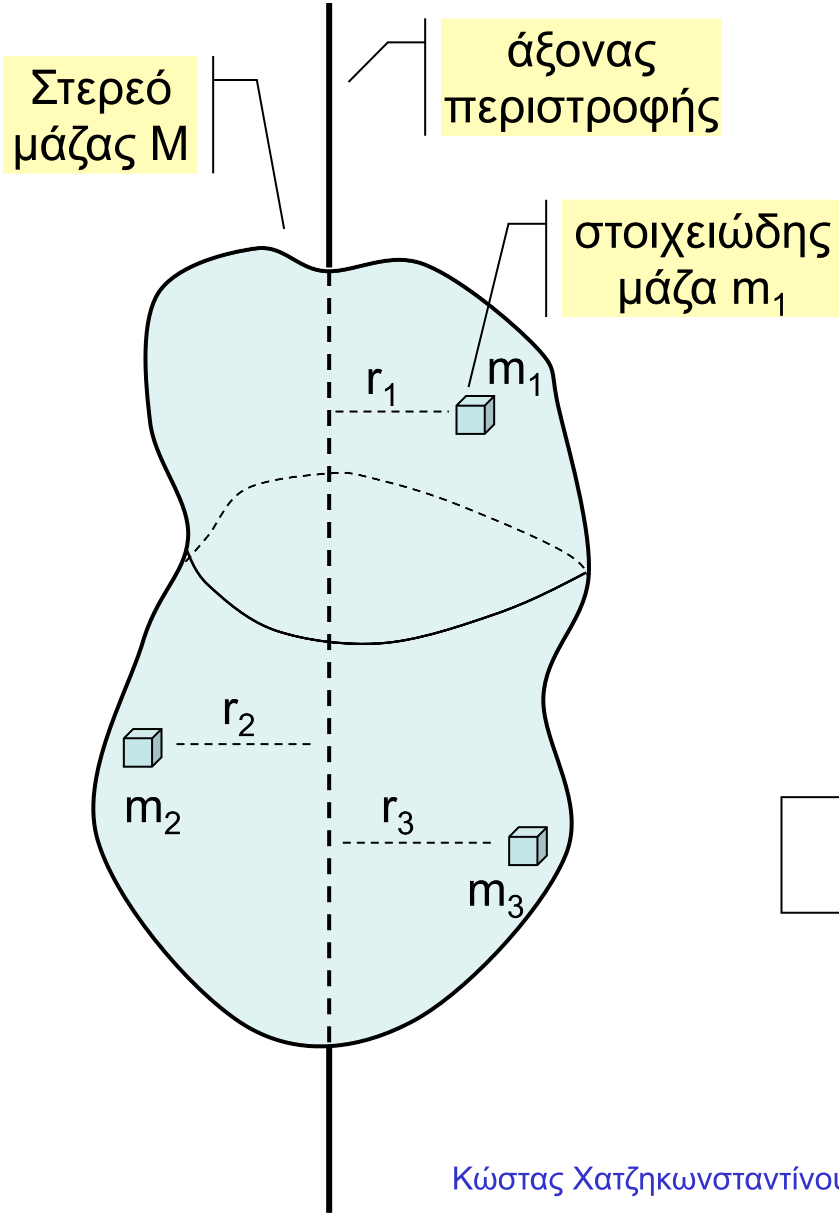
$$\boxed{\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} \Sigma\vec{F}_x = 0 \\ \Sigma\vec{F}_y = 0 \end{Bmatrix}}$$

και

2ον : Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών **ως προς οποιοδήποτε σημείο** να είναι μηδέν

$$\boxed{\Sigma\tau = 0}$$

ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ



Διαιρούμε το στερεό σε μεγάλο αριθμό στοιχειωδών μαζών που απέχουν διαφορετικές αποστάσεις από τον άξονα περιστροφής.

Ορίζουμε ως **ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής** το άθροισμα των γινομένων $\mathbf{m_i \cdot r_i^2}$ για όλες τις στοιχειώδεις μάζες που αποτελούν το στερεό:

$$\mathbf{I = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + \cdots\cdots + m_N \cdot r_N^2}$$

ή

$$\mathbf{I = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_i^2}$$

Η ροπή αδράνειας :

→ Είναι μονόμετρο μέγεθος.

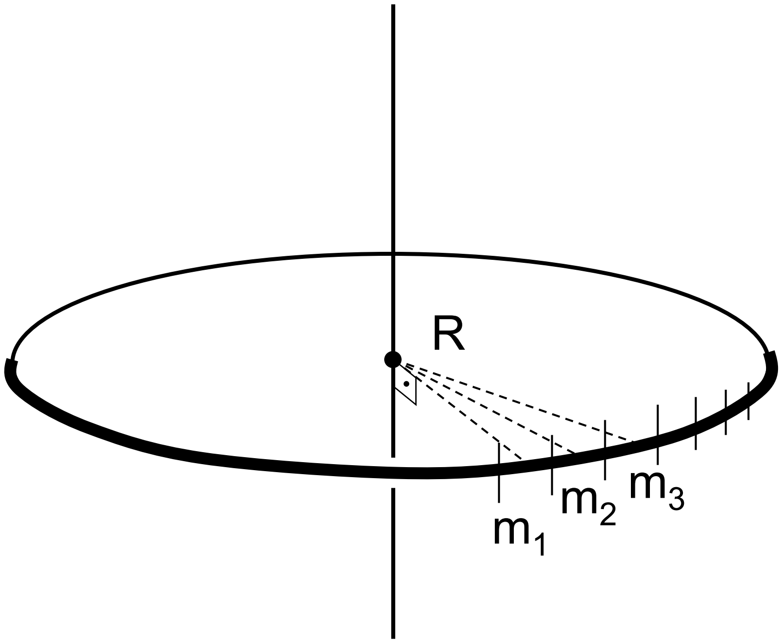
→ Έχει μονάδα μέτρησης το 1 $Kg \cdot m^2$.

→ Έχει τιμή που εξαρτάται: α) από τη μάζα του σώματος

β) από τον τρόπο που η μάζα του στερεού είναι κατανεμημένη γύρω από τον άξονα περιστροφής .

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η ροπή αδράνειας είναι διαφορετική για κάθε άξονα περιστροφής, όταν μιλάμε για το ίδιο σώμα.

Υπολογισμός ροπής αδράνειας δακτυλίου ακτίνας R και μάζας M, ως προς άξονα περιστροφής που διέρχεται από το c.m. και είναι κάθετος στο επίπεδο του δακτυλίου .

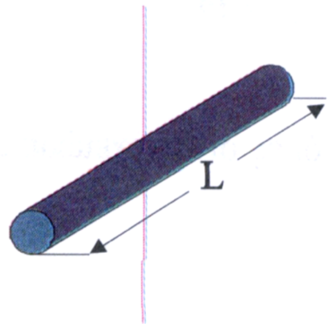


$$I = m_1 \cdot R^2 + m_2 \cdot R^2 + \cdots\cdots + m_N \cdot R^2$$

$$\Rightarrow \; I = (m_1 + m_2 + \cdots\cdots + m_N) \cdot R^2$$

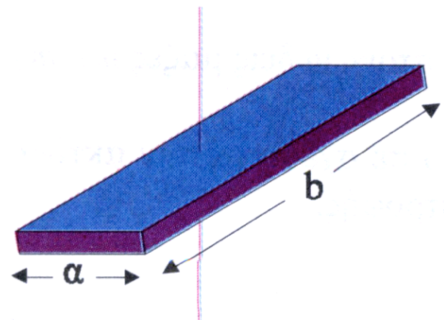
$$\Rightarrow \; \boxed{I = M \cdot R^2}$$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕ ΤΙΣ ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ
ΩΣ ΠΡΟΣ ΑΞΟΝΑ ΠΟΥ ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΌ ΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ



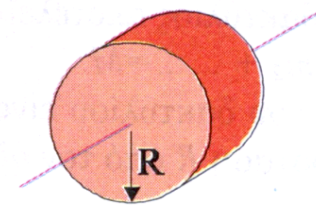
(α) Λεπτή ράβδος

$$I = \frac{1}{12} ML^2$$



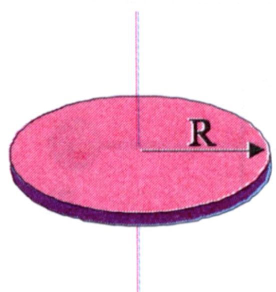
(β) Ορθογώνια πλάκα

$$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$



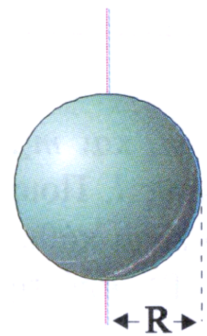
(γ) Συμπαγής κύλινδρος

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$



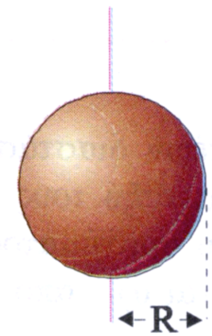
(δ) Δίσκος

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$



(ε) Σφαιρικος φλοιός

$$I = \frac{2}{3} MR^2$$

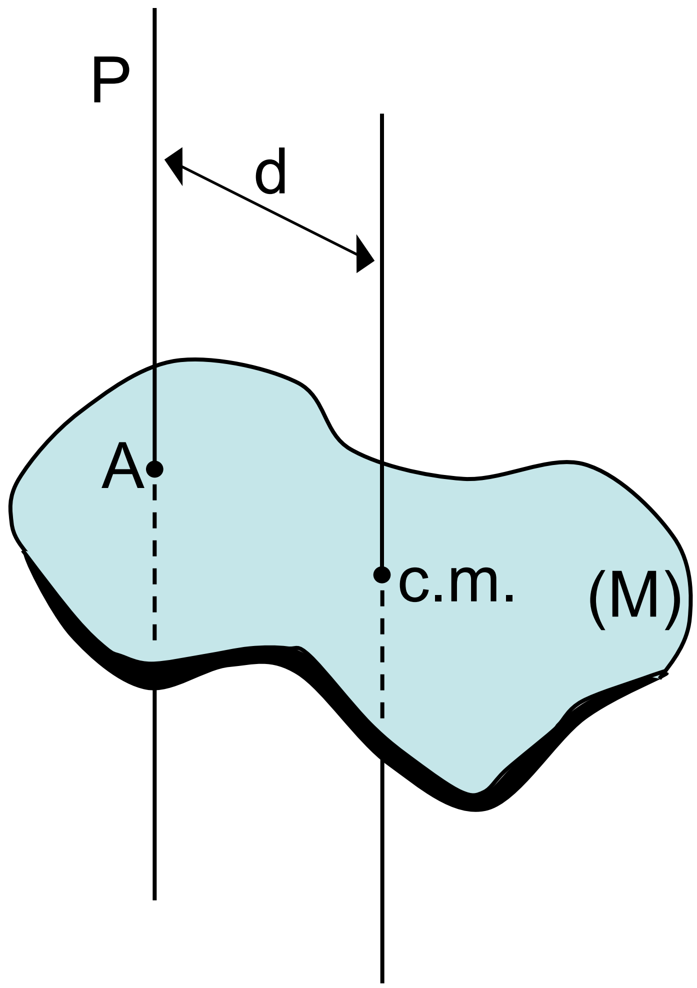


(στ) Συμπαγής σφαίρα

$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

Θεώρημα **STEINER** ή **ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΑΞΟΝΩΝ**

Έστω ένα στερεό μάζας Μ.



I_{cm} : ροπή αδράνειας του στερεού ως προς άξονα που διέρχεται από το c.m.

I_P : ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα P που διέρχεται από το σημείο A του στερεού. Το A απέχει απόσταση d από το c.m. Και ο άξονας P είναι παράλληλος με τον άξονα που διέρχεται από το c.m.

$$\boxed{\mathbf{I_P = I_{cm} + M \cdot d^2}}$$

Τελικά, τί εκφράζει η Ροπή Αδράνειας;

$\Longrightarrow$ Η ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΕΚΦΡΑΖΕΙ ΤΗΝ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΠΟΥ ΦΕΡΝΕΙ ΕΝΑ ΣΤΕΡΕΟ ΟΤΑΝ ΠΡΟΣΠΑΘΟΥΜΕ ΝΑ ΤΟΥ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΥΜΕ ΤΗ ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΤΟΥ ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ (ΔΗΛΑΔΗ ΟΤΑΝ ΠΑΜΕ ΝΑ ΤΟΥ ΔΗΜΙΟΥΡΓΗΣΟΥΜΕ ΓΩΝΙΑΚΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ).

ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Για στερεό σώμα που στρέφεται γύρω από άξονα, ισχύει:

$$\boxed{\Sigma\tau = I \cdot \alpha_\gamma}$$

→ Η παραπάνω σχέση συνδέει τα μέτρα των $\Sigma\tau$ και α_γ . Δε συνδέει τα μεγέθη αυτά διανυσματικά.

→ Η σχέση ισχύει πάντα για στροφικές κινήσεις.

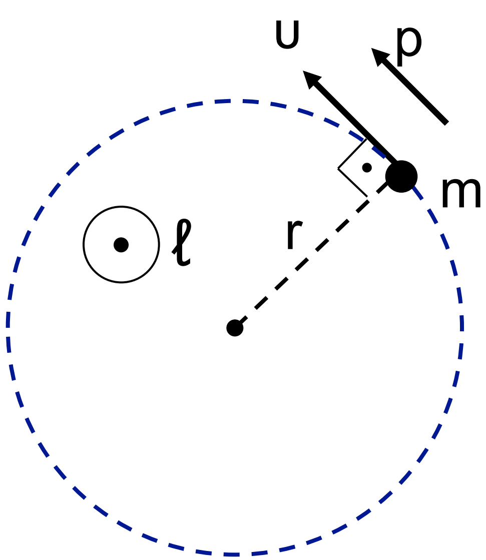
→ Η σχέση ισχύει και για σύνθετες κινήσεις, αρκεί να ισχύουν οι προϋποθέσεις : **α)** ο άξονας περιστροφής να διέρχεται από το κέντρο μάζας

β) ο άξονας περιστροφής να είναι και άξονας συμμετρίας

γ) ο άξονας περιστροφής να μην αλλάζει διεύθυνση (να κινείται παράλληλα στην αρχική του θέση) .

ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

Α. Στροφορμή Υλικού Σημείου που Εκτελεί Κυκλική Τροχιά



Σύμβολο στροφορμής: ℓ

Μέγεθος: διανυσματικό

Ορισμός :

i) μέτρο της στροφορμής: $\ell = \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$

$$\Rightarrow \boxed{\ell = \mathbf{m} \cdot \mathbf{\upsilon} \cdot \mathbf{r}}$$

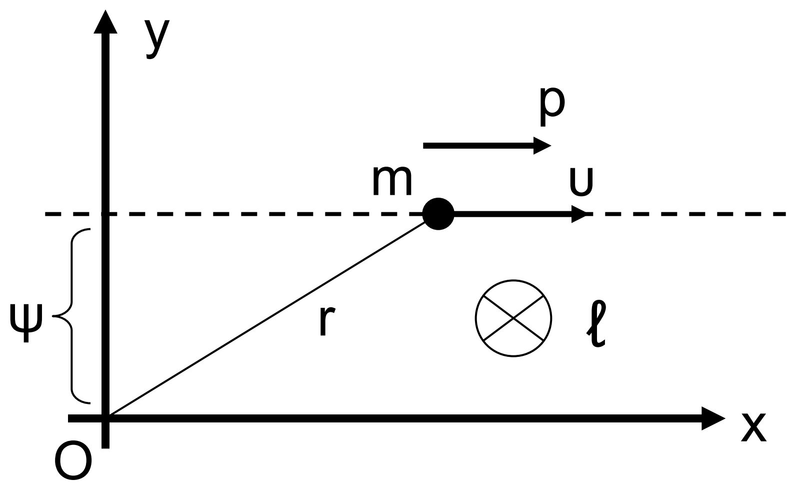
ii) διεύθυνση κάθετη στην ακτίνα r και στην ορμή p

iii) φορά που την προσδιορίζουμε με τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Μονάδα μέτρησης στο S.I. : το 1 $Kg \cdot m^2/s$ ή το 1 $J \cdot s$

Παρατήρηση:

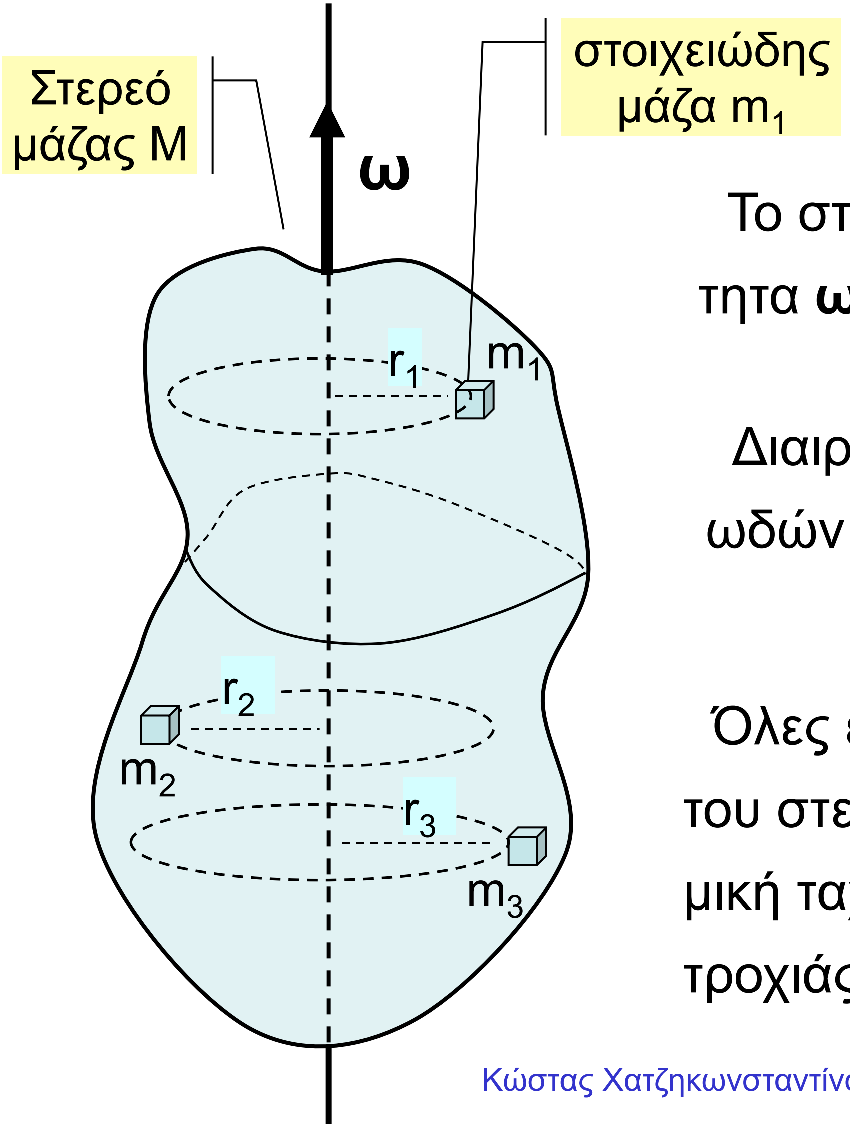
Στροφορμή έχει ένα υλικό σημείο ΠΑΝΤΑ ως προς την αρχή ενός συστήματος αναφοράς, ακόμα κι αν εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση:



$$\ell = \psi \cdot p \Rightarrow \boxed{\ell = m \cdot \upsilon \cdot \psi}$$

όπου ψ η απόσταση της αρχής O από το φορέα (διεύθυνση) της ταχύτητας.

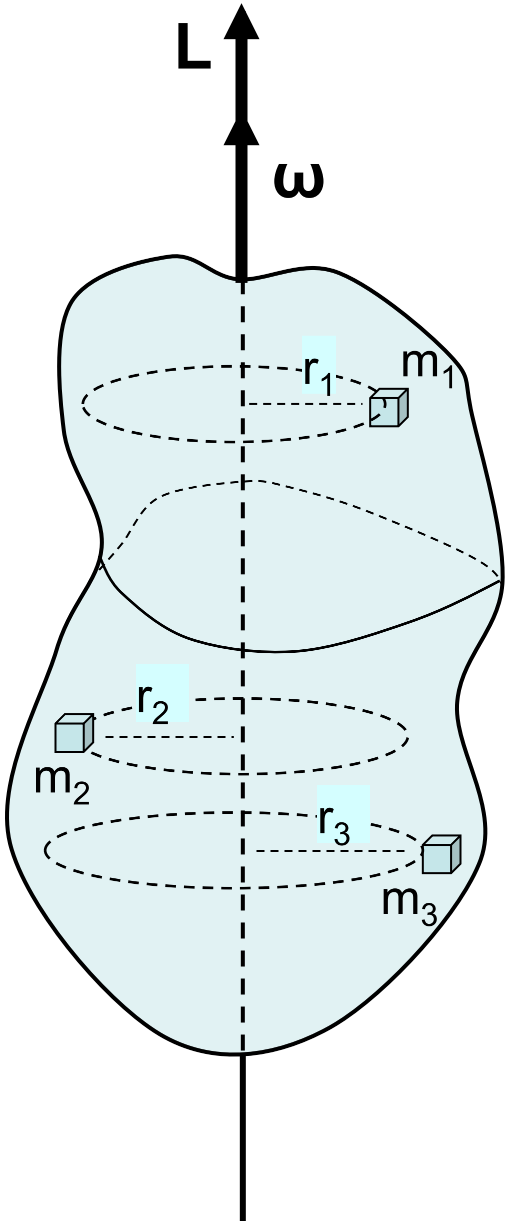
Β. Στροφορμή Στερεού Σώματος Που Στρέφεται ως Προς Άξονα Περιστροφής



Το στερεό σώμα στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα **ω**.

Διαιρούμε το στερεό σε μεγάλο αριθμό στοιχειωδών μαζών που εκτελούν κυκλικές τροχιές.

Όλες έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα **ω** (ίδια με του στερεού), αλλά η καθεμιά διαφορετική γραμμική ταχύτητα $\mathbf{u_i}$ που εξαρτάται από την ακτίνα της τροχιάς της: $\mathbf{u_i = \omega \cdot r_i}$



Κάθε στοιχειώδης μάζα έχει στροφορμή:

$$\ell_i = \mathbf{r_i} \cdot \mathbf{p_i} \quad \Rightarrow \quad \ell_i = \mathbf{m_i} \cdot \boldsymbol{\upsilon}_i \cdot \mathbf{r_i}$$

$$\Rightarrow \quad \ell_i = \mathbf{m_i} \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r_i}) \cdot \mathbf{r_i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ell_i = \mathbf{m_i} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r_i}^2}$$

Για να υπολογίσουμε τη στροφορμή **L** του στερεού αθροίζουμε (διανυσματικά) τις στροφορμές όλων των στοιχειωδών μαζών:

$$L = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ldots$$

$$L = m_1 \cdot \omega \cdot r_1^2 + m_2 \cdot \omega \cdot r_2^2 + m_3 \cdot \omega \cdot r_3^2 + \ldots$$

$$L = (m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2 + \ldots) \cdot \omega$$

άρα $\boxed{L = I \cdot \omega}$

Η κατεύθυνση της **L** είναι ίδια με την κατεύθυνση της **ω** .

Γ. Για σύστημα πολλών στερεών σωμάτων, η συνολική στροφορμή είναι το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών των στερεών:

$$\vec{L}_{\sigma\upsilon\sigma\tau\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \ldots$$

Μια πιο γενική μορφή του θεμελιώδους νόμου της στροφικής κίνησης:

Α. Για ένα στερεό: $$L = I \cdot \omega \Rightarrow dL = I \cdot d\omega \Rightarrow \frac{dL}{dt} = I \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = I \cdot \alpha_\gamma \quad \Rightarrow \boxed{\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau}$$

Β. Για σύστημα στερεών σωμάτων:

Η σχέση $\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}$ επεκτείνεται και στα συστήματα στερεών ως εξής:

$$\boxed{\Sigma\tau_{\varepsilon\xi\omega\tau\varepsilon\rho\iota\kappa\acute{\omega}\nu} = \frac{dL_{\sigma\upsilon\sigma\tau\acute{\eta}\mu\alpha\tau\omicron\varsigma}}{dt}}$$

όπου: $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi\omega\tau}$ είναι η συνισταμένη των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα.

$\left[\frac{dL}{dt}\right.$: ρυθμός μεταβολής της στροφορμής (μονάδα το 1 N·m)$\left.\right]$

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

Α. Για ένα στερεό

Αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δέχεται το στερεό είναι μηδέν τότε:

$$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow 0 = \frac{dL}{dt} \Rightarrow dL = 0 \Rightarrow L_{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}} - L_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}} = 0$$

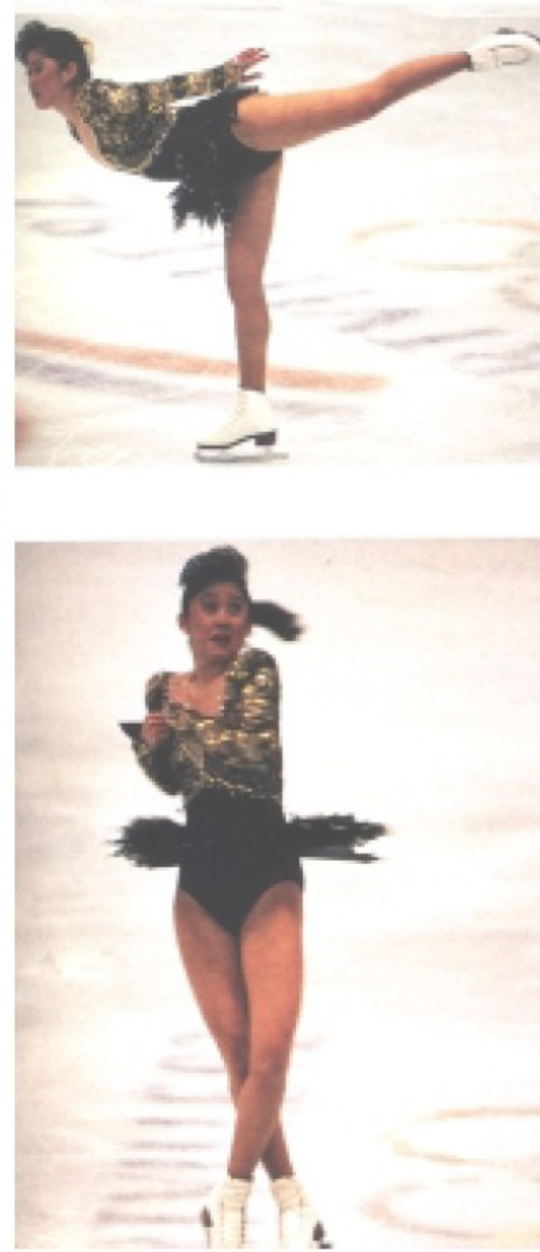
$$\Rightarrow \boxed{L_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}} = L_{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}}} \Rightarrow \boxed{I_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}} \cdot \omega_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}} = I_{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}} \cdot \omega_{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}}}$$

Β. Για ένα σύστημα στερεών

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων που δέχεται το σύστημα είναι μηδέν τότε:

$$\Sigma\tau_{\varepsilon\xi\omega\tau} = 0 \Rightarrow \boxed{L_{\substack{(\alpha\rho\chi)\\ \sigma\upsilon\sigma\tau\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma}} = L_{\substack{(\tau\varepsilon\lambda)\\ \sigma\upsilon\sigma\tau\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma}}}$$

Τα παραδείγματα φαινομένων στα οποία διατηρείται η στροφορμή είναι πολλά. Στην εικόνα 4.4 φαίνεται μια αθλήτρια του καλλιτεχνικού πατινάζ, που στριφογυρίζει στο παγοδρόμιο. Η αθλήτρια μπορεί, συμπτύσσοντας τα χέρια και τα πόδια της, να αυξήσει τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της. Εάν η τριβή των παγοπέδιλων με τον πάγο θεωρηθεί αμελητέα, οι εξωτερικές δυνάμεις - όπως το βάρος και η δύναμη που δέχεται από το έδαφος - δε δημιουργούν ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής της, επομένως η στροφορμή της διατηρείται, δηλαδή το γινόμενο $I\omega$ παραμένει σταθερό. Συμπτύσσοντας τα χέρια και τα πόδια της η ροπή αδράνειας μειώνεται, οπότε, αφού το γινόμενο $I\omega$ μένει σταθερό, αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της.



Εικ. 4.4 Η χορεύτρια συμπτύσσοντας τα άκρα της αυξάνει τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της.

Όταν οι ακροβάτες θέλουν να κάνουν πολλές στροφές στον αέρα συμπτύσσουν τα χέρια και τα πόδια τους. Κατά την κίνηση του ακροβάτη στον αέρα, μοναδική εξωτερική δύναμη είναι το βάρος του, το οποίο, επειδή διέρχεται από το κέντρο μάζας, δε δημιουργεί ροπή και η στροφορμή του διατηρείται. Με τη σύμπτυξη των άκρων μειώνεται η ροπή αδράνειας, επομένως αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής. Στο σχήμα 4.30 φαίνεται πως, με την τεχνική αυτή, μια κατάδυση μπορεί να γίνει πολύ θεαματική.

Με τη σύμπτυξη των άκρων μειώνεται η ροπή αδράνειας της καταδύτριας με συνέπεια την αύξηση της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής της.

Τα αστέρια τα οποία στο τελευταίο στάδιο της ζωής τους έχουν μάζα από 1,4 έως 2,5 φορές τη μάζα του Ήλιου, μετατρέπονται σε αστέρες νετρονίων ή pulsars. Τα αστέρια αυτά, όταν εξαντλήσουν τις πηγές ενέργειας που διαθέτουν, συρρικνώνονται λόγω της βαρύτητας μέχρις ότου η πυρήνες των ατόμων τους αρχίσουν να εφάπτονται, με αποτέλεσμα η ακτίνα ενός τέτοιου αστεριού να είναι μόνο 15-20 km. Επειδή η συρρίκνωση οφείλεται σε εσωτερικές δυνάμεις η στροφορμή διατηρείται σταθερή και επειδή η ροπή αδράνειας του αστεριού μειώνεται δραματικά έχουμε μια αντίστοιχη αύξηση της ταχύτητας περιστροφής. Υπολογίζεται ότι ένας αστέρας νετρονίων περιστρέφεται με συχνότητα 3000 στροφές το δευτερόλεπτο. Για σύγκριση, να αναφέρουμε ότι η περίοδος περιστροφής του Ήλιου είναι 25 μέρες.

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

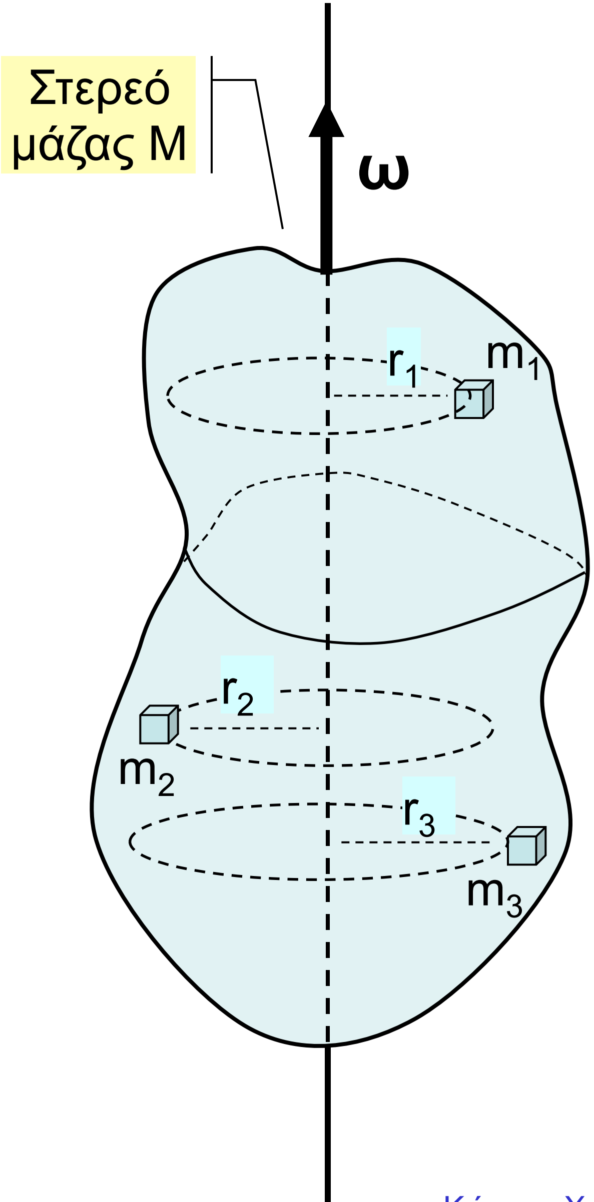
Α. Όταν εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση:

$$\boxed{K = \frac{1}{2}\cdot M\cdot \upsilon_{cm}^2}$$

Μ: η μάζα του στερεού σώματος

υ_{cm}: η ταχύτητα του κέντρου μάζας του στερεού

Β. Όταν εκτελεί μόνο στροφική κίνηση:



Το στερεό σώμα στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα **ω**.

Διαιρούμε το στερεό σε μεγάλο αριθμό στοιχειωδών μαζών που εκτελούν κυκλικές τροχιές.

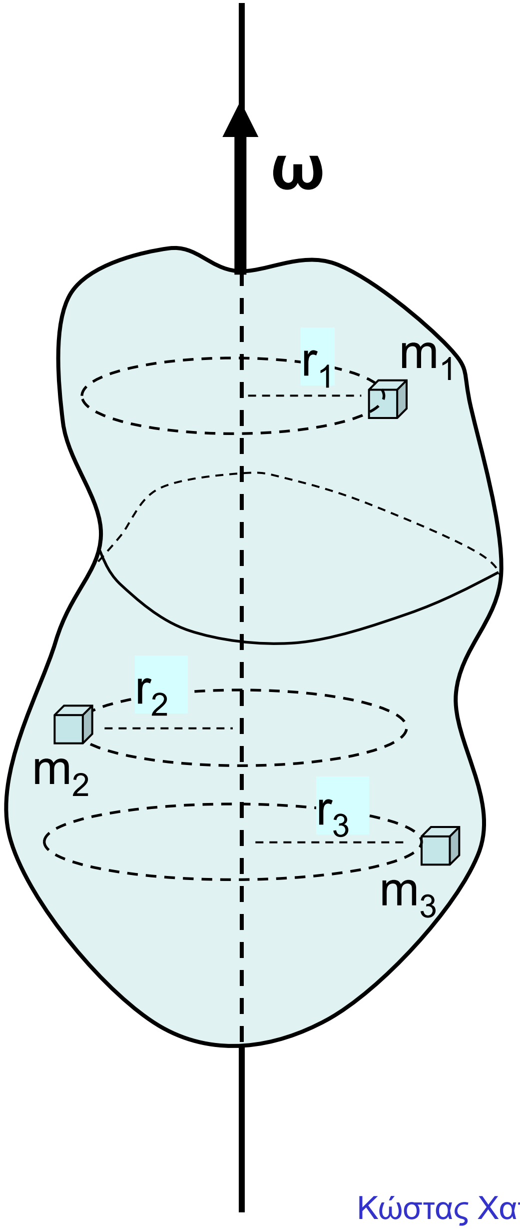
Όλες έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα **ω** (ίδια με του στερεού), αλλά η καθεμιά διαφορετική γραμμική ταχύτητα $\mathbf{υ_i}$ που εξαρτάται από την ακτίνα της τροχιάς της: $\mathbf{υ_i = ω \cdot r_i}$

Κάθε στοιχειώδης μάζα έχει κατά την κίνηση της κινητική ενέργεια:

$$K_i = \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot υ_i^2 \Rightarrow K_i = \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot (ω \cdot r_i)^2$$

$$\Rightarrow K_i = \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot ω^2 \cdot r_i^2$$

Β. Όταν εκτελεί μόνο στροφική κίνηση:



Αθροίζοντας τις κινητικές ενέργειες όλων των υλικών σημείων υπολογίζω την κινητική ενέργεια του στερεού:

$$\mathbf{K = K_1 + K_2 + K_3 + \ldots}$$

$$\mathbf{K = \frac{1}{2}\cdot m_1 \cdot \omega^2 \cdot r_1^2 + \frac{1}{2}\cdot m_2 \cdot \omega^2 \cdot r_2^2 + \frac{1}{2}\cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot r_3^2 + \ldots}$$

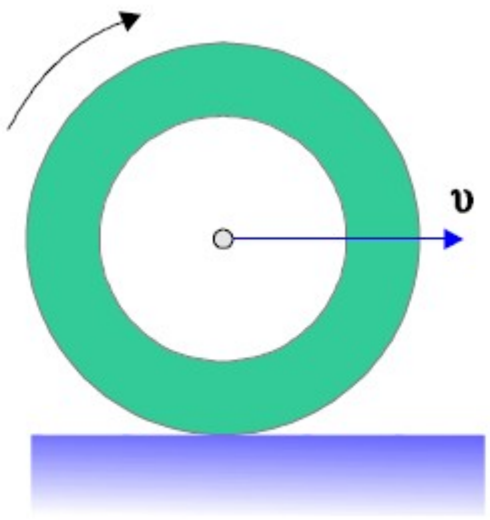
$$\mathbf{K = \frac{1}{2}\cdot\left(m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2 + \ldots\right)\cdot \omega^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{K = \frac{1}{2}\cdot I \cdot \omega^2}}$$

Γ. Όταν εκτελεί σύνθετη κίνηση:

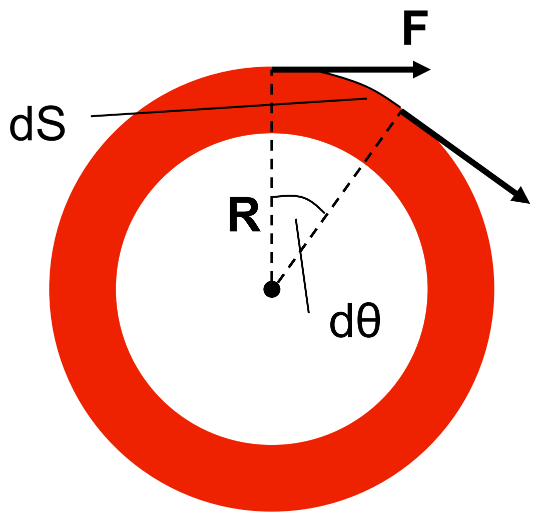
Αθροίζουμε τις κινητικές ενέργειες που έχει το στερεό λόγω μεταφορικής και λόγω στροφικής κίνησης που εκτελεί και υπολογίζω την κινητική ενέργεια του στερεού:

$$\boxed{K = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2}$$



Π.χ. Ο τροχός που κυλά έχει κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής και λόγω στροφικής κίνησης.

ΕΡΓΟ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ



Έστω ένας τροχός ακτίνας R. Μία δύναμη F ασκείται στην περιφέρεια του, παραμένοντας εφαπτόμενη.

Σε μία απειροστά μικρή στροφή του τροχού, κατά γωνία dθ, η δύναμη F, μετακινεί το σημείο εφαρμογής της πάνω σε στοιχειώδες τόξο dS.

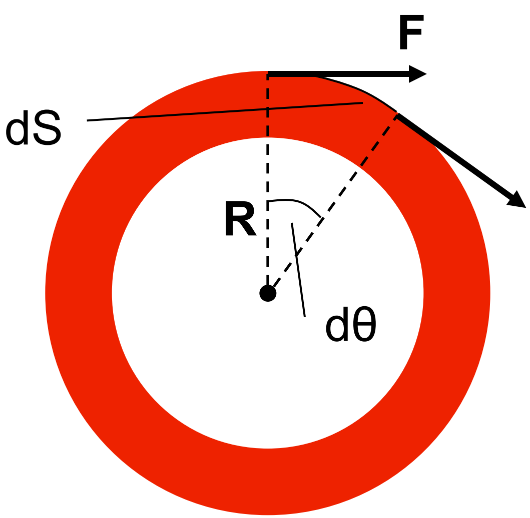
Τότε το έργο που παράγει η δύναμη είναι:

$$dW = F \cdot dS \Rightarrow dW = F \cdot (R \cdot d\theta)$$

Το γινόμενο F·R είναι η ροπή της δύναμης, επομένως:

$$\boxed{dW = \tau \cdot d\theta}$$

ΕΡΓΟ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ



Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το έργο της δύναμης όταν το σώμα στρέφεται κατά γωνία Δθ, τότε μπορούμε να χωρίσουμε τη γωνία σε μεγάλο αριθμό απειροστών γωνιών dθ και να προσθέσουμε τα έργα για όλες τις στοιχειώδεις μετατοπίσεις της δύναμης. Καθώς η F έχει σταθερή ροπή έχουμε:

$$\mathbf{W = dW_1 + dW_2 + dW_3 + \ldots}$$

$$\mathbf{W = \tau \cdot d\theta_1 + \tau \cdot d\theta_2 + \tau \cdot d\theta_3 + \ldots}$$

$$\mathbf{W = \tau \cdot (d\theta_1 + d\theta_2 + d\theta_3 + \ldots)}$$

$$\boxed{\mathbf{W = \tau \cdot \Delta\theta}}$$

ΙΣΧΥΣ ΔΥΝΑΜΗΣ

Γενικά: ΙΣΧΥΣ = ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt}}$$

μονάδα μέτρησης της ισχύος στο S.I.: το 1 Watt (W) $\left(W = \frac{J}{s}\right)$

Ισχύς Δύναμης: Ρυθμός με τον οποίο μια δύναμη δίνει ενέργεια σε ένα σώμα (θετική ισχύς) , ή

Ρυθμός με τον οποίο μια δύναμη παίρνει ενέργεια από ένα σώμα (αρνητική ισχύς)

ΙΣΧΥΣ ΔΥΝΑΜΗΣ

Ισχύς Δύναμης που προκαλεί ροπή σε στερεό σώμα:

$$P_F = \frac{dW_F}{dt} \Rightarrow P_F = \frac{\pm\tau \cdot d\theta}{dt} \Rightarrow \boxed{P_F = \pm\tau \cdot \omega}$$

► Η σχέση μας επιτρέπει να υπολογίζουμε τη **στιγμιαία ισχύ** που έχει μια δύναμη.

► Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τη **μέση ισχύ** μιας δύναμης, τότε χρησιμοποιούμε τη σχέση:

$$\boxed{\overline{P}_F = \frac{W_F}{\Delta t}}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΡΓΟΥ - ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Σε οποιοδήποτε είδος κίνησης που εκτελεί ένα σώμα ισχύει ότι:

Το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των δυνάμεων (ΣW) που δέχεται το σώμα, είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας (ΔΚ).

► Για στερεό που κάνει στροφική κίνηση:

$$\boxed{\frac{1}{2}\cdot I\cdot \omega^2_{\tau\varepsilon\lambda} - \frac{1}{2}\cdot I\cdot \omega^2_{\alpha\rho\chi} = \Sigma W}$$

► Για στερεό που κάνει σύνθετη κίνηση:

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\cdot M\cdot \upsilon^2_{cm(\tau\varepsilon\lambda)} + \frac{1}{2}\cdot I\cdot \omega^2_{\tau\varepsilon\lambda}\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot M\cdot \upsilon^2_{cm(\alpha\rho\chi)} + \frac{1}{2}\cdot I\cdot \omega^2_{\alpha\rho\chi}\right) = \Sigma W}$$