

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ (1ο Γ' Λυκείου)

1. Να βρεθούν οι τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε:

A) τα σημεία  $(1, -1), (2, 2)$  να ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x - 2$ .

B) τα σημεία  $(0, -1), (1 - e, -2)$  να ανήκουν στην γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \ln(x + \alpha) - \beta$ .

2. Να βρεθεί η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\sqrt{2x + \alpha}}{\beta}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία  $(0, \frac{1}{2}), (4, \frac{3}{2})$ .

3. Να βρεθεί ο ακέραιος  $\lambda$  ώστε η σχέση  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 6\lambda^2 \\ x - 1, & x \geq 5\lambda^2 + 1 \end{cases}$  να είναι συνάρτηση.

4. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

$$f(x) = \frac{3x - 1}{x^4 - 4x^2 + 3}$$

$$f(x) = \frac{3}{x^4 + 1}$$

$$f(x) = \frac{4x^8 - 1}{|x + 1| - |x - 1|}$$

$$f(x) = \sqrt{2x - 5} - \sqrt{10 - x}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 10x + 25}$$

$$f(x) = \sqrt{2 - x^3 - x^6}$$

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2}{3\sqrt{-x^2 + x + 6} - 4x + 2}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x}{x - 5} - 1}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4|x| + 3}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{2 - \sqrt{x + 1}}$$

$$f(x) = \frac{2 - 5x}{x - \sqrt{x} - 6}$$

$$f(x) = \sqrt{|x + 1| - 3}$$

$$f(x) = \log \frac{x + 1}{x - 2}$$

$$f(x) = \log(\sqrt{x - 1} - \sqrt{x + 2})$$

$$f(x) = \ln(2 - |2x - 4|)$$

$$f(x) = \sqrt{\log[\log(x^2 - 15)]}$$

$$f(x) = \sqrt{2\sin x - \sqrt{3}}$$

$$f(x) = \sqrt{\operatorname{erf}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \eta \mu x}$$

$$f(x) = (3 - x)^{\sqrt{2x + 10}}$$

$$f(x) = (-x^2 + x + 20)^{\frac{3x}{x - 2}} + \log \frac{x + 3}{x - 1}$$

$$f(x) = \sqrt{5 - |x + 2|} - (3x + 6)^{4x^2 - 1}$$

$$f(x) = \frac{5x^{13} - 3x^7 + 1}{|5 - x| - 3|x + 7|}$$

$$f(x) = \frac{5}{\sqrt{2\eta \mu x - \sqrt{3}}}$$

$$f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x} - 6}$$

5. Να βρεθούν οι τιμές του  $\alpha$  ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να έχουν πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{2x^3 - 4}{\alpha x^2 + 2} \quad f(x) = \frac{1 - x^2}{\alpha x^2 - \alpha x + \alpha^2} \quad f(x) = \sqrt{\alpha x^2 - 4x + \alpha} \quad f(x) = \ln(1 - \alpha x^2)$$

6. Δίνεται η σχέση  $f(x) = \begin{cases} x-2, & x \in (-\infty, 5\lambda^2] \\ x^2, & x \in [4\lambda^2 - \lambda + 2, +\infty) \end{cases}$ . Να βρεθεί ο φυσικός αριθμός  $\lambda$  ώστε η σχέση

$f(x)$  να είναι συνάρτηση. Κατόπιν να γίνει η γραφική παράσταση της  $f$  και με τη βοήθεια αυτής να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

7. Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές τις παρακάτω συναρτήσεις :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2|x|+3}{4} & f(x) &= \frac{|x+1|-2}{1-|x+1|} & f(x) &= |x^2 - 5x + 6| + 2 & f(x) &= |x+2| - |x-2| \\ f(x) &= ||x|-2| & f(x) &= 3|\ln x - 1| - x & f(x) &= 4|3x-4| - |e^x + 1| \end{aligned}$$

8. Αν οι παρακάτω σχέσεις ισχύουν για κάθε  $x \in \mathbf{R}$  (εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά) να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων :  $f(x-4) = \frac{x-5}{x-2}, x \neq \pm 2$   $f(2x-1) = x^2 - x + 1$

$$f(3-2x) = \frac{4x^2-1}{2x-1}, x \neq \frac{1}{2} \quad f(x+1) = 2x^2 - 3x + 1 \quad xf(x) - f(-x) = x + 1 \quad (x^2 + 1)f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = x, x \neq 0$$

9. Αν οι παρακάτω σχέση ισχύει για κάθε  $x \neq \pm 1, 2$  να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x$

10. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  που να ικανοποιεί τη σχέση  $f(1-x) + f(x) = x$ .

11. Να βρεθούν τα σημεία τομής των παρακάτω συναρτήσεων με τους άξονες :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 3x + 2 & f(x) &= x^2 - 5x + 6, x \in [5, 10] & f(x) &= \frac{\sqrt{x+1}}{x} + 3 \\ f(x) &= \sqrt{x-1} - \sqrt{x+1} & f(x) &= e^{x^2-4x+3} & f(x) &= \ln(x+5) + 2 \end{aligned}$$

12. Να βρεθούν τα κοινά σημεία (σημεία τομής) των παρακάτω συναρτήσεων :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x-1 \text{ και } g(x) = x+4 & f(x) &= x+1 \text{ και } g(x) = x^2+2 \\ f(x) &= x^2-2x+3 \text{ και } g(x) = -x^2+2x-3 & f(x) &= x+1 \text{ και } g(x) = \sqrt{2x+5} \\ f(x) &= \sqrt[3]{x} \text{ και } g(x) = \sqrt{x} & f(x) &= e^{x+1} \text{ και } g(x) = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

13. Να βρεθούν οι τιμές του  $x$  για τις οποίες η γραφική παράσταση της  $f$  είναι πάνω από τον άξονα  $x'x$ . i)  $f(x) = x^2 - 6x + 8$  ii)  $f(x) = x^2 - x + 1$  i)  $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 4)$  ii)  $f(x) = e^{2x} - \frac{1}{e}$

14. Να βρεθούν οι τιμές του  $x$  για τις οποίες η γραφική παράσταση της  $f$  είναι κάτω από τον άξονα  $x'x$ . i)  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$  ii)  $f(x) = x - 3 - x^2$

15. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι ίσες. Αν είναι  $f \neq g$ , να βρείτε το «ευρύτερο» υποσύνολο του  $\mathbf{R}$  για το οποίο ισχύει  $f(x) = g(x)$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x^3 \text{ και } g(x) = 3 \ln x & f(x) &= \ln x^4 \text{ και } g(x) = 4 \ln x \\ f(x) &= \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{2x}} \text{ και } g(x) = \sqrt{\frac{x+3}{2x}} & f(x) &= \sqrt{2x(x-5)} \text{ και } g(x) = \sqrt{2x} \cdot \sqrt{x-5} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^3 - 1} \text{ και } g(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1} \quad f(x) = \ln(x+2) - \ln(x-3) \text{ και } g(x) = \ln \frac{x+2}{x-3}.$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2|x|}{x^2 - 4} \text{ και } g(x) = \frac{|x|}{|x| - 2} \quad f(x) = \sqrt{x - |x|} \text{ και } g(x) = \sqrt{(x+1)^2} - x - 1$$

$$f(x) = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x \text{ και } g(x) = 1 \quad f(x) = \log^2(x-2) \text{ και } g(x) = \log(x-2) + 2$$

16. Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων  $\alpha, \beta$  ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις  $f, g$  να είναι ίσες.

i)  $f(x) = \frac{\alpha(\alpha x + 1)}{x + 4 - \alpha}$  και  $g(x) = \frac{(3\alpha - 2)x + 3\alpha - 4}{x + \alpha}$     ii)  $f(x) = \frac{(\alpha + 3)x - 2\alpha + 1}{x + \beta}$  και  $g(x) = \frac{-2\alpha x + 3}{x + 2 - \beta}$

iii)  $f(x) = (\alpha x + 1)\sqrt{x+1}$  και  $g(x) = \sqrt{(x+\beta)^3}$     iv)  $f(x) = \ln(x-\alpha) - \ln(\beta x^2 + 1)$  και  $g(x) = \ln \frac{x - \frac{4}{3}}{\beta^2 x^2 + \beta}$

17. Να βρεθούν οι συναρτήσεις  $f+g, f-g, f \cdot g, \frac{f}{g}$  στις παρακάτω περιπτώσεις :

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \text{ και } g(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$f(x) = \ln(x^2 - 1) \text{ και } g(x) = \ln \frac{1}{x+1}$$

$$f(x) = e^{x+1} \text{ και } g(x) = \frac{e^x + 1}{e}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 7 \\ x+1, & x \geq 7 \end{cases} \text{ και } g(x) = x^2 - 1$$

18. Αν  $f(x) = x+1$  και  $g(x) = x-5$ , να βρεθούν οι συναρτήσεις :    i)  $\frac{1}{f} + \frac{2}{g}$     ii)  $f^2 - gf + 2$

19. Αν  $f(x) = 2x-3$  και  $g(x) = 3-x$ , να βρεθούν οι συναρτήσεις :    i)  $(f-g)^2$     ii)  $f(f+g)$

20. Αν για τις συναρτήσεις  $f:A \rightarrow \mathbb{R}, g:B \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει  $f = g$ , να δείξετε ότι  $f^2 = g^2$ .

21. Να ορίσετε τις συναρτήσεις  $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$  αν :

$$f(x) = 2x + 3 \text{ και } g(x) = x - 7, x \in [0, 10]$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [-1, 10] \\ 2x-5, & x \in (10, 20] \end{cases} \text{ και } g(x) = 3x-2,$$

$$f(x) = x^2 - 1 \text{ και } g(x) = \sqrt{x+3}$$

$$x \in [-5, 5]$$

$$f(x) = \sqrt{4-x} \text{ και } g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

$$f(x) = \frac{1}{3x-5} \text{ και } g(x) = \frac{x+1}{x-6}$$

$$f(x) = 2|x-1| \text{ και } g(x) = \begin{cases} 2-4x^2, & x \leq 2 \\ 1+x^2, & x > -2 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2} \text{ και } g(x) = \sqrt{x-1}$$

$$f(x) = \sqrt{(2-x)^2} \text{ και } g(x) = 3x-5, x \geq 4$$

$$f(x) = e^{x+1} \text{ και } g(x) = \ln(x+1)$$

$$f(x) = \eta\mu x \text{ και } g(x) = \sqrt{1-x^2}$$

22. Αν  $f(x) = 2x-1, x \geq 0$  και  $g(x) = 1-5x, x \in (-2, 3]$ , να ορίσετε τις συναρτήσεις :

i)  $(f \circ g) \circ f$     ii)  $f^2 \circ g$

23. Αν  $f(x) = 3x+2$  και  $g(x) = x-1, x \in (0, 2]$ , να ορίσετε τις συναρτήσεις :

$$\frac{3}{f} \circ \frac{f}{f+g}, \quad (f+g) \circ (f-g)$$

24. Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε για τις συναρτήσεις  $f(x) = \alpha x + \beta$  και  $g(x) = \alpha^2 x - \beta$  να ισχύει  $f \circ g = g \circ f$ .

25. Αν  $f(x) = \alpha x + \beta$ , να βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε να ισχύει  $(f \circ f)(x) + f(2-x) - f(x-1) = 0$

26. Να βρεθεί η συνθήκη μεταξύ των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε για τις συναρτήσεις  $f(x) = 2x - 5$  και  $g(x) = \alpha x + \beta$  να ισχύει  $f \circ g = g \circ f$ .

27. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \alpha x + \beta$  και  $g(x) = \gamma x + \delta$ . Να βρείτε τη συνθήκη που ικανοποιούν τα  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$  ώστε να ισχύει  $f \circ g = g \circ f$ .

28. Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε να ισχύει: i)  $(f \circ g)(x) = 3x + 2$  με  $f(x) = \alpha x + \beta$ ,  $g(x) = 2x - 1$  ii)  $(g \circ f)(x) = x$  με  $f(x) = \alpha x - 2$ ,  $g(x) = x + \beta$

29. Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε να ισχύει :i)  $(f \circ f)(x) = x^4 - 2x^2$  με  $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ ,  $g(x) = x + \beta$  ii)  $(g \circ f)(x) = 12x^3 - 6x + 2$  με  $f(x) = \alpha x^3 + \beta x$ ,  $g(x) = 3\alpha x - 2\beta$

30. Για τις συναρτήσεις  $f(x) = \alpha x + \beta$ ,  $g(x) = \gamma x$ ,  $h(x) = \delta x + \epsilon$ ,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \in \mathbb{R}$  να δείξετε ότι  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

31. Να βρεθεί η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  αν ισχύει :

$$\begin{aligned} g(x) = 5x - 2 \text{ και } (f \circ g)(x) = x^2 - 5x + 6 & \quad g(x) = x - 3 \text{ και } (f \circ g)(x) = x^2 - 7x + 3 \\ g(x) = 4x - 1 \text{ και } (f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 3 & \quad g(x) = x + 1 \text{ και } (g \circ f)(x) = 3x^2 - 5x + 2 \end{aligned}$$

32. Αν  $f$  συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $[5, +\infty)$ , να ορίσετε την συνάρτηση  $g(x) = f(x^2 - 4)$ .

33. Αν  $f$  συνάρτηση με  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $g(x) = f(\eta \mu x)$ .

34. Αν για τη συνάρτηση  $f$  ισχύει  $f(x-1) = -4x^3 + 12x^2 + 3x - 11$  και για τη συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει  $g = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ φορές}}$ , να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $g$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

35. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας μονοτονιών:

		fog	gof	fof	f+g	f-g	f.g	f/g
f↗	g↗							
f↗	g↘							
f↘	g↗							
f↘	g↘							

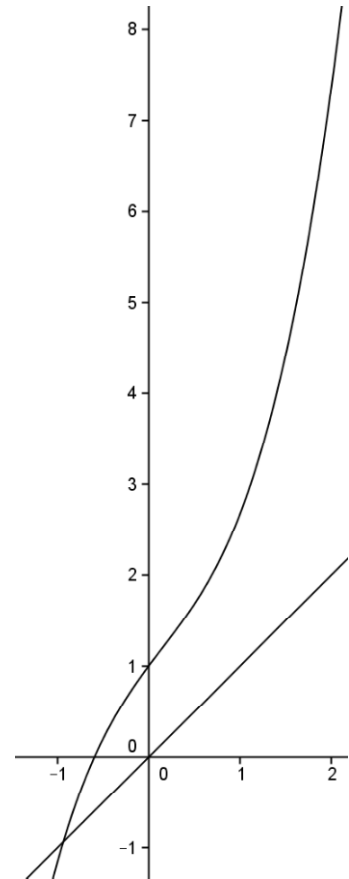
36. Να βρείτε τις αντίστροφες των παρακάτω συναρτήσεων, αν υπάρχουν:

$$f(x) = 3 - \sqrt{x-2} \quad f(x) = x^2 - 1 \quad f(x) = \frac{2x+3}{x+4}, \quad x \in (-1, 1)$$

$$f(x) = \ln \frac{e^x}{e^{x+1}} \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}, \quad x \in [3, +\infty) \quad f(x) = |x|$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & x \leq 0 \\ -x + 2, & x > 0 \end{cases}$$



37. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της αντίστροφης μιας συνάρτησης  $f$ . Να βρείτε:

$$f^{-1}(0), \quad f(A), \quad f^{-1}(A), \quad f(2), \quad f(1), \quad (f^{-1} \circ f)(\sqrt{2})$$

38. Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$  να ισχύει  $x^3 f(x) + y^3 f(y) > y^3 f(x) + x^3 f(y)$ . Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

39. Να δείξετε ότι κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα.

40. Δίνονται συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , τέτοιες ώστε  $g(x) = f^2(x) - 2xf(x) + x^2 + 7$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Αν η ευθεία  $y = x$  τέμνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  σε ένα τουλάχιστον σημείο, να δείξετε ότι η  $g$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

41. Αν η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης διέρχεται από τα σημεία  $A(1,4)$  και  $B(2,3)$ , τότε: α) να λύσετε την εξίσωση  $f(1 + f^{-1}(x^3 + 1)) = 3$   
β) να λύσετε την ανίσωση  $f(1 + f^{-1}(x^3 + 3)) < 3$ .

42. Έστω οι συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , τέτοιες ώστε για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  να ισχύει  $(f \circ f)(x) = \kappa f(x) + \lambda g(x^3 + x + 2015)$ ,  $\kappa, \lambda \neq 0$ . Αν η  $g$  είναι 1-1, τότε να δείξετε ότι και η  $f$  είναι 1-1.

43. Αν η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $f\left(\frac{3x+2f(x)}{5}\right) = x$ , να δείξετε ότι  $f(x) = x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

44. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$ .

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

ii) Να βρείτε την αντίστροφη της.

iii) Να λύσετε την εξίσωση  $x^2 - 2x + 2 = 1 + \sqrt{x-1}$ .

45. Δείξτε ότι η συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει  $f(f(x)) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , δεν είναι αντιστρέψιμη.

46. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = 3^x + 5x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  είναι γνησίως αύξουσα.

i) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 1$ .

ii) Να λύσετε την ανίσωση  $3^{2-x} + 5(2-x) < 19$ .

iii) Να λύσετε την ανίσωση  $3^{x^2-1} - 3^{x+5} > -5x^2 + 5x + 30$ .

47. Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  γνησίως φθίνουσα συνάρτηση τέτοια ώστε  $f(x) = f^{-1}(x)$ . Να δείξετε ότι  $f(x) = x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

48. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 1 + \ln(\sqrt{x-1} + 1)$

i) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης.

ii) Να λύσετε την ανίσωση  $f^{-1}(x+1) = 3$ .

49. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $(f \circ f)(x) = 2015x + f(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη ii) Να βρείτε την τιμή  $f(0)$ .

iii) Αν το σημείο  $(1,2)$  ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης, να λυθεί η εξίσωση  $f^{-1}(\log x + 10) = 2$ .

50. Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $[f(x)]^3 + f(x) + x = 0$ . Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης  $f$ .

51. Έστω συνάρτηση για την οποία ισχύει  $f(f(x)) = 20x + 15$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι

i) Η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη.

ii)  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .

iii)  $f^{-1}(x) = \frac{f(x)-15}{20}$ .

iv)  $f(20x + 15) = 20f(x) + 15$

52. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x^2 + x + 1}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Να βρεθούν οι τιμές των  $\alpha, \beta$  ώστε η συνάρτηση να έχει σύνολο τιμών το διάστημα  $[-2, 2]$ .