

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΓΕΝΙΚΗΣ ΟΕΦΕ 2013

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι $f'(x) = (x^2)' = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(7 μονάδες)

A.2. Να ορίσετε το σταθμισμένο αριθμητικό μέσο ή σταθμικό μέσο για τις τιμές x_1, x_2, \dots, x_n ενός συνόλου δεδομένων που έχουν διαφορετική βαρύτητα και η οποία εκφράζεται με τους λεγόμενους συντελεστές Βαρύτητας w_1, w_2, \dots, w_n .

(4 μονάδες)

A.3. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται συνεχής.

(4 μονάδες)

A.4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη σωστό αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη..

α) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο A και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$ τότε ισχύει ότι:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} \text{ για κάθε } x \in A.$$

β) Ο συντελεστής μεταβλητότητας CV παριστάνει ένα μέτρο απόλυτης διασποράς και όχι ένα μέτρο σχετικής διασποράς.

γ) Η διάμεσος δ ενός δείγματος n παρατηρήσεων είναι πάντα μία από τις παρατηρήσεις

δ) Το ενδεχόμενο «διαφορά του B από το A » πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B .

ε) Δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα.

(2x5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2ο

Ο χρόνος αναμονής σε \min των μαθητών ενός σχολείου στη στάση του λεωφορείου έχει ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους. Το εύρος είναι $R = 20 \min$, η κεντρική τιμή της τρίτης κλάσης είναι $10 \min$. 3 μαθητές περιμένουν λιγότερο από $4 \min$, 20 μαθητές λιγότερο από $12 \min$, το 84% περιμένουν λιγότερο από $16 \min$, $N_5 = 50$ και $F_2 = 0,2$.

B.1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος c της κάθε κλάσης είναι 4 και να μεταφέρετε στο τετράδιό σας σωστά συμπληρωμένο τον παρακάτω πίνακα.

Χρόνος min	x_i	v_i	N_i	f_i	F_i	$F_i \%$
Σύνολο						

(8 μονάδες)

B.2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διασπορά και τη διάμεσο του χρόνου αναμονής των μαθητών του δείγματος.

(7 μονάδες)

B.3. Θεωρούμε ότι όλοι οι χρόνοι των μαθητών είναι ομοιόμορφα κατανομημένοι σε κάθε μία από τις παραπάνω κλάσεις. Επιλέγουμε έναν μαθητή στην τύχη και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A: « ο χρόνος αναμονής του μαθητή είναι μικρότερος από 10 min »

B: « ο χρόνος αναμονής του μαθητή είναι τουλάχιστον 8 min και λιγότερος από 17 min »

α) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$. (5 μονάδες)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A \cup B)$, $P(A - B)$ και $P((A \cup B) - A)$. (5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3ο

Θεωρούμε μία μεταβλητή X η οποία μετράει σε mm Hg την συστολική πίεση ενός δείγματος A , n ατόμων μιας πόλης και η οποία ακολουθεί περίπου την κανονική κατανομή. Δίνεται ότι η διάμεσος δ της κατανομής είναι

$\delta = 13 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5x - 5}{2\sqrt{x + 3} - 4} \right)$ σε mm Hg και ότι το 84% του δείγματος έχει συστολική πίεση μεγαλύτερη από 125 mm Hg.

Γ.1. Να βρείτε την μέση τιμή \bar{x}_A , την τυπική απόκλιση S_A του δείγματος A και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. (8 μονάδες)

Γ.2. Έστω ότι για το δείγμα A ισχύει $\bar{x}_A = 130$ mm hg και $S_A = 5$ mm Hg. Ένα δεύτερο δείγμα B επίσης n ατόμων παρουσιάζει συστολική πίεση $y_i = x_i + 10$ mm Hg, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ όπου x_i η συστολική πίεση των ατόμων του δείγματος A .

α) Να βρείτε την μέση τιμή \bar{y}_B , την τυπική απόκλιση S_B και να συγκρίνετε ως προς την ομοιογένεια τα δύο δείγματα. (7 μονάδες)

β) Αν επιπλέον το πλήθος των ατόμων του δείγματος A , των οποίων η συστολική πίεση παίρνει τιμές στο διάστημα $(\bar{x}_A + S_A, \bar{x}_A + 2S_A)$ είναι 540.

i) Να βρείτε το μέγεθος n του δείγματος A . (5 μονάδες)

ii) Να βρείτε πόσα συνολικά άτομα και από τα δύο δείγματα έχουν συστολική πίεση κάτω από 135 mm hg. (5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{ax^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$, με $a > 0$, και η εφαπτομένη (ϵ): $y = -\frac{1}{2}x + \beta$ στο σημείο $A(1, f(1))$

της γραφικής της παράστασης.

Δ.1. α) Να δείξετε ότι $a = \beta = 1$. (5 μονάδες)

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. (5 μονάδες)

Δ.2. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A, B, Γ ενός δειγματικού χώρου Ω , που οι πιθανότητες των ενδεχομένων του δίνονται από τις τεταγμένες y των σημείων (x, y) της εφαπτομένης (ϵ).

α) Για τις τεταγμένες x των παραπάνω σημείων (x, y) , να αποδείξετε ότι $0 \leq x \leq 2$. (2 μονάδες)

β) Έστω τα σημεία $K(\frac{2}{5}, y_1)$, $M(\frac{4}{5}, y_2)$, $N(\frac{7}{5}, y_3)$ της εφαπτομένης (ε). Αν οι πιθανότητες των ενδεχομένων $(A \cap B)$, $A \cup B$ και A είναι διαφορετικές ανά δύο και στοιχεία του συνόλου $\{y_1, y_2, y_3\}$

τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$. (5 μονάδες)

ii. Να αποδείξετε ότι: $f(P(A \cap B')) > f(P(A - B'))$. (4 μονάδες)

iii. Αν $P(\Gamma) = \frac{3}{10}$, να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{5} \leq P(B - \Gamma) \leq \frac{1}{2}$. (4 μονάδες)