ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΗΣΗΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 28 ΜΑΡΤΙΟΥ 2018
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 76

Α2. α. Ψ

β. Σχολικό βιβλίο σελ. 156 ΣΧΟΛΙΟ): Η $f(x)=x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ αφού η $f'(x)=4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Εντούτοις, η $f''(x)=12x^2$ δεν είναι θετική στο $\mathbb{R}$ αφού $f''(0)=0$

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 142 Γεωμετρική ερμηνεία του θ. Fermat: Στο σημείο $(x_o, f(x_o))$ η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

Α4. α. Σωστό (Κριτήριο παρεμβολής, σελ 51)

β. Λάθος (ΣΧΟΛΙΟ σελ 165: Οι κανόνες de L'Hospital ισχύουν και για πλευρικά όρια)

γ. Λάθος (ΣΧΟΛΙΟ σελ 156: αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.)

δ. Λάθος (ΣΧΟΛΙΑ σελ 163)

ε. Σωστό (σελ 157)

ΘΕΜΑ Β

Β1. **$1^{ος}$ τρόπος :** Λύσεις σχολικού βιβλίου σελ. 13

$2^{ος}$ τρόπος : (Χωρίς ομοιότητα) Από ορισμό εφαπτομένης οξείας γωνίας $\quad εφ N\hat{A}M = \frac{NM}{AM} = \frac{EB}{AB} \Leftrightarrow \frac{NM}{x} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow NM = 2x$ κλπ.

Β2. Με πλευρικά όρια έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1} == \lim_{x\to 1^-}(x+1) = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{2x-1}{x-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

Άρα f είναι παραγωγίσιμη στο 1

Β3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)ημ\left(\frac{1}{x}\right)+συνx-1+x}{f(x)+ημx} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2ημ\left(\frac{1}{x}\right)+συνx-1+x}{x^2+ημx}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{xημ\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{συνx-1}{x}+1}{x+\frac{ημx}{x}} = \frac{0+0+1}{0+1} = 1$$

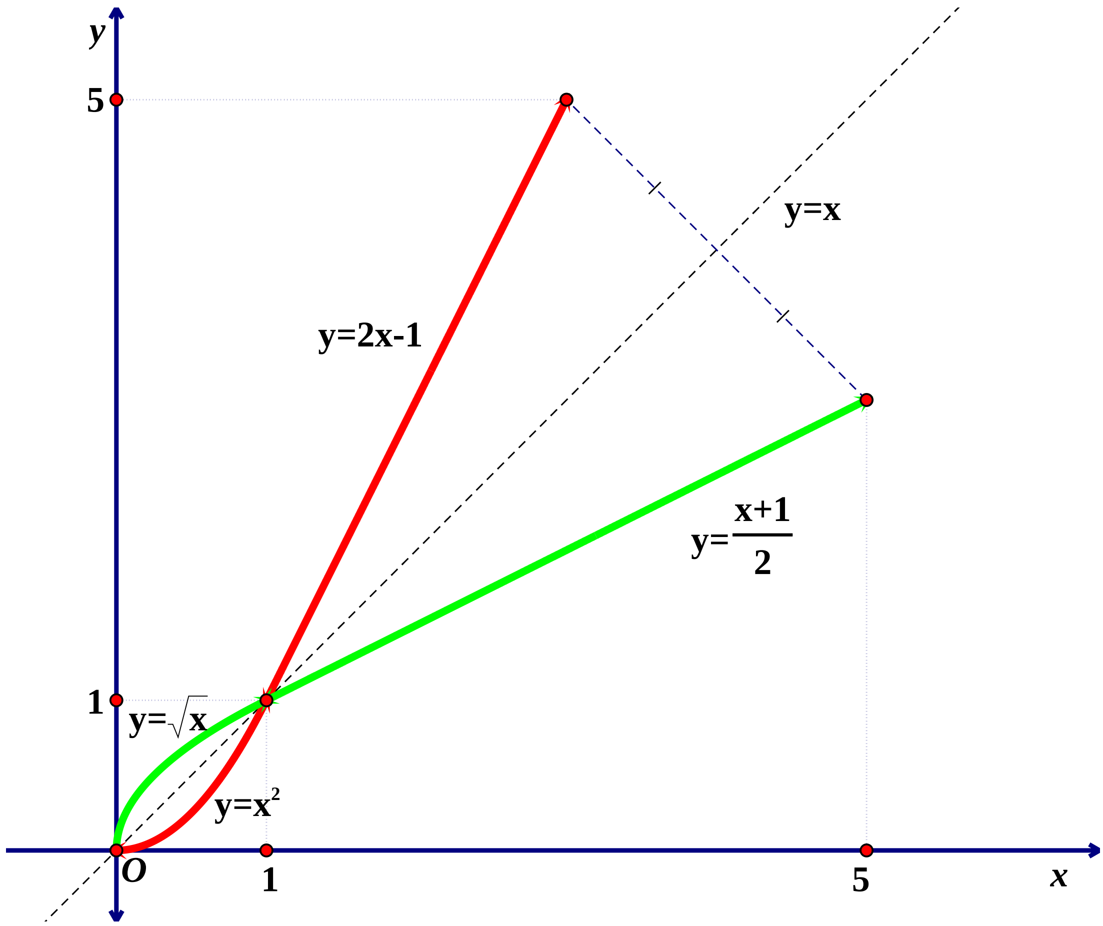
Β4. Η f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα απ' τα διαστήματα (0, 1], (1, 3] και συνεχής στο 1 (αφού f παραγωγίσιμη στο 1 από Β2), άρα τελικά f $\uparrow$ (0, 3] επομένως f 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Αν $x\in(0,1]$ τότε $y=x^2 \Leftrightarrow x=\sqrt{y}$ με $0<\sqrt{y}\le 1 \Leftrightarrow 0<y\le 1$

Αν $x\in(1,3]$ τότε $y=2x-1 \Leftrightarrow x=\frac{y+1}{2}$ με $1<\frac{y+1}{2}\le 3 \Leftrightarrow 1<y\le 5$

Άρα $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0<x\le 1\\ \dfrac{x+1}{2}, & 1<x\le 5\end{cases}$

Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η εξίσωση ε της εφαπτομένης της C_f στο τυχαίο σημείο της $(x_o, f(x_o))$ είναι ε: $y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o) \Leftrightarrow y - \sqrt{x_o} = \frac{1}{2\sqrt{x_o}}(x - x_o)$

$$\overset{A\in\varepsilon}{\Rightarrow} \frac{3}{2} - \sqrt{x_o} = \frac{1}{2\sqrt{x_o}}(2 - x_o)$$

Έστω $h(x) = \frac{3}{2} - \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(2 - x)$, $x>0$

Επειδή $h(1)=0=h(4)$ υπάρχουν δύο τουλάχιστον εφαπτομένες ε_1, ε_2 που άγονται από το σημείο Α στην C_f με εξισώσεις:

ε_1: $y - \sqrt{1} = \frac{1}{2\sqrt{1}}(x - 1) \Leftrightarrow$ **ε_1:** $\mathbf{y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$

και

ε_2: $y - \sqrt{4} = \frac{1}{2\sqrt{4}}(x - 4) \Leftrightarrow$ **ε_2:** $\mathbf{y = \frac{1}{4}x + 1}$

Θα δείξω ότι δεν υπάρχουν άλλες εφαπτομένες που άγονται από το Α

1ος τρόπος : Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = \frac{2 - x}{4x\sqrt{x}}$, $x>0$

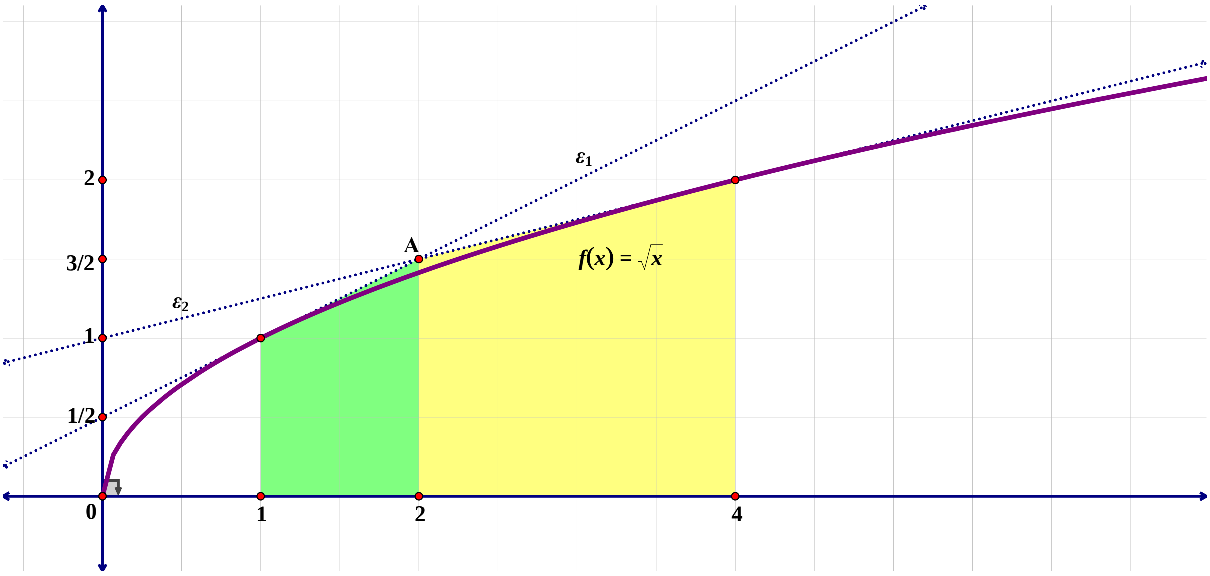
Επομένως h ↑ (0, 2] και h ↓ [2, +∞), άρα οι ρίζες $x=1\in(0, 2]$ και $x=4\in[2, +\infty)$ της h είναι μοναδικές αφού η h είναι γνησίως μονότονη σε κάθε ένα από τα διαστήματα που ανήκουν αυτές.

2ος τρόπος : Έστω ότι η h έχει 3 τουλάχιστον ρίζες $x_1 < x_2 < x_3$ τότε απ' το θεώρημα Rolle στα διαστήματα $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ υπάρχουν $\xi_1\in(x_1, x_2)$, $\xi_2\in(x_2, x_3)$ τέτοια ώστε $h'(\xi_1)=h'(\xi_2)=0$ δηλ. η εξίσωση $h'(x)=0$ έχει 2 τουλάχιστον ρίζες, άτοπο γιατί η $h'(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=2$

3^{ος} τρόπος :

$$h(x)=0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x}-2x-(2-x)=0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x}-x-2=0 \overset{\sqrt{x}=\omega}{\Leftrightarrow} 3\omega-\omega^2-2=0$$
$$\Leftrightarrow \omega^2-3\omega+2=0 \Leftrightarrow (\omega=1 \quad ή \quad \omega=2) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}=1 \quad ή \quad \sqrt{x}=2\right) \Leftrightarrow (x=1 \quad ή \quad x=4)$$

Γ2. Γραφικά έχουμε



Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

1^{ος} τρόπος : $E=\dfrac{\frac{3}{2}+1}{2}\cdot 1+\dfrac{2+\frac{3}{2}}{2}\cdot 2-\int_1^4\sqrt{x}dx=\ldots=\dfrac{1}{12}$

2^{ος} τρόπος : $E=\int_1^2\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}-\sqrt{x}\right)dx+\int_2^4\left(\dfrac{1}{4}x+1-\sqrt{x}\right)dx=\ldots=\dfrac{1}{12}$

Γ3.

Η gof ορίζεται αφού

$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in[0,+\infty) \mid \sqrt{x}\in(0,+\infty)\}=(0,+\infty)\neq\varnothing$ και

έχει τύπο $(gof)(x)=g(f(x))=\ln\sqrt{x}$, $x>0$

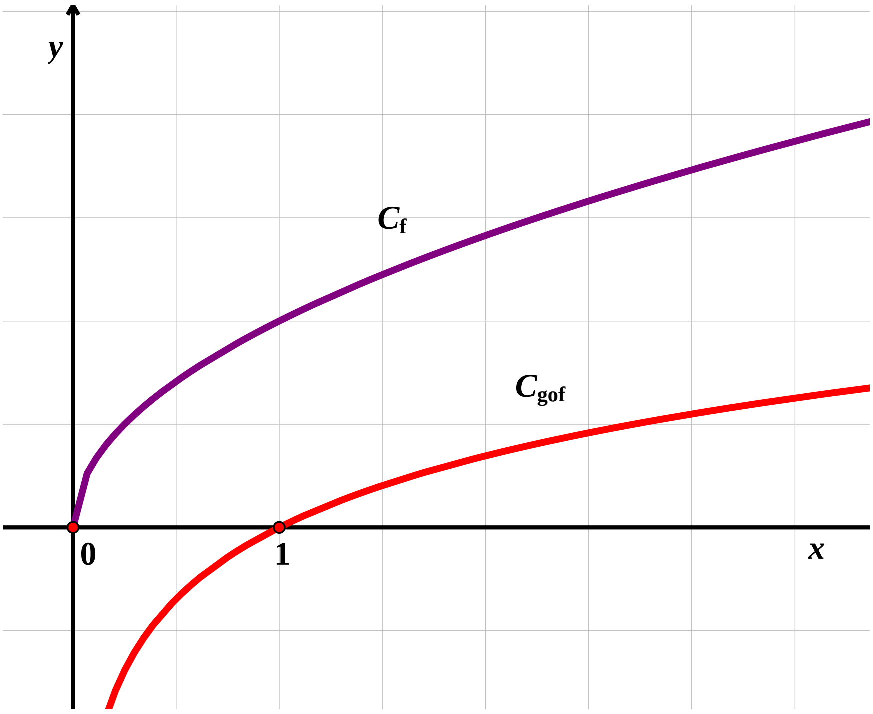
1^{ος} τρόπος : Για κάθε $x>0$ ισχύει $\ln x\leq x-1$ και επειδή $\sqrt{x}>0$ έχουμε $\ln\sqrt{x}\leq\sqrt{x}-1$ δηλ. $g(f(x))\leq f(x)-1 \Leftrightarrow f(x)\geq g(f(x))+1$ που σημαίνει ότι η C_f είναι πάνω από την C_{gof} στο $(0,+\infty)$

$2^{ος}$ τρόπος : Έστω $\varphi(x)=\sqrt{x}-\ln\sqrt{x}$, x>0

$$\phi'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{x-\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}},$$

Παρατηρούμε ότι φ ↓ (0, 1], φ↑ [1, +∞) και το σημείο (1, φ(1)=1) ολικό ελάχιστο, άρα $\varphi(x)\geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x}-\ln\sqrt{x}\geq 1 \Leftrightarrow f(x)\geq g(f(x))+1$ που σημαίνει ότι η C_f είναι πάνω από την C_{gof} στο (0, +∞)

$3^{ος}$ τρόπος : Σχεδιάζοντας τις C_f και C_{gof} (μελετώντας μόνο την συνάρτηση $y=\ln\sqrt{x}$)



Γ4 .

$$y(t)=\ln\sqrt{x(t)}\Rightarrow y'(t)=\frac{1}{\sqrt{x(t)}}\cdot\left(\sqrt{x(t)}\right)'=\frac{1}{\sqrt{x(t)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x(t)}}\cdot x'(t)=\frac{x'(t)}{2x(t)}\Rightarrow$$

$$y'(t_o)=\frac{x'(t_o)}{2x(t_o)}\quad(1)$$

Από υπόθεση $x'(t_o)=2y'(t_o)\overset{(1)}{\Rightarrow}\frac{x'(t_o)}{2}=\frac{x'(t_o)}{2x(t_o)}\overset{x'(t)>0}{\Leftrightarrow}1=\frac{1}{x(t_o)}\Leftrightarrow x(t_o)=1$

και $y(t_o)=\ln\sqrt{x(t_o)}\Rightarrow y(t_o)=\ln\sqrt{1}=0$ άρα **M(1, 0)**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Αν $x\in[-\pi, 0]$ τότε $f'(x)=\text{συν}x=(\text{ημ}x)' \Rightarrow f(x) = \text{ημ}x + c_1,\qquad c_1\in\mathbb{R}$

Αν $x\in[0, +\infty)$ τότε η τετμημένη x_B του σημείου Β ικανοποιεί την σχέση $1=\frac{x_B\cdot 1}{2}\Leftrightarrow x_B=2$ και η εξίσωση της ημιευθείας Az είναι

$\frac{x}{2}+\frac{y}{1}=1\Leftrightarrow y=-\frac{x}{2}+1$

Επομένως $f'(x)=-\frac{x}{2}+1=\left(-\frac{x^2}{4}+x\right)'\Rightarrow f(x)=-\frac{x^2}{4}+x+c_2,\qquad c_2\in\mathbb{R}$

Ώστε $f(x)=\begin{cases}\text{ημ}x+c_1, & -\pi\le x<0\\ \frac{-x^2}{4}+x+c_2, & x>0\end{cases}$ και από την συνέχεια της f στο 0

(f παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο 0) έπεται ότι $c_1=c_2$ και επειδή

$f(0)=0 \Rightarrow c_1=c_2=0$, άρα τελικά $\mathbf{f(x)}=\begin{cases}\mathbf{ημx}, & \boldsymbol{-\pi\le x\le 0}\\ \mathbf{x-\frac{x^2}{4}}, & \mathbf{x>0}\end{cases}$

Δ2. Από το ΘΜΤ για την f στο [α, β] υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha, \beta)$: $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\overset{\text{σχήμα}}{\le} 1\Leftrightarrow f(\beta)-f(\alpha)\le\beta-\alpha$

Σχόλιο : Το Δ2 αντιμετωπίζεται και αλγεβρικά αλλά θα πρέπει να διακρίνουμε τρεις ξεχωριστές περιπτώσεις για τα α, β και έτσι δεν ενδείκνυται αυτός ο τρόπος.

Δ3.

Για κάθε $x\in\left[\frac{-\pi}{8}, \frac{-\pi}{9}\right]$ ισχύει

$0 > \text{ημ}x > x \Leftrightarrow 0 > f(x) > x \overset{f(x),x\ \text{ομόσημοι}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{f(x)}<\frac{1}{x}\Leftrightarrow\frac{1}{x}-\frac{1}{f(x)}>0$ και από την μονοτονία του ολοκληρώματος παίρνουμε

$$\int_{-\pi/8}^{-\pi/9}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{f(x)}\right)dx>0 \Leftrightarrow \left[\ln|x|\right]_{-\pi/8}^{-\pi/9}-\int_{-\pi/8}^{-\pi/9}\frac{1}{f(x)}dx>0 \Leftrightarrow \ln\frac{8}{9}>\int_{-\pi/8}^{-\pi/9}\frac{1}{f(x)}dx$$

Σχόλιο : Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται, πχ.

$$\int_{-\pi/8}^{-\pi/9}\frac{1}{f(x)}dx=\int_{-\pi/8}^{-\pi/9}\frac{1}{\eta\mu x}dx=\int_{-\pi/8}^{-\pi/9}\frac{\eta\mu^2\frac{x}{2}+\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}}{2\eta\mu\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}}dx=\int_{-\pi/8}^{-\pi/9}\frac{\eta\mu\frac{x}{2}}{2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}}dx+\int_{-\pi/8}^{-\pi/9}\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}}{2\eta\mu\frac{x}{2}}dx=$$

$$=-\int_{-\pi/8}^{-\pi/9}\frac{\left(2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\right)'}{2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}}dx+\int_{-\pi/8}^{-\pi/9}\frac{\left(2\eta\mu\frac{x}{2}\right)'}{2\eta\mu\frac{x}{2}}dx=\left[-\ln\left|\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\right|+\ln\left|\eta\mu\frac{x}{2}\right|\right]_{-\pi/8}^{-\pi/9}$$

αλλά θα πρέπει επιπλέον να αποδείξουμε την ανίσωση $\ln\left(\varepsilon\varphi\frac{\pi}{18}\cdot\sigma\varphi\frac{\pi}{16}\right)<\ln\frac{8}{9}$, πχ. δείχνοντας ότι η συνάρτηση $y=x\varepsilon\varphi\frac{\pi}{2x}$ είναι ↕ στο [8, 9] και έτσι δεν ενδείκνυται αυτός ο τρόπος.

Δ4.

1ος τρόπος : Για κάθε $x\in(-\pi,0)$ ισχύει

$$2018^{f^2(x)-1}=2018^{\eta\mu^2x-1}=2018^{-\sigma\upsilon\nu^2x}=\frac{1}{2018^{\sigma\upsilon\nu^2x}}\overset{\sigma\upsilon\nu^2x\geq 0}{\leq}\frac{1}{2018^0}=1 \qquad (1)$$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=-\frac{\pi}{2}$

Επίσης, $f(2)+\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2=2-\frac{2^2}{4}+\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2=1+\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2\geq 1 \qquad (2)$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=-\frac{\pi}{2}$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $f(2)+\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2\geq 1\geq 2018^{f^2(x)-1}$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=-\frac{\pi}{2}$ άρα η δοθείσα εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=-\frac{\pi}{2}$

2^{ος} τρόπος : Έστω $\phi(x) = 2018^{-συν^2 x} - 1 - \left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2$, $x \in (-\pi, 0)$

$\phi'(x) = 2018^{-συν^2 x} \cdot \ln 2018 \cdot (2ημx \cdot συνx) - 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Παρατηρούμε ότι:

1^{ον}) $\phi'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 = \phi\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

2^{ον}) $\phi \uparrow \left(-\pi,\ -\frac{\pi}{2}\right]$ διότι για κάθε $x \in \left(-\pi,\ -\frac{\pi}{2}\right)$ είναι

$x < -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{2} < 0$ και $-\pi < x < -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow ημx < 0$ και $συνx < 0$ άρα $\phi'(x) > 0$

3^{ον}) $\phi \downarrow \left[-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$ διότι για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$ είναι

$x > -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{2} > 0$ και $-\frac{\pi}{2} < x < 0 \Leftrightarrow ημx < 0$ και $συνx > 0$ άρα $\phi'(x) < 0$

άρα η ϕ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(-\pi, 0)$ την $x = -\frac{\pi}{2}$

Σχόλιο : Η επίλυση της εξίσωσης $\phi'(x) = 0$ δεν είναι δυνατή, γι' αυτό βρήκαμε το πρόσημο της ϕ' συνθετικά και αυτή ακριβώς είναι η δυσκολία αυτού του τρόπου.

<u>Τελικό σχόλιο:</u> Όλα τα θέματα είναι ιδιοκατασκευές που στηρίζονται αποκλειστικά στο σχολικό βιβλίο και στα περσινά θέματα εξετάσεων του 2017. Με το ελάχιστο πλήθος ερωτημάτων πιστεύω ότι κάλυψα το μεγαλύτερο μέρος της ύλης.

Επιστημονική επιμέλεια: Ηρακλείδης Χρήστος