ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ (1)

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 23 ΜΑΡΤΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Μονάδες 4

Α2. i. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

Να αποδείξετε ότι:

«Αν η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ»**.**

Μονάδες 6

ii. Ισχύει το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος; **(Μονάδες 1)**

Αν ναι να το αποδείξετε, αν όχι να δώσετε κατάλληλο αντί-παράδειγμα.

(Μονάδες 3)

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)|=+\infty$.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ΄ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε η f είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.

γ) Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0)=0$.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=0$, τότε κατ΄ανάγκη θα είναι $f(x)=0$ για κάθε x στο [α,β].

ε) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] τότε ισχύει: «Το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$» **(Μονάδες 5x2= 10)**.

Για τις προτάσεις που χαρακτηρίσατε ως **Λάθος,** να βρείτε κατάλληλο παράδειγμα που να επιβεβαιώνει τον ισχυρισμό σας **(Μονάδες 1).**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $0<f(x)<1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση:

$$g(x)=\frac{f(x)}{f^2(x)+1}$$

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f .

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f o g$ είναι γνησίως αύξουσα και «1-1».

Μονάδες 5

Β3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f\left(g\left(x^3+1\right)\right)=f\left(g\left(4x^2+2x\right)\right)$$

έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες και μια αρνητική ρίζα.

Μονάδες 8

Β4. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\left(f o g\right)\left(x^3+4\right)>\left(f o g\right)\left(3x^2\right)$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1» και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} **(Μονάδες 4)**. Επιβεβαιώστε γραφικά ότι η συνάρτηση f είναι «1-1», δίνοντας και μία γεωμετρική ερμηνεία για αυτό. (**Μονάδες 2)**.

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$$

Μονάδες 9

Γ3. Ένα κινητό (θεωρήστε το ως σημείο) Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3,\ x \geq 0$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$ ως συναρτήσεις του χρόνου t. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

(Μονάδες 3)

Να δώσετε μία περιγραφή, με φυσική ερμηνεία, του παραπάνω προβλήματος.

(**Μονάδες 1)**

Γ4. Αν $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f'(x) = x\eta\mu x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{και} \quad f(0) = 0$$

Δ1. i. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$$

Μονάδες 3

ii. Να αποδείξετε ότι:

$$\eta\mu x>x\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$$

Μονάδες 2

Έστω επίσης η συνάρτηση:

$$g(x)=\left|x\varepsilon\varphi x-x^2\right|,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$$

Δ2. Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 4

Δ3. i. Αν $\alpha>0$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $g(x)=\alpha$ είναι μηδέν.

Μονάδες 4

ii. Έστω $x_1,\ x_2,\ x_3$ οι θετικές ρίζες των εξισώσεων:

$$g(x)=1,\ g(x)=2,\ g(x)=3$$

αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\ \xi_2\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ με $\xi_1<\xi_2$ τέτοια, ώστε:

$$(x_2-x_1)g'(\xi_1)+(x_3-x_2)g'(\xi_2)=2$$

Μονάδες 4

Δ4. i. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left[\eta\mu x-f(x)\right]-\ln x+x^2}{\eta\mu^2 x-x\sigma\upsilon\nu x+x}$$

Μονάδες 3

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, $-f'$ και την ευθεία $x=\frac{\pi}{2}$.

Μονάδες 5

Ο Δ Η Γ Ι Ε Σ (για τους εξεταζόμενους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 1 ώρα μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Επιστημονική επιμέλεια:

Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών