

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ (1)

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 23 ΜΑΡΤΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μονάδες 4

A2. i. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

Να αποδείξετε ότι:

«Αν η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ ».

Μονάδες 6

ii. Ισχύει το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος; (**Μονάδες 1**)

Αν ναι να το αποδείξετε, αν όχι να δώσετε κατάλληλο αντί-παράδειγμα.

(Μονάδες 3)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$.

β) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, είναι και παραγωγίσιμη στο x_0 .

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

γ) Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε κατ'ανάγκη θα είναι $f(x) = 0$ για κάθε x στο $[\alpha, \beta]$.

ε) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε ισχύει: «Το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$ » (Μονάδες $5 \times 2 = 10$).

Για τις προτάσεις που χαρακτηρίσατε ως **Λάθος**, να βρείτε κατάλληλο παράδειγμα που να επιβεβαιώνει τον ισχυρισμό σας (Μονάδες 1).

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{f(x)}{f^2(x)+1}$$

B1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f .

Μονάδες 6

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα και «1-1».

Μονάδες 5

B3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f\left(g\left(x^3+1\right)\right) = f\left(g\left(4x^2+2x\right)\right)$$

έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες και μια αρνητική ρίζα.

Μονάδες 8

B4. Να λύσετε την ανίσωση:

$$(f \circ g)(x^3+4) > (f \circ g)(3x^2)$$

Μονάδες 6

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1» και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} (**Μονάδες 4**). Επιβεβαιώστε γραφικά ότι η συνάρτηση f είναι «1-1», δίνοντας και μία γεωμετρική ερμηνεία για αυτό. (**Μονάδες 2**).

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$$

Μονάδες 9

Γ3. Ένα κινητό (θεωρήστε το ως σημείο) M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$, $x \geq 0$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$ ως συναρτήσεις του χρόνου t . Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του M είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

(Μονάδες 3)

Να δώσετε μία περιγραφή, με φυσική ερμηνεία, του παραπάνω προβλήματος.

(Μονάδες 1)

Γ4. Αν $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f'(x) = x\eta\mu x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ και } f(0) = 0$$

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Δ1. i. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Μονάδες 3

ii. Να αποδείξετε ότι:

$$\eta\mu x > x\sigma\upsilon\nu x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Μονάδες 2

Έστω επίσης η συνάρτηση:

$$g(x) = |x\epsilon\phi x - x^2|, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Δ2. Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 4

Δ3. i. Αν $\alpha > 0$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $g(x) = \alpha$ είναι μηδέν.

Μονάδες 4

ii. Έστω x_1, x_2, x_3 οι θετικές ρίζες των εξισώσεων:

$$g(x) = 1, g(x) = 2, g(x) = 3$$

αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοια, ώστε:

$$(x_2 - x_1)g'(\xi_1) + (x_3 - x_2)g'(\xi_2) = 2$$

Μονάδες 4

Δ4. i. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln[\eta\mu x - f(x)] - \ln x + x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x}$$

Μονάδες 3

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f, -f'$ και την ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$.

Μονάδες 5

Ο Δ Η Γ Ι Ε Σ (για τους εξεταζόμενους)

- 1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις το όνομά σας.**
- 2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.**
- 3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.**
- 4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.**
- 5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.**
- 6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 1 ώρα μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.**

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Επιστημονική επιμέλεια:

Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ