Γραμμική Άλγεβρα 1

Κεφάλαιο 1
Πίνακες και απαλοιφή Gauss

1. Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα y_1, y_2, y_3 ώστε τα διανύσματα $(0, y_1), (1, y_2), (2, y_3)$ να είναι στην ίδια ευθεία;

Απάντηση

Η ευθεία που περνάει από τα $(0, y_1)$ και $(1, y_2)$ είναι η $(0, y_1) + t(1, y_2 - y_1)$. Άρα το $(2, y_3)$ ανήκει σε αυτή την ευθεία αν και μόνο αν $(2, y_3) = (0, y_1) + t(1, y_2 - y_1)$ για κάποιο t. Επομένως $t = 2$ και τα y_1, y_2, y_3 ικανοποιούν την $y_3 = y_1 + 2(y_2 - y_1) = 2y_2 - y_1$.

2. Γράψτε το παρακάτω σύστημα στη μορφή $AX = B$ (όπου A είναι ο πίνακας συντελεστών του συστήματος). Στην συνέχεια εφαρμόστε απαλοιφή Gauss στον επαυξημένο $[A|B]$ για να το λύσετε.

$$\begin{aligned} x + y + z &= -2 \\ 3x + 3y - z &= 6 \\ x - y + z &= -1 \end{aligned}$$

Απάντηση

Κάνουμε απαλοιφή Gauss στον πίνακα $[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ και καταλήγουμε στον $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x, y, z) = (3/2, -1/2, -3)$.

3. Προσδιορίστε τα r, s ώστε το σύστημα

$$\begin{aligned} x + y + z &= r \\ x - y &= 0 \\ 3x + y + sz &= 0 \end{aligned}$$

α) να έχει μοναδική λύση
β) να έχει άπειρες λύσεις
γ) να μην έχει καμία λύση.
Στις περιπτώσεις που υπάρχουν λύσεις να περιγραφούν.

Απάντηση

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & r \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & s & 0 \end{bmatrix}$ ο οποίος και καταλήγει στον $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & r/2 \\ 0 & 0 & s-2 & -2r \end{bmatrix}$.

Επομένως, έχουμε μοναδική λύση αν και μόνο αν $s \neq 2$. Μάλιστα σ' αυτή την περίπτωση η λύση είναι

$$(x, y, z) = (r/2 + r/(s-2), r/2 + r/(s-2), -2r/(s-2)).$$

Αν $s = 2$ και $r \neq 0$ το σύστημα είναι αδύνατο (γιατί; βεβαιωθείτε ότι καταλαβαίνετε)

Αν $s = 2$ και $r = 0$ ο πίνακας του συστήματος καταλήγει στον $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Επομένως η z είναι ελεύθερη μεταβλητή και το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Η παραμετρική μορφή των λύσεων είναι η

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z/2 \\ -z/2 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

4. Βρείτε γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων

$$(3,-1,2),(1,-1,4),(2,0,-1)$$

ώστε
1) Η πρώτη συνιστώσα να είναι 2
2) Η πρώτη συνιστώσα να είναι 2 και η δεύτερη -2
3) Η πρώτη συνιστώσα να είναι 2 και η δεύτερη 2
4) Η τρίτη συνιστώσα να είναι 1
Είναι αυτά τα αποτελέσματα μοναδικά;

Απάντηση
1) Για παράδειγμα ένας τέτοιος γραμμικός συνδυασμός είναι ο $0\cdot(3,-1,2)+0\cdot(1,-1,4)+1\cdot(2,0,-1)$, ο οποίος δεν είναι και μοναδικός. Αν θέλω να τους βρω όλους θα πρέπει να βρω x,y,z ώστε $x\cdot(3,-1,2)+y\cdot(1,-1,4)+z\cdot(2,0,-1)=(2,..,..)$. Δηλαδή να λύσω το σύστημα

$$3x+y+2z=2.$$

Η γενική λύση του είναι $(x,y,z)=(x,2-3x-2z,z)=(0,2,0)+x(1,-3,0)+z(0,-2,1)$ όπου οι x,z είναι ελεύθερες μεταβλητές.

2) Αντίστοιχα εδώ ένας γραμμικός συνδυασμός είναι ο $0\cdot(3,-1,2)+2\cdot(1,-1,4)+0\cdot(2,0,-1)$, και για να βρούμε γενική λύση αρκεί να λύσουμε το σύστημα (γιατί;)

$$\begin{aligned} 3x+y+2z&=2\\ -x-y&=-2 \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε απαλοιφή Gauss στον επαυξυμένο πίνακα του συστήματος και καταλήγουμε στον $\begin{bmatrix}1&1&0&2\\0&1&-1&2\end{bmatrix}$
Άρα η γενική λύση του συστήματος είναι η

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-z\\2+z\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+z\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},$$

όπου z είναι ελεύθερη μεταβλητή.

Τα υπόλοιπα ερωτήματα γίνονται ανάλογα.

5. Έστω A,B,C,D τυχαίοι πραγματικοί. Δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $f(x)$ βαθμού το πολύ 3 τέτοιο ώστε $f(0)=A, f'(0)=B, f(1)=C, f'(1)=D$.

Απάντηση
Έστω $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$. Οι εξισώσεις $f(0)=A, f'(0)=B, f(1)=C, f'(1)=D$, δίνουν το εξής 4×4 σύστημα:

$$\begin{aligned} a_0&=A\\ a_1&=B\\ a_0+a_1+a_2+a_3&=C\\ a_1+2a_2+3a_3&=D \end{aligned}$$

του οποίου η λύση είναι η

$$\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\\B\\3C-3A-2B-D\\D+B+2A-2C\end{pmatrix}$$

6. Σωστό ή Λάθος (δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας)
α) Αν η 1η και η 3η στήλη του B είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την 1η και 3η στήλη του AB.
β)Αν η 1η και η 3η γραμμή του B είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την 1η και 3η γραμμή του AB.
γ)Αν η 1η και η 3η γραμμή του A είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την 1η και 3η γραμμή του AB.
δ)Αν η 1η και η 3η στήλη του A είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την 1η και 3η στήλη του AB.
ε)$(AB)^2 = A^2B^2$.
ζ)$(A+B)^2 = (A+B)(B+A) = A^2 + 2AB + B^2$.

Απάντηση. α) Σωστό. Παρατηρήστε ότι η i στήλη του γινομένου AB είναι το γινόμενο του A με την i-στήλη του B (γιατί; βεβαιωθείτε ότι καταλαβαινετε το πολλαπλασιασμό πινάκων και με τους τρεις τροπους του: ανα στοιχείο, ανα γραμμή, ανά στήλη.)
β) Λάθος. (μπορεί να μην έχει καν 1η και 3η γραμμή το γινόμενο αλλα ακόμα και να έχει δεν είναι ίδιες κατάνάγκη π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}), B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
γ)Σωστό. Η i γραμμή του γινομένου AB είναι το γινόμενο της i-γραμμής του A με τον B (γιατί;)
δ) Λάθος π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}), B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
ε)Λάθος. $(AB)^2 = ABAB$ αλλά δεν αντιμετατίθενται, π.χ.$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}), B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
ζ) Λάθος. Η πρώτη ισότητα ισχύει αλλά όχι και η δεύτερη. (το προηγούμενο παράδειγμα δουλεύει και εδώ).

7. Βρείτε παραδείγματα πραγματικών 2×2 πινάκων που να ικανοποιούν
1) $A^2 = -I_2$,
2) $B^2 = 0$ με $B \neq 0$,
3) $CD = -DC$ με $CD \neq 0$,
4) $EF = 0$ χωρίς κανένα στοιχείο των E, F να είναι 0.

Απάντηση. Αυτή η άσκηση είναι σημαντική για αυτό που περιγράφει και όχι τόσο για να βρείτε τα παραδείγματα των πινάκων. Προσέξτε λοιπόν ότι τα γινόμενα πινάκων δεν συμπεριφέρονται σαν γινόμενα αριθμών, έτσι για παράδειγμα μπορείτε να έχετε $A^n = 0$ ενώ ο πίνακας A δεν είναι 0. Παραδείγματα υπάρχουν πολλά, ενδεικτικά γράφω εδώ κάποια. Για το 1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ για το 2) πάρτε $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, για το 3) πάρτε $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ και $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, τέλος για το 4) ενα παράδειγμα δίνουν οι $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ και $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Βρείτε τις δυνάμεις $A, A^2, A^3, \ldots, A^n$ του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Απάντηση. Παρατηρούμε ότι $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Αποδεικνύουμε επαγωγικά ότι $A^n = \begin{pmatrix} 1 & nb \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για το n και το δείχνουμε για $n+1$ υπολογίζουμε δηλαδή το γινόμενο $A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & nb \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Παραγοντοποιήστε τον πίνακα του παρακάτω συστήματος A ως γινόμενο LU,όπου L είναι κάτω τριγωνικός με 1 στην διαγώνιο,ενώ U είναι άνω τριγωνικός.

$$\begin{aligned} 5x + y + 2z &= 2 \\ 2x + y + z &= 4 \\ 9x + 2y + 5z &= 3. \end{aligned}$$

Να λυθεί το σύστημα αφού λυθούν τα 2 επιμέρους συστήματα που προκύπτουν.

Απάντηση. Κάνουμε απαλοιφή Gauss και παρατηρούμε (γιατί;) ότι φτάνουμε στον άνω τριγωνικό πίνακα $U = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 20/15 \end{bmatrix}$ μέσω πολ/μού με τους εξής στοιχ. πίνακες (με την σειρά που αναγράφονται)

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -9/5 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως $E_3E_2E_1A = U$ και άρα $A = (E_3E_2E_1)^{-1}U = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}U$. Αρα

$$L = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/5 & 1 & 0 \\ 9/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Ένας άλλος τρόπος να βρούμε τον L^{-1} και απο εκεί τον L είναι μέσω της απαλοιφής Gauss του πίνακα $\left[A|I_3\right]$. Οταν φτάσουμε στον U αυτός που έχουμε δίπλα είναι ο L^1.)

Για την λύση του συστήματος $AX = B$ όπου $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ λύνουμε τα εξής δύο τριγωνικά συστήματα: πρώτα λύνουμε το $LY = B$ ως προς Y και μετά το $UX = Y$.

10. Δίνεται ο εξής πίνακας A

$$\begin{bmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1)Δείξτε ότι $A^3 = 3A^2 - 3A + I_3$
2)Δείξτε ότι ο A αντιστρέφεται και υπολογίστε τον αντίστροφό του.

Απάντηση. Για το 1) κάντε απλά τις πράξεις.
Για το 2) μπορείτε να βρείτε τον αντίστροφο μέσω απαλοιφής Gauss-Jordan είτε να παρατηρήσετε ότι η εξισωση $A^3 = 3A^2 - 3A + I_3$ δίνει $A(A^2 - 3A + 3I_3) = A^3 - 3A^2 + 3A = I_3$ και επομένως ο αντίστροφος του A είναι ο $A^2 - 3A + 3I_3 = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

11. Βρείτε τους αντίστροφους των παρακάτω πινάκων

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Μπορείτε να υπολογίσετε τον αντίστροφο και χωρίς την διαδικασία απαλοιφής Gauss-Jordan.

Απάντηση Οι πρώτοι δύο λύνονται και χωρίς απαλοιφή Gauss-Jordan αφού ο πρώτος είναι πίνακας μετάθεσης (εναλλαγή 1ης με 3η γραμμή, άρα ο αντίστροφός του είναι ο εαυτός του) και ο δεύτερος είναι γινόμενο δύο πινάκων μεταθέσεων: εναλλαγή 1ης με 2η γραμμή και 2η με 3η άρα ο αντίστροφός του είναι αυτός που εναλλάσσει 2η με 3η και 1η με 2η δηλαδη ο $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Για τον τρίτο κάντε απαλοιφή Gauss-Jordan.....

12. Δίνεται ο πίνακας
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b \end{bmatrix}.$$
Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για τις σταθερές a, b, ώστε
1) να είναι αντιστρέψιμος
2) να είναι συμμετρικός.

Απάντηση Κάνουμε απαλοιφή Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & | & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & | & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b & | & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{a\neq 0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & | & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-ab & | & -a & 1 & -a \end{bmatrix}.$$

Καταρχήν παρατηρούμε ότι αν $a = 0$ τότε ο πίνακας έρχεται στην μορφή $\begin{bmatrix} 1 & 0 & b & | & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ από το 3ο βήμα και αυτός είναι αντιστρέψιμος για κάθε b. Επομένως η συνθήκη $a \neq 0$ δεν χρειάζεται. Η τελευταία μορφή του πίνακα στην απαλοιφή δίνει ικανή και αναγκαία συνθηκη για να είναι ο πίνακας αντιστρέψιμος την : $1 - ab \neq 0$. (Αφού δεν πρέπει να έχουμε μηδενικο οδηγό).

Ένας πίνακας A είναι συμμετρικός αν και μόνο αν $A^t = A$ ισοδύναμα $A_{ij} = A_{ji}$ για κάθε i, j. Επομένως πρέπει και αρκεί $a = -1$ και $b \in R$.

13. Σωστό ή Λάθος (δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας)
1) Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο A^T είναι αντιστρέψιμος.
2) Αν ο τετραγωνικός πίνακας A έχει μία μηδενική γραμμή τότε δεν είναι αντιστρέψιμος.
3) Αν ο τετραγωνικός πίνακας A έχει μία μηδενική στήλη τότε δεν είναι αντιστρέψιμος.
4) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος και $AB = 0$ τότε $B = 0$. (συγκρίνετε αυτή την άσκηση με την άσκηση 3.4 του δεύτερου φυλλαδίου).
5) Αν A, B αντιστρέψιμοι τότε $(AB^{-1})^{-1} = BA^{-1}$.

Απάντηση Όλα είναι σωστά. Για τα περισσότερα έχω μιλήσει ήδη στην τάξη. Θυμηθείτε ότι ένας $m \times m$ πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν στην απαλοιφή Gauss φτάσουμε σε πίνακα που έχει οδηγό σε κάθε γραμμή και στήλη. Αυτό δείχνει άμεσα τα 1, 2, 3 και 6 (γιατί;) Για το 1) επίσης έχουμε $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. Για το 4 αν έχουμε $AB = 0$ τότε $A^{-1}(AB) = A^{-1}0 = 0$ και αρα $B = A$. Το 5 είναι ιδιότητες του αντιστρόφου. (Μάλιστα τις ίδιες έχει και ο ανάστροφος.)

14. α)Αν A τετραγωνικός πίνακας δείξτε ότι οι πίνακες AA^t, A^tA είναι συμμετρικοί.
β)Τα στοιχεία της διαγωνίου των AA^t, A^tA είναι μη αρνητικοί.
γ)Αν A, B τετραγωνικοί συμμετρικοί πίνακες δείξτε ότι ο AB είναι συμμετρικός αν και μόνο αν $AB = BA$.
δ)Πόσα στοιχεία είναι δυνατόν να ορισθούν ανεξάρτητα σε ένα συμμετρικό (αντισυμμετρικό) πίνακα·

Απάντηση α) $(AA^t)^t = (A^t)^tA^t = AA^t$, επομένως ο AA^t είναι συμμετρικός. Ανάλογα για τον A^tA.
β) Το έχω κάνει στην τάξη.
γ) AB είναι συμμετρικός αν και μόνο αν $(AB)^t = AB$ αλλά $(AB)^t = B^tA^t = BA$ (η τελευταία ισότητα προκύπτει από το ότι A και B είναι συμμετρικοί). Επομένως AB είναι συμμετρικός αν και μόνο αν $BA = (AB)^t = AB$.
δ) Αρκεί να ορισθούν τα στοιχεία από την διαγώνιο και πάνω (ή από την διαγώνιο και κάτω αντίστοιχα). Αυτά σε ένα $n \times n$ πίνακα είναι
$$n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

15. Έστω A ένας 2×1 πίνακας και B ένας 1×2. Δείξτε ότι ο $C = AB$ δεν είναι αντιστρέψιμος. (Αυτή η άσκηση έχει και την εξής γενίκευση για όποιον ενδιαφέρεται: αν A είναι $m \times n$ πίνακας με $n < m$ και B ένας $n \times m$ τότε ο $C = AB$ δεν είναι αντιστρέψιμος.)

Απάντηση θυμηθείτε ότι για τους δύο επί δύο πίνακες (ΜΟΝΟ) υπάρχει τύπος για την εύρεση του αντιστρόφου όπου υπάρχει. Έτσι αν $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ αυτός έχει αντίστροφο αν και μόνο αν $D = ad - bc \neq 0$ και τότε ο αντίστροφος δίνεται από τον τύπο $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. Αυτό θα σας λύσει ¨μπακάλικα' αυτή την άσκηση (υπάρχει και πιο ωραίος τρόπος λύσης τον βλέπετε;)

16. Βρείτε όλους τους 2×2 πίνακες A ώστε $A^2 = I$.

Απάντηση Δείτε ότι $A^2 = I$ αν και μόνο αν $A^{-1} = A$. Άρα αν $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ θα έχουμε $ad - bc \neq 0$ και επιπλέον θα πρέπει

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Εξισώστε ανά στοιχείο και λύστε....

17.Να βρείτε παραμετρική διανυσματική λύση για το ομογενές:

$$\begin{array}{rrrrl} x & -2y & -1z & -4w & = 0 \\ 2x & -4y & +3z & +7w & = 0 \\ -2x & +4y & +1z & +5w & = 0 \end{array}$$

Απάντηση. Κάνουμε απαλοιφή Gauss στον πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -4 \\ 2 & -4 & 3 & 7 \\ -2 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. Έτσι φτάνουμε στον $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Επομένως έχουμε δύο οδηγούς άρα και δύο βασικές μεταβλητές (τις x, z) και δύο ελεύθερες (τις y, w). Άρα το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{array}{rrrrl} x & -2y & -1z & -4w & = 0 \\ & & z+ & 3w & = 0. \end{array}$$

Συνεπώς η γενική του λύση είναι $z = -3w$ και $x = 4w + z + 2y = w + 2y$, η οποία σε διανυσματική μορφή είναι

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w + 2y \\ y \\ -3w \\ w \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Κεφάλαιο 2
Πίνακες και Διανυσματικοί υπόχωροι.

18.Ποια από τα επόμενα υποσύνολα $\{b = (b_1, b_2, b_3), b_i \in \mathbf{R}\}$ του $\mathbf{R}^3$ είναι πράγματι υπόχωροι;
1)Τα διανύσματα b που ικανοποιούν $b_1 = 0$.
2)Τα διανύσματα b που ικανοποιούν $b_1 \geq 0$.
3)Τα διανύσματα b που ικανοποιούν $b_1 = 1$.
4)Τα διανύσματα b με $b_1 b_2 = 0$.
5)Το μεμονωμένο διάνυσμα $b = (0, 0, 0)$.
6)Όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί των δύο διανυσμάτων $x = (1, 1, 0), y = (2, 0, 1)$.
7)Τα διανύσματα b που ικανοποιούν $b_3 - b_2 + 3b_1 = 0$.
8)Τα διανύσματα b που ικανοποιούν $b_2 = b_1^2$.
9)Τα διανύσματα b με b_2 ρητό.

Απάντηση 1)Ναι (μάλιστα παράγεται από τα $(0, 1, 0)$ και $(0, 0, 1)$)μπορείτε να το δείτε με τον κλασικό τρόπο (αθροίσματα και πολ/σια με αριθμό μένουν μέσα στο σύνολο) ή πιο εύκολα είναι ο μηδενόχωρος του πίνακα $[1\,0\,0]$.
2)Όχι π.χ. το $(1, 0, 0)$ ανήκει σάυτό το σύνολο ενώ το $-1 \cdot (1, 0, 0)$ δεν ανήκει.
3)Όχι, το $(0, 0, 0)$ δεν ανήκει στο σύνολο.
4)Όχι, π.χ. τα $(1, 0, 0)$ και $(0, 1, 0)$ ανήκουν στο σύνολο ενώ το άθροισμά τους δεν ανήκει.
5)Ναι
6)Ναι πάντα οι γραμμικοί συνδυασμοί αποτελούν υπόχωρο (το έχω κάνει στην τάξη).
7)Ναι, μπορείτε να το δείτε με τον κλασικό τρόπο (αθροίσματα και πολ/σια με αριθμό μένουν μέσα στο σύνολο) ή πιο εύκολα είναι ο μηδενόχωρος του πίνακα [1 8)Όχι, π.χ. το $(1, 1, 0)$ ανήκει στο σύνολο ενώ το πολ/σιό του $2 \cdot (1, 1, 0)$ δεν ανήκει.
9)Όχι, π.χ. το $(1, 1, 0)$ ανήκει στο σύνολο ενώ το πολ/σιό του $\sqrt{2} \cdot (1, 1, 0)$ δεν ανήκει.

19. 1)Ανήκει το διάνυσμα $(1, -1, 0)$ στον υπόχωρο που παράγεται από το διάνυσμα $(1, 0, 1)$;
2)Ανήκει το διάνυσμα $(1, -1, 0, 3)$ στον υπόχωρο που παράγουν τα διανύσματα $(1, 0, 1, 7)$ και $(-1, 1, 0, -3)$;

Απάντηση 1) Όχι γιατί δεν είναι πολ/σιό του.
2) Το $(1, -1, 0, 3)$ είναι φανερά $-1\cdot(-1, 1, 0, -3)$ και επομένως ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα $(1, 0, 1, 7)$ και $(-1, 1, 0, -3)$.

20.Ποιές από τις επόμενες περιγραφές είναι σωστές ; Οι λύσεις x του

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

σχηματίζουν επίπεδο, ευθεία, σημείο, υπόχωρο, μηδενόχωρο του A, χώρο στηλών του A.

Απάντηση Οι λύσεις αποτελούν υπόχωρο, τον μηδενόχωρο του A και σχηματίζουν ευθεία (γιατί; δείτε ότι στην λύση θα έχω μία ελεύθερη μεταβλητή την z και οι λύσεις σας είναι της μορφής $z(-2, 1, 1)$).

21. Εξετάστε εαν τα ακόλουθα είναι σωστά η λάθος, δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας Δίνεται το m επί n σύστημα $Ax = b$.
1)Τα διανύσματα b που δεν περιέχονται στον χώρο $R(A)$ αποτελούν γραμμικό υπόχωρο του R^m.
2)Εάν $R(A)$ περιέχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα, τότε ο A είναι ο μηδενικός πίνακας.
3)Ο χώρος στηλών του πίνακα $2A$ είναι ίσος με τον χώρο στηλών του A.

4)Ο χώρος στηλών του πίνακα $A-I$ είναι ίσος με τον χώρο στηλών του A.

Απάντηση 1) Λάθος (δείτε ότι το μηδενικό διάνυσμα δεν ανήκει σάυτό το σύνολο αφού ανήκει στο $R(A)$.)
2)Σωστό (όλες οι στήλες του A πρέπει να είναι το μηδενικό διάνυσμα).
3)Σωστό (πολ/σια διανυσμάτων παράγουν τον ίδιο υπόχωρο με τα ίδια τα διανύσματα.)
4)Λάθος (δείτε π.χ. τί γίνεται αν $A=I$ τότε ο χώρος στηλών του A είναι όλο το R^n ενώ ο χώρος στηλών του $A-I=0$ είναι το μηδενικό διάνυσμα.)

22. 1)Κατασκευάστε έναν 3 επί 3 πίνακα του οποίου ο χώρος στηλών περιέχει τα διανύσματα $(1,1,0)$ και $(1,0,1)$ αλλά δεν περιέχει το $(1,1,1)$.
2)Κατασκευάστε έναν 3 επί 3 πίνακα του οποίου ο χώρος στηλών είναι μια ευθεία.

Απάντηση 1)Για παράδειγμα $\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$.
2) Π.χ. $\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

23. Ποια συνθήκη πρέπει να πληρούν τα b_1,b_2,b_3, ώστε το διάνυσμα (b_1,b_2,b_3) να ανήκει στο χώρο στηλών του πίνακα

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ 4 & 9 & -8\end{bmatrix}.$$

Απάντηση Λύνουμε το σύστημα $Ax=b$ όπου $b=(b_1,b_2,b_3)$. Ο επαυξημένος του είναι

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & | & b_1\\ 2 & 5 & -4 & | & b_2\\ 4 & 9 & -8 & | & b_3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & | & b_1\\ 0 & 1 & 0 & | & b_2-2b_1\\ 0 & 1 & 0 & | & b_3-4b_1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & | & b_1\\ 0 & 1 & 0 & | & b_2-2b_1\\ 0 & 0 & 0 & | & b_3-2b_1-b_2\end{bmatrix}.$$

Άρα το σύστημα έχει λυση (και συνεπώς το b ανήκει στο χώρο στηλών του A) αν και μόνο αν $b_3-3b_1-b_2=0$.

24.1) Να βρεθούν οι συνθήκες που πρέπει να πληρούν τα b_1,b_2,b_3 ώστε το διάνυσμα $b=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}$ να ανήκει στο χώρο στηλών του πίνακα $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$.
2) Βρείτε την τάξη του A.
3) Βρείτε τις λύσεις του ομογενούς συστήματος $Ax=0$ σε διανυσματική μορφή για τον παραπάνω πίνακα A.
4) Βρείτε την γενική λύση του $Ax=b$ όταν $b_1=1,b_2=2,b_3=3$.

Απάντηση 1)Ο επαυξημένος του είναι

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1 & | & b_1\\ 1 & 1 & 1 & 0 & | & b_2\\ 2 & 3 & 1 & 1 & | & b_3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1 & | & b_1\\ 0 & -1 & 1 & -1 & | & b_2-b_1\\ 0 & -1 & 1 & -1 & | & b_3-2b_1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1 & | & b_1\\ 0 & -1 & 1 & -1 & | & b_2-b_1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & b_3-b_1-b_2\end{bmatrix}.$$

Άρα το σύστημα έχει λυση (και συνεπώς το b ανήκει στο χώρο στηλών του A) αν και μόνο αν $b_3-b_1-b_2=0$.
2)Η τάξη του A είναι 2 (γιατί;).

3)Για την λύση του ομογενούς $Ax = 0$ φτάνουμε στον

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Επομένως η λύση σε διανυσματική μορφή είναι η $(x, y, z, w) = z(-2, 1, 1, 0) + w(1, -1, 0, 1)$.
4) Απο το 1) για το συκεκριμένο διάνυσμα φτάνουμε στο επαυξημένο

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Επομένως η λύση σε διανυσματική μορφή είναι η $(x, y, z, w) = (3, 1, 0, 0) + z(-2, 1, 1, 0) + w(1, -1, 0, 1)$.

25. 1) Βρείτε εναν πίνακα A του οποίου ο χώρος στηλών να περιέχει τα $(1, 1, 0)$ και $(0, 1, 1)$, ενώ ο μηδενόχωρος το $(1, 1, 1, 1)$.
2) Βρείτε έναν 2 επί 2 πίνακα του οποίου ο μηδενόχωρος είναι ίσος με τον χώρο στηλών του.
3) Βρείτε εναν πίνακα A του οποίου ο μηδενόχωρος αποτελείται από όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων $(1, 1, 2), (0, 1, 1)$.

Απάντηση Εδώ θα δώσω μόνο τα παραδείγματα (που δεν είναι μοναδικά), αν θέλετε τον τρόπο σκέψης επικοινωνήστε μαζί μου.
1) Ένα τέτοια παράδειγμα είναι ο $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.
2)Για παράδειγμα ο μηδενόχωρος όπως και ο χώρος στηλών του πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ παράγονται από το διάνυσμα $(1, 1)$ (Επιβεβαιώστε!!!).
3)Ένα εύκολο παράδειγμα είναι ο $[11 - 1]$. Μπορείτε να δώσετε ένα 2 επί 3 παράδειγμα; ένα 3 επί 3; Παραπάνω διαστάσεων;(προσέξτε ότι το πλήθος των στηλών θα είναι πάντα 3)

26. Είναι τα ακόλουθα σωστά ή λάθος· Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.
1)Ένας τετραγωνικός πίνακας δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές.
2)Ένας αντιστρέψιμος πίνακας δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές.
3)Ένας m επί n πίνακας δεν έχει περισσότερες από n βασικές μεταβλητές.
4)Ένας m επί n πίνακας δεν έχει περισσότερες από m βασικές μεταβλητές.

Απάντηση 1)Προφανώς λάθος. Για παράδειγμα δείτε τον $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
2)Σωστό, ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας καταλήγει στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του στον I_n (βεβαιωθείτε ότι βλέπετε το γιατί). Επομένως δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές (ισοδύναμα η τάξη του είναι n).
3) και 4) Σωστά και τα δύο. Το πλήθος των βασικών μεταβλητών είναι το πλήθος των οδηγών στην κλιμακωτή μορφή του πίνακα (και αυτό με την σειρά του είναι ίσο με την τάξη του πίνακα). Αλλά σε κάθε στήλη και γραμμή του πίνακα μπορούμε να έχουμε το πολύ ένα οδηγό. Επομένως το πλήθος των βασικών μεταβλητών δεν ξεπερνάει ούτε το πλήθος των γραμμών ούτε αυτό των στηλών.

27. Βρείτε τον πίνακα A εάν γνωρίζετε οτι η γενική λυση του συστήματος $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ είναι η $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Απάντηση Είναι φανερό ότι ο πίνακας είναι 2 επί 2. Από την μορφή της γενικής λύσης του $Ax = (1,0)$ συμπεραίνουμε ότι το $(1,0)$ είναι ειδική λύση ενώ το $(0,1)$ είναι λύση του ομογενούς $Ax = 0$, δηλαδή ισχύει $A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Επομένως αν ο πίνακας είναι $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ έχουμε από την πρώτη σχέση ότι $a = 1$ και $c = 0$ ενώ από την δεύτερη $b = d = 0$. Επομένως $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

28. Ο μηδενόχωρος ενός 3 επί 4 πίνακα A παράγεται από το διάνυσμα $(2,3,1,0)$.
1) Ποιά είναι η τάξη του A ;
2) Βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A.

Απάντηση 1) Το γεγονός ότι ο μηδενόχωρος του πίνακα παράγεται από ένα μόνο διάνυσμα σημαίνει ότι έχουμε μόνο μία ελεύθερη μεταβλητή και αφού ο πίνακας έχει 4 στήλες θα έχουμε 3 βασικές μεταβλητές και άρα 3 οδηγούς. Επομένως η τάξη του πίνακα είναι 3.
2) Ξέρουμε ήδη ότι στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα θα έχουμε 3 οδηγούς (άσσους αφού είναι αν.κλ.) και μία στήλη χωρίς οδηγό που αντιστοιχεί στην μοναδική ελεύθερη μεταβλητή. Από το διάνυσμα $(2,3,1,0)$ καταλαβαίνουμε ότι η τελευταία στήλη θα είναι η $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (γιατί; σκεφτήτε πώς γράφουμε την γενική λύση του ομογενούς). Αυτό όμως δίνει και την τελευταία γραμμή του πίνακα που πρέπει να είναι η $(0,0,0,1)$ (αφού το 1 της τελευταίας στήλης είναι οδηγός). Δηλαδή τώρα ο πίνακας έχει έρθει στην μορφή $A = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Τώρα για να βρώ ποια στήλη αντιστοιχεί στην ελεύθερη μεταβλητή παρατηρώ ότι για να παράγει το διάνυσμα $(2,3,1,0)$ τον μηδενόχωρο του A πρέπει οι δύο βασικές μεταβλητές (εκτός της τελευταίας) να εξαρτώνται από την ελεύθερη. Επομένως η ελεύθερη είναι σε στήλη που έπεται αυτές των βασικών. Άρα αναγκαστικά αυτή θα βρίσκεται στην 3η στήλη. Αν $X = (x,y,z,w)$ τότε οι λύσεις του ομογενούς $AX = 0$ (δηλαδή ο μηδενόχωρος του A) είναι $(x,y,z,w) = z(2,3,1,0)$ και άρα $x = 2z, y = 3z, w = 0$. Επομένως ο πίνακας είναι ο $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

29. Είναι τα διανύσματα $(1,1,0,0), (1,0,1,0), (0,0,1,1), (0,1,0,1)$ γραμ. ανεξάρτητα;

Απάντηση
Φτιάχνουμε τον πίνακα A του οποίου οι στήλες είναι τα παραπάνω διανύσματα. Έτσι έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Επομένως μόνο τα 3 πρώτα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (αφού μόνο οι 3 πρώτες στήλες έχουν οδηγούς). Το τέταρτο είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

30. Δίνονται τα διανύσματα $x = (2,3,5), y = (1,1,2)$ και $v = (a,b,c)$. Βρείτε μια αναγκαία συνθήκη στα a,b,c ώστε να είναι το σύνολο $\{x,y,v\}$ γραμμικά εξαρτημένο. Κατόπιν βρείτε ένα διάνυσμα z ώστε το σύνολο $\{x,y,z\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Απάντηση
Φτιάχνουμε τον πίνακα A του οποίου οι στήλες είναι τα παραπάνω διανύσματα και κ'ανουμε απαλοιφη Gauss. Έτσι έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & b \\ 2 & 5 & c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & b-a \\ 0 & 1 & c-2a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & c-a-b \end{bmatrix}.$$

Αρα αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι τα $\{x, y, v\}$ γραμμικά εξαρτημένα είναι $c - a - b = 0$.

Για να είναι ανεξάρτητα πάρτε z που να μην ικανοποιεί την παραπάνω σχέση. Για παράδειγμα τα διανύσματα $\{(2,3,5),(1,1,2),(1,1,1)\}$ είναι γραμ. ανεξάρτητα.

31. Είναι τα ακόλουθα σωστά ή λάθος; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.
1) Εννέα διανύσματα του $\mathbf{R}^7$ μπορεί να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
2) Εννέα διανύσματα του $\mathbf{R}^7$ παράγουν τον $\mathbf{R}^7$.
3) Εννέα γραμ. ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbf{R}^9$ αποτελούν βάση του $\mathbf{R}^9$.
4) Έστω V ένας διαν. υπόχωρος του $\mathbf{R}^7$ διάστασης 4. Κάθε βάση του V μπορεί να επεκταθεί σε βάση του $\mathbf{R}^7$ επισυνάπτοντας 3 ακόμα διανύσματα.
5)* Έστω V ένας διαν. υπόχωρος του $\mathbf{R}^7$ διάστασης 4. Κάθε βάση του $\mathbf{R}^7$ περιέχει βάση του V που προκύπτει παραλείποντας 3 διανύσματα.
6)* Αν V και W είναι τριδιάστατοι υπόχωροι του $\mathbf{R}^5$ τότε υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα στην τομή τους $V \cap W$.

Απάντηση
1) Λάθος. Η διάσταση είναι 7 άρα το μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων είναι 7.
2) Λάθος. Μπορείτε να βρείτε 9 που να τον παράγουν (αν τα 7 είναι γραμ. ανεξάρτητα) ή 9 που να παράγουν μόνο κάποιο υπόχωρο (διάστασης από 1 έως 7) πάρτε για παράδειγμα όλα να είναι πολ/σια ενός διανύσματος.
3) Σωστό. Ο υπόχωρος του $\mathbf{R}^9$ που παράγουν έχει διάσταση 9 και άρα ταυτίζεται με τον $\mathbf{R}^9$.
4) Σωστό. Αν $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ βάση του V, διαλέγουμε 3 διανύσματα w_1, w_2, w_3 ώστε και τα 7 μαζί να είναι γραμ. ανεξάρτητα. (Αυτό μπορεί να γίνει πάντα, βλέπετε γιατί;) Τότε και τα 7 μαζί αποτελούν βάση του $\mathbf{R}^7$.
5) Λάθος. Μπορεί κανένα από τα διανύσματα της βάσης να μην ανήκει στον υπόχωρο. Πάρτε για παράδειγμα V τον υπόχωρο που παράγεται από τα διανύσματα $(1,0,0,0,0,1,1),(0,1,0,0,0,1,1),(0,0,1,0,0,1,1),(0,0,0,1,0,1,1)$ (γιατί ο V είναι τετραδιάστατος; τι αρκεί να δείξετε;). Αν θεωρήσουμε την κανονική βάση του R^7 τότε κανένα διάνυσμά της δεν ανήκει στον V.
6) Σωστό. Αν $\mathcal{B}_1 = v_1, v_2, v_3$ και $\mathcal{B}_2 = w_1, w_2, w_3$ είναι βάσεις των δύο υποχώρων τότε η ένωσή τους $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα γιατί δεν ¨χωράνε' 6 γραμ. ανεξάρτητα διανύσματα σε χώρο διάστασης 5. Επομένως υπάρχουν πραγματικοί $r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3$ όχι όλοι μηδέν ώστε $r_1v_1 + r_2v_2 + r_3v_3 + s_1w_1 + s_2w_2 + s_3w_3 = 0$ και άρα $r_1v_1 + r_2v_2 + r_3v_3 = -s_1w_1 - s_2w_2 - s_3w_3$. Άρα το διάνυσμα $r_1v_1 + r_2v_2 + r_3v_3$ δεν ειναι μηδεν (γιατί;) και ανήκει στην τομή και των δύο υποχώρων (γιατί;).

32. Βρείτε μία βάση για το επίπεδο $x - 2y + 3z = 0$ στον R^3. Στη συνέχεια βρείτε μία βάση της τομής του παραπάνω επιπέδου με το $x + y + z = 0$. Τέλος βρείτε μια βάση για τον υπόχωρο των διανυσμάτων που είναι κάθετα στο αρχικό επίπεδο.

Απάντηση
Η λύση του $x - 2y + 3z = 0$ ή ισοδύναμα του $x = 2y - 3z$ είναι όλα τα διανύσματα (x, y, z) που ικανοποιούν $(x, y, z) = y(2,1,0) + z(-3,0,1)$. Άρα βάση είναι τα $\{(2,1,0),(-3,0,1)\}$.
Για να βρούμε βάση της τομής ουσιαστικά λύνουμε το ομογενές

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

Με την γνωστή απαλοιφή Gauss στον πίνακα συντελεστών του συστήματος φτάνουμε στη λύση $(x, y, z) = z(-5/3, 2/3, 1)$. Επομένως η τομή είναι μονοδιάστατος διαν. υπόχωρος του R^3 και μία ζητούμενη βάση είναι η $\{(-5,2,3)\}$ (όπως φυσικά και η $(-5/3, 2/3, 1)$).
Κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο είναι το $(1,-2,3)$ το οποίο και αποτελεί βάση για τον κάθετο υπόχωρο (επειδή είμαστε στον R^3 και το επίπεδο είναι διδιάστατο ο κάθετος υπόχωρος θα είναι μονοδιάστατος, άρα ένα διάνυσμα αρκεί για την βάση του. Αν αντί του R^3 είχαμε R^4 πως θα δουλεύαμε;)

33. Βρείτε μία βάση για καθε ένα από τους εξής υπόχωρους του R^4:
1)Ολα τα διανύσματα των οποίων οι συνιστώσες είναι ίσες.
2)Ολα τα διανύσματα των οποίων οι συνιστώσες έχουν άθροισμα 0.
3)Ολα τα διανύσματα που είναι κάθετα στα $(1,1,0,0)$ και $(1,0,1,1)$.

Απάντηση

1) Εδώ τα διανύσματα είναι της μορφής (x, x, x, x) με $x \in R$. Επομένως μια προφανή βάση είναι η $\{(1, 1, 1, 1)\}$.
2) Εδώ τα διανύσματα είναι τα (x, y, z, w) με $x + y + z + w = 0$. Επομένως είναι όλα της μορφής $(x, y, z) = y(-1, 1, 0, 0) + z(-1, 0, 1, 0) + w(-1, 0, 0, 1)$. Επομένως τα $\{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$ αποτελούν βάση.
3) Τα ζητούμενα διανύσματα (x, y, z, w) είναι αυτά των οποίων το εσωτερικό γινόμενο με τα $(1, 1, 0, 0)$ και $(1, 0, 1, 1)$ είναι 0. Επομένως είναι αυτά που ικανοποιούν $x + y = 0$ και $x + z + w = 0$. Λύνουμε το ομογενές και έχουμε γενική διανυσματική λύση την $(x, y, z, w) = z(-1, 1, 1, 0) + w(-1, 1, 0, 1)$. Συνεπώς μία βάση είναι η $\{(-1, 1, 1, 0), (-1, 1, 0, 1)\}$.

34. Δίνεται ο πίνακας A $= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Να βρεθούν βάσεις και διαστάσεις για τους τέσσερις υπόχωρους που αντιστοιχούν στον A.

Απάντηση

Κ'ανουμε απαλοιφη Gauss και καταληγουμε στον πινακα $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Επομένως έχει ταξη 3 (ειναι αντιστρέψιμος). Αρα $dim(R(A)) = 3, dim(N(A)) = 0, dim(R(A^T)) = 3$ και $dim(N(A^T)) = 0$. Μάλιστα $R(A) = R(A^T) = R^3$ και $N(A) = N(A^T) = \{0\}$. Επομένως μπορούμε να διαλέξουμε σαν βάση για τον χώρο γραμμών και τον χώρο στηλών του A την κανονική βάση $\{e_1, e_2, e_3\}$ του R^3.

35. Αν ο A είναι 40 επί 20 και έχει τάξη 15 πόσα ανεξάρτητα διανύσματα ικανοποιούν την εξίσωση $Ax = 0$; Πόσα ανεξάρτητα ικανοποιούν την $A^T y = 0$;

Απάντηση

Αφου η ταξη του A ειναι 15 εχουμε για τις διαστασεις των 4 θεμελ. υποχωρων του:
$dim(R(A)) = 15, dim(N(A)) = 5, dim(R(A^T)) = 15, dim(N(A^T)) = 25$. Επομενως 5 γραμ. ανεξ. διανυσματα ικανοποιουν την $Ax = 0$ (μηδενοχωρος του A) και 25 γραμ. ανεξ. διανυσματα ικανοποιουν την $A^T y = 0$ (μηδενοχωρος του A^T).

36. Εαν το $Ax = b$ έχει πάντοτε μία τουλάχιστον λύση, δείξτε ότι η μόνη λύση του $A^T y = 0$ είναι η $y = 0$.

Απάντηση

Αν ο A ειναι $m \times n$ τοτε το γεγονος οτι $Ax = b$ έχει πάντοτε μία τουλάχιστον λύση συνεπαγεται (γιατι) οτι ο χωρος στηλων του A ειναι ο R^m (και αρα $n \geq m$). Επομενως η ταξη του A ειναι m και αρα $dim(N(A^T)) = 0$.

37. Συμπληρώστε:
Εαν οι στήλες του A είναι γραμ. ανεξάρτητες (ο A είναι $m \times n$) τότε η τάξη του είναι - - - - και ο μηδενόχωρος είναι - - - - και ο χώρος γραμμών είναι - - - - .

Απάντηση

Εαν οι στήλες του A είναι γραμ. ανεξάρτητες (ο A είναι $m \times n$) τότε η τάξη του είναι n και ο μηδενόχωρος είναι $\{0\}$ και ο χώρος γραμμών είναι ο R^n. Δείτε ότι αναγκαστικά $m \geq n$.

38. Δίνεται η ευθεία E στον R^3 που διέρχεται από το $(0, 0, 0)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $(1, -2, -1)$. Δίδεται επίσης το επίπεδο K :$3x + y + z = 0$.
1)Δείξτε ότι η E περιέχεται στο K.
2)Βρείτε μία βάση της E.
3)Επεκτείνετε τη βάση του ερωτήματος 2 σε μία βάση του R^3 ώστε 2 από τα διανύσματα της τελευταίας να είναι βάση του K.

Απάντηση

1) Αρκεί (γιατί ;) να δούμε ότι το διανυσμα $(1, -2, -1)$ ανήκει στο K. Το οποίο ισχύει αφού $3+(-2)+(-1) = 0$.
2) Βάση για την E είναι το διάνυσμα $(1, -2, -1)$.
3) Καταρχήν επεκτείνουμε το $(1, -2, -1)$ σε βάση του K. Φυσικά ο K έχει διάσταση 2 (σαν επιπεδο) (μαλιστα μια βαση του είναι η $\{(-1, 3, 0), (-1, 0, 3)\}$ γιατί;). Άρα για να επεκτείνουμε το $(1, -2, -1)$ σε βάση του K αρκεί να βρούμε διάνυσμα του K γραμ. ανεξάρτητο από το $(1, -2, -1)$. Έτσι για παράδειγμα το $(-1, 3, 0)$ είναι ένα τέτοιο. Τώρα την βάση $\{(1, -2, -1), (-1, 3, 0)\}$ του K επεκτείνουμε σε βάση του R^3 προσθέτοντας ένα επιπλέον διάνυσμα του R^3 που να μην ανήκει στο K. Για παράδειγμα το κάθετο στο επίπεδο K διάνυσμα $(3, 1, 1)$ είναι ανεξάρτητο από τα άλλα δύο και άρα τα τρία διανύσματα $\{(1, -2, -1), (-1, 3, 0), (3, 1, 1)\}$ αποτελούν βάση του R^3.

39. Υποθέστε ότι ο πίνακας A μετά την απαλοιφή Gauss φτάνει στον

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1) Ποιά είναι η τάξη του A;
2) Δώστε μια βάση του χώρου γραμμών του A.
3) Σωστό ή λάθος; Οι γραμμές 1, 2, 3, του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες;
4) Σωστό ή λάθος; Οι στήλες $\{(2, 0, 0, 0), (4, 1, 0, 0), (1, 2, 2, 0)\}$ του U αποτελούν βάση του χώρου στηλών του A.
5) Ποιά είναι η διάσταση του αριστερού μηδενόχωρου $N(A^T)$;
6) Ποια είναι η γενική λύση του $Ax = 0$;

Απάντηση

1) 3.
2) Βάση για χώρο γραμμών: $\{(2, -1, 4, 2, 1), (0, 0, 1, -3, 2), (0, 0, 0, 0, 2)\}$
3) Λάθος, μπορεί κατά την απαλοιφή να έχουμε κάνει εναλλαγή γραμμών.
4) Λάθος, βάση του χώρου στηλών είναι η πρώτη η τρίτη και η πέμπτη στήλη του A όχι καταναγκη του U.
5) $dim(N(A^T)) = 1$
6) Γενική λύση του ομογενούς:

$$(x, y, z, w, t) = y(1, 1, 0, 0, 0) + w(-14, 0, 3, 1, 0).$$

40. Γιατί δεν υπάρχει πίνακας A ώστε το διάνυσμα $(1, 1, 1)$ να ανήκει στο χώρο γραμμών και στο μηδενόχωρο του A;

Απάντηση.

Αν $v \in N(A)$ τότε $Av = 0$. Επομένως (γιατί;) κάθε γραμμή του A δίνει εσωτερικό γινόμενο με το v ίσο με 0, δηλαδή είναι κάθετη στο v. Άρα όλος ο χώρος γραμμών του A είναι κάθετος στο v. Αν τώρα $v = (1, 1, 1)$ τότε θα έπρεπε $(1, 1, 1) \perp (1, 1, 1)$ που δεν ισχύει (για κανένα μη μηδενικό διάνυσμα v).

Κεφάλαιο 3
Γραμμικές Απεικονίσεις.

41. Ποιές από τις παρακάτω απεικονίσεις από τον R^2 στον R^2 είναι γραμμικές;
1) $T(x,y) = (1+x, y)$
2) $T(x,y) = (x-y, y)$
3) $T(x,y) = (sinx, y)$
4) $T(x,y) = (x^2+x, y)$
5) $T(x,y) = (0, 2x-y)$

Απάντηση.
Γραμμικές είναι μόνο οι 2 και 5 (γιατί;).

42. Έστω T γραμμική απεικόνιση από τον R^2 στον R^3 τέτοια ώστε $T(1,1) = (2,3,1)$ και $T(0,1) = (1,1,2)$. Προσδιορίστε την T, δηλαδή δώστε τον τύπο $T(x,y)$ της T.

Απάντηση.
Αφού $e_1 = (1,0) = (1,1) - (0,1)$ έχουμε $T(e_1) = T(1,1) - T(0,1) = (2,3,1) - (1,1,2) = (1,2,-1)$. Άρα ο πίνακας που αντιστοιχεί στην T είναι ο $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Επομένως ο τύπος της T δίνεται σαν

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (x+y, 2x+y, -x+2y).$$

43. Ποιος πίνακας παριστάνει την απεικόνιση που στέλνει το $(1,0)$ στο $(2,5)$ και το $(0,1)$ στο $(1,3)$; Ποιος πίνακας στέλνει το $(2,5)$ στο $(1,0)$ και το $(1,3)$ στο $(0,1)$; Υπάρχει πίνακας που απεικονίζει το $(2,6)$ στο $(1,0)$ και το $(1,3)$ στο $(0,1)$; Υπάρχει πίνακας που απεικονίζει το $(1,0,0)$ στο $(1,0)$ και το $(0,1,0)$ στο $(0,1)$;

Απάντηση
Για την πρώτη απεικόνιση ο ζητουμενος πίνακας (ως προς την κανονική βάση) είναι ο $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$. (Θυμηθείτε ότι οι στήλες του είναι οι εικόνες της κανονικής βάσης $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$).
Για την δεύτερη απεικόνιση παρατηρήστε ότι ο A που βρήκατε παραπάνω είναι αντιστρέψιμος (γιατί;) και ο αντίστροφός του κάνει ακριβώς αυτό που ζητάει η άσκηση (στέλνει δηλαδή το $(2,5)$ στο $(1,0)$ και το $(1,3)$ στο $(0,1)$). Έτσι ο ζητούμενος πίνακας είναι ο $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$.
Επειδή $(2,6) = 2(1,3)$ κάθε γραμμική απεικόνιση T ικανοποιεί $T(2,6) = 2T(1,3)$. Οι πίνακες ορίζουν γραμμικές απεικονίσεις, επομένως δεν υπάρχει πίνακας που να στέλνει το $(2,6)$ στο $(1,0)$ και το $(1,3)$ στο $(0,1)$.
Ναι, υπάρχουν άπειροι. Θα είναι όλοι 2 επί 3 της μορφής $\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{bmatrix}$ με $a, b \in R$.

44. Προσδιορίστε τον πίνακα A της γραμμικής απεικόνισης f που ικανοποιεί $f(1,1,1) = (2,1,1)$, $f(0,1,2) = (1,0,1)$ και $f(0,0,1) = (1,0,0)$. Ποιος είναι ο τύπος της f;

Απάντηση
Τα διανύσματα $(1,0,0)$ και $(0,1,0)$ γράφονται σαν $(1,0,0) = (1,1,1) - (0,1,2) + (0,0,1)$ και $(0,1,0) = (0,1,2) - 2(0,0,1)$. Επομένως

$$f(1,0,0) = (2,1,1) - (1,0,1) + (1,0,0) = (2,1,0) f(0,1,0) = (1,0,1) - 2(1,0,0) = (-1,0,1).$$

Άρα ο πίνακας της απεικόνισης είναι ο $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, και ο τύπος της δίνεται σαν $f(x,y,z) = A(x,y,z)^t = (2x - y + z, x, y)$.

45. Εαν $f : R^n \to R^n$ γραμμική ένα προς ένα και επί δείξτε ότι
1)Η αντίστροφη είναι γραμμική.
2)Η f^2 είναι γραμμική.

Απάντηση
1) Η f^{-1} είναι καλά ορισμένη αφού η f είναι 1-1 και επί. Επίσης είναι γραμμική αφού για κάθε δύο διανύσματα a, b του R^n και κάθε πραγματικό αριθμό r υπάρχουν μοναδικά διανύσματα A, B στο R^n ώστε $f(A) = a$ και $f(B) = b$ και επομένως

$$f^{-1}(a + rb) = f^{-1}(f(A) + rf(B)) = f^{-1}(f(A + rB)) = A + rB = f^{-1}(a) + rf^{-1}(b).$$

2)$f^2(a + rb) = f(f(a) + rf(b)) = f^2(a) + rf^2(b)$. Δικαιολογήστε όλες τις παραπάνω ισότητες.

46. Έστω T και U οι γραμμικές απεικονίσεις του R^2 που ορίζονται σαν

$$T(x,y) = (y,x) \text{ και } U(x,y) = (x,0).$$

Δώστε τον τύπο και τον πίνακα των παρακάτω γραμμικών απεικονίσεων $(U + T), UT, TU, T^2, U^2$. Τι παρατηρείτε;

Απάντηση
Οι πίνακες των T, U είναι οι $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, αντίστοιχα.

Ο τύπος του $U + T$ είναι $(U + T)(x,y) = (x + y, x)$ και ο αντίστοιχος πίνακας είναι ο $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ που ισούται με τον $A + B$.
Ο τύπος του $UT(x,y) = U(y,x) = (y,0)$ και ο αντίστοιχος πίνακας ο $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ που ισούται με το γινόμενο των πινάκων BA. Ανάλογα για όλα τα υπόλοιπα γινόμενα.

47. Δώστε έναν 3 επί 3 πίνακα που σε κάθε διάνυσμα (x,y,z) αντιστοιχεί την προβολή του στην ευθεία που ορίζεται από τα σημεία $(0,0,0)$ και $(1,2,3)$.

Απάντηση
Η ευθεία που ορίζεται από τα παραπάνω σημεία είναι η $t(1,2,3)$. Η προβολή του $(1,0,0)$ πάνω σε αυτή την ευθεία είναι σημείο $t(1,2,3)$, για συγκεκριμένο $t \in R$, τέτοιο ώστε το διάνυσμα $t(1,2,3) - (1,0,0)$ είναι κάθετο στο $(1,2,3)$. Δηλαδή το t ικανοποιεί $(t-1, 2t, 3t) \perp (1,2,3)$, και επομένως το εσωτερικό τους γινόμενο είναι 0, και άρα $t - 1 + 4t + 9t = 0$. Επομένως $t = 1/14$ και η προβολή του $(1,0,0)$ στην παραπάνω ευθεία είναι το σημείο $1/14(1,2,3)$.

Ανάλογα βρίσκουμε ότι η προβολή του $(0,1,0)$ στην δεδομένη ευθεία είναι το σημείο $2/14(1,2,3)$ ενώ η προβολή του $(0,0,1)$ είναι το σημείο $3/14(1,2,3)$. Συνεπώς ο ζητούμενος πίνακας είναι ο

$$\begin{bmatrix} 1/14 & 2/14 & 3/14 \\ 2/14 & 4/14 & 6/14 \\ 3/14 & 6/14 & 9/14 \end{bmatrix}.$$

48. Έστω T η γραμμική απεικόνιση του R^3 με τύπο

$$T(x,y,z) = (3x, x - y, 2x + y + z).$$

1) Είναι η T αντιστρέψιμη; Αν ναι βρείτε τύπο για την T^{-1}.
2) Δείξτε ότι η T ικανοποιεί $(T^2 - I)(T - 3I) = 0$.

Απάντηση

Ο πίνακας που αντιστοιχεί στην T είναι ο $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ο οποίος είναι αντιστρέψιμος (άνω τριγωνικός με μη μηδενικά στην διαγώνιο). Ο αντίστροφος του A είναι ο $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ επομένως ο T^{-1} έχει πίνακα τον A^{-1} και άρα τύπο τον $T^{-1}(x, y, z) = A^{-1}(x, y, z)^T = (1/3x, 1/3x - y, -x + y + z)$.
Για το 2) κάντε πράξεις στους πίνακες (δείτε επίσης ότι η ζητούμενη ισότητα δίνει άλλο ένα τρόπο να υπολογίσετε τον αντιστροφο του A).

49. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση f ώστε

$$f(1, 1, 2) = (1, 0, 2), f(0, -1, 1) = (1, 1, 1), f(1, 0, 2) = (3, 2, 4).$$

1) Βρείτε τον πίνακα A της παραπάνω απεικόνισης.
2) Δείξτε ότι η εικόνα της f είναι ένα επίπεδο στον R^3.
3) Βρείτε τον πυρήνα της f.
4) Βρείτε έναν υπόχωρο V του R^3 διάστασης 2 ώστε $f(V) = f(R^3)$.
5) Δείξτε ότι η $f : V \to R^3$ είναι ένα προς ένα.
6) Βρείτε ένα διάνυσμα $v \in R^3$,ώστε $f(v) = (0, 1, -1)$.
7) Βρείτε έναν υπόχωρο W του R^3 διάστασης 2 με την ιδιότητα ο $f(W)$ να ισούται με τον χώρο που παράγεται από το διάνυσμα $(0, 1, -1)$.
8) Είναι η $f : W \to R^3$ ένα προς ένα;

Απάντηση

Τα διανύσματα $\{(1, 1, 2), (0, -1, 1), (1, 0, 2)\}$ αποτελούν βάση του R^3 αφού είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Επομένως η f που ορίζεται παραπάνω είναι μοναδική (γιατί;) Δείτε επίσης ότι

$$\begin{aligned} f(0, 1, 0) &= f((1, 1, 2) - (1, 0, 2)) = (1, 0, 2) - (3, 2, 4) = (-2, -2, -2) \\ f(0, 0, 1) &= f((0, -1, 1) + (0, 1, 0)) = (1, 1, 1) + (-2, -2, -2) = (-1, -1, -1) \\ f(1, 0, 0) &= f((1, 0, 2) - 2(0, 0, 1)) = (3, 2, 4) - 2(-1, -1, -1) = (5, 4, 6) \end{aligned}$$

και επομένως ο πίνακας που αντιστοιχεί στην f είναι ο $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 6 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.
2) Εύκολα βλέπουμε ότι ο A έχει τάξη 2 (οι δύο πρώτες στήλες του είναι ανεξάρτητες) επομένως η εικόνα της f, που ισούται με τον χώρο στηλών του A, είναι υπόχωρος του R^3 διάστασης 2 και άρα είναι επίπεδο.
3) Ο πυρήνας της f είναι ο μηδενόχωρος του A και άρα υπολογίζουμε

$$Kerf = N(A) = \{z(0, -1/2, 1) \mid z \in R\}.$$

4) Οι δύο πρώτες στήλες του A παράγουν τον χώρο στηλών του A δηλαδή την εικόνα της f. Επομένως τα διανύσματα $\{(1, 0, 0)(0, 1, 0)\}$ παράγουν ένα διδιάστατο χώρο V ώστε $f(V) = f(R^3)$.
5) Η τομή των υπόχωρων V και $N(A)$ είναι φανερα το 0. Επομένως η $f : V \to R^3$ έχει μηδενικό πυρήνα και άρα είναι 1-1.
6) Λύνουμε το σύστημα $A(x, y, z)^T = (0, 1, -1)$ για να υπολογίσουμε το $v = (x, y, z)$. Ή παρατηρούμε ότι $(0, 1, -1) = (1, 1, 1) - (1, 0, 2) = f(0, -1, 1) - f(1, 1, 2) = f(-1, -2, -1)$. Επομένως ένα τέτοιο διάνυσμα είναι το $v = (-1, -2, -1)$.
7) Θεωρούμε W τον υπόχωρο του R^3 που παράγεται από τα διανύσματα $v = (-1, -2, -1)$ και $u = (0, -1/2, 1)$. Φανερά ο W είναι διάστασης 2 και αφού το u ανήκει στον πυρήνα της f έχουμε $f(W) = f(< (-1, -2, -1) >) =< (0, 1, -1) >$.

8) Δεν είναι 1-1 αφού η εικόνα του διανύσματος $u = (0, -1/2, 1) \in W$ είναι το $0 = f(0)$. (Στην πραγματικότητα όλος ο πυρήνας της f περιέχεται στον W.)

50. 1) Να βρεθούν μία βάση και η διάσταση του πυρήνα και της εικόνας της εξής γραμμικής απεικόνισης: $f(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z)$
2) Δείξτε ότι εάν $f, g : R^n \to R^m$ είναι γραμμικές απεικονίσεις που συμφωνούν στα στοιχεία μιας βάσης του R^n,τότε είναι ίσες.

Απάντηση

1) Ο πίνακας της f είναι ο $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ που η κλιμακωτή του μορφή είναι ο πίνακας $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Επομένως η τάξη του A είναι 2 και αυτή είναι και η διάσταση της εικόνας της f. Μάλιστα μία βάση της Imf είναι τα δύο πρώτα διανύσματα στήλες του A ($Imf = R(A)$). Δηλαδή τα διανύσματα $(1, 0, 1)$ και $(2, 1, 0)$ αποτελούν βάση του Imf.
Η διάσταση του πυρήνα της f είναι 3-2=1. Για να βρούμε μία βάση του πυρήνα λύνουμε το ομογενές με πίνακα συντελεστών τον A (αφού $Kerf = N(A)$). Επομένως από τον U βλέπουμε ότι μία βάση του $Kerf$ είναι το διάνυσμα $(-2, 1, 1)$.
2) Έστω $v_1, \ldots v_n$ μία βάση του V ώστε $f(v_i) = g(v_i)$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Αν $v \in R^n$ τότε $v = r_1 v_1 + \cdots + r_n v_n$ και συνεπώς

$$f(v) = r_1 f(v_1) + \cdots + r_n f(v_n) = r_1 g(v_1) + \cdots + r_n g(v_n) = g(v).$$

51. Εάν V γνήσιος υπόχωρος του R^n και x διάνυσμα του R^n που δεν ανήκει στον V τότε βρείτε γραμμική απεικόνιση $f : R^n \to R$ ώστε $f(v) = 0$ για κάθε $v \in V$ και $f(x) = 1$.

Απάντηση

Έστω $\{v_1, \ldots, v_k\}$ μία βάση του V, προφανώς $k < n$ αφού $x \notin V$. Τα διανύσματα $\{v_1, \ldots, v_k, x\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (γιατί;). Αν $k = n - 1$ τότε τα n παραπάνω γραμμικώς ανεξ. διανύσματα του R^n αποτελούν βάση του. Αν $k < n - 1$ τότε συμπληρώνουμε τα διανύσματα $\{v_1, \ldots, v_k, x\}$ σε βάση του R^n (αυτό μπορεί να γίνει πάντα, γιατί;). Έστω $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_k, x, w_1, \ldots, w_r\}$ βάση του R^n, με $r = 0, 1, 2, \ldots$. Ορίζουμε τώρα την f πάνω στην βάση $\mathcal{B}$ σαν $f(v_i) = 0$ για $i = 1, \ldots, k$ και $f(x) = f(w_j) = 1$ για $j = 1, \ldots, r$, και επεκτείνουμε γραμμικά σε ολο το R^n. Η f που κατασκευάσαμε έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.

Κεφάλαιο 4
Μήκη και ορθές γωνίες

52. Βρείτε ένα διάνυσμα ορθογώνιο στο χώρο γραμμών του πίνακα A, ένα διάνυσμα ορθογώνιο στο χώρο στηλών, και ένα διάνυσμα ορθογώνιο στο μηδενόχωρο του A όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τα ορθογώνια συμπληρώματα των παραπάνω υποχώρων του A.

Απάντηση

Το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου γραμμών είναι ο μηδενόχωρος του A και το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου στηλών είναι ο αριστερός μηδενόχωρος του. Κάνουμε απαλοιφή Gauss και έχουμε

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς $R(A^t) =< (1,2,0),(0,0,1) >$, $N(A) =< (-2,1,0) >$, και $R(A) =< (1,2,3),(1,3,4) >$. Εύκολα υπολογίζουμε και $N(A^t) =< (-1,-1,1) >$. (Επαληθεύστε!!)
Άρα $R(A^t)^\perp =< (-2,1,0) >$, $R(A)^\perp =< (-1,-1,1) >$ και $N(A)^\perp =< (1,2,0),(0,0,1) >$.

53. Για τον V όπως παρακάτω βρείτε μία βάση του ορθογώνιου συμπληρώματός του.
1) $V = 0 \in R^4$.
2) $V =< (0,-1,0,1) >$.
3) $V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in R^4 \mid x_1+x_2+x_3+x_4 = 0\}$.

Απάντηση

1) $V^\perp = R^4$.
2) Εδώ ο $V^\perp$ αποτελείται από όλα τα διανύσματα $(x,y,z,w) \in R^4$ που το εσωτερικό τους γινόμενο με το διάνυσμα βάσης του V, το $(0,-1,0,1)$, δίνει 0. Επομένως $V^\perp = \{(x,y,z,w) \in R^4 \mid -y+w = 0\} = \{x(1,0,0,0)+y(0,1,0,1)+z(0,0,1,0)\}$. Άρα μία βάση του $V^\perp$ είναι η $\{(1,0,0,0),(0,1,0,1),(0,0,1,0)\}$.
3) Ο V είναι ο μηδενόχωρος του πίνακα $A = [1111]$. Ξέρουμε ότι για κάθε πίνακα A το ορθογώνιο συμπλήρωμα του $N(A)$ είναι ο χώρος γραμμών του A. Επομένως $V^\perp =< (1,1,1,1) >$ και μία βάση του είναι το $(1,1,1,1)$.

54. Εξετάστε εάν τα ακόλουθα είναι αληθή ή ψευδή:
1) Εάν οι V και W είναι μεταξύ τους κάθετοι υπόχωροι του R^n τότε και τα ορθογώνια συμπληρώματα των V και W είναι μεταξύ τους κάθετοι.
2) Εάν ο V είναι κάθετος στον W και ο W κάθετος στον U, τότε ο V είναι κάθετος στον U.
3) Αν $V \subseteq W$ τότε $W^\perp \subseteq V^\perp$.

Απάντηση

1) Λάθος. Για παράδειγμα δείτε τους $V =< (1,0,0) >$ και $W =< (0,1,0) >$. Φανερά ο V είναι κάθετος στον W αλλά $V^\perp =< (0,1,0),(0,0,1) >$ και $W^\perp =< (1,0,0),(0,0,1) >$ που δεν είναι κάθετοι μεταξύ τους (έχουν μη μηδενική τομή).
2) Λάθος. Πάρτε για παράδειγμα V και W όπως στο 1) και $U =< (1,0,1) >$.
3) Σωστό. Αν $x \in W^\perp$ τότε το εσωτερικό γινόμενο $< x,w >= 0$ για κάθε $w \in W$. Αλλά $V \leq W$ άρα $< x,v >= 0$ για κάθε $v \in V$. Επομένως $x \in V^\perp$.

55. Εάν V το ορθογώνιο συμπλήρωμα του W στον R^n, τότε υπάρχει πίνακας A με χώρο γραμμών V και μηδενόχωρο W. Ξεκινώντας με μία βάση του V δείξτε πώς κατασκευάζεται ένας τέτοιος πίνακας.

Απάντηση.
Πάρτε μία βάση $\{v_1, \ldots, v_r\}$ του V και τοποθετήστε τα v_i γραμμές του πίνακα A, συμπληρώστε τον A (αν χρειάζεται, για να γίνει τετραγωνικός) με μηδενικές γραμμές.

56. Βρείτε όλα τα διανύσματα του $\mathbf{R}^3$ που είναι ορθογώνια στα διανύσματα $(1,1,1)$ και $(1,-1,0)$.
Απάντηση. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ τότε ο χώρος γραμμών V του A είναι ο υπόχωρος τοιυ $\mathbf{R}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα $(1,1,1)$ και $(1,-1,0)$. Επομένως το σύνολο όλων των ορθογώνιων διανυσμάτων στα $(1,1,1)$ και $(1,-1,0)$ είναι ο $V^{\perp}$. Άρα ισούται με το μηδενόχωρο $N(A)$ του A. Λύνουμε το ομογενές $AX = 0$ και βρικουμε γενική παραμετρική λύση την $(x,y,z) = z(-3/2,-1/2,1)$ με $z \in \mathbf{R}$. Άρα τα ζητούμενα ορθογώνια διανύσματα είναι της μορφής $z(-3/2,-1/2,1)$ με $z \in \mathbf{R}$ (μια ευθεία στον $\mathbf{R}^3$ που περνάει από το $(-3,-1,2)$. Άλλος τρόπος να σκεφτώ το πρόβλημα (που καταλήγει πάλι στην λύση του παραπάνω ομογενούς) είναι να βρω όλα τα διανύσματα (x,y,z) που το εσωτερικό τους γινόμενο με τα $(1,1,1)$ και $(1,-1,0)$ είναι 0. Δηλαδή όλα τα (x,y,z) που ικανοποιούν $x+y+z=0$ και $x-y=0$.

57. Βρείτε την προβολή του διανύσματος $(7,4)$ πάνω στον υπόχωρο που παράγεται από το διάνυσμα $(1,2)$.
Απάντηση. Εφαρμόστε τον τύπο προβολής $P_v(w) = \frac{<v,w>}{||v||^2} \cdot v$, για $v = (1,2)$ και $w = (7,4)$. Επομένως το ζητούμενο διάνυσμα είναι $3 \cdot (1,2)$.

58.Βρείτε τον πίνακα προβολής που αντιστοιχεί στην προβολή των διανυσμάτων του $\mathbf{R}^2$ πάνω στην ευθεία $3x - 2y = 0$.
Απάντηση. Ένα διάνυσμα της ευθείας είναι το $a = (2,3)^T$. Ο πίνακας προβολής δίνεται σαν $A = \frac{a \cdot a^T}{||a||^2}$, επομένως έχουμε πίνακα προβολής τον $A = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$.

59. Ποιο πολλαπλάσιο του διανύσματος $v_1 = (1,1)$ πρέπει να αφαιρεθεί από το $v_2 = (4,0)$ ώστε το αποτέλεσμα να είναι κάθετο προς το v_1.
Απάντηση
Το $< v_1, v_2 > /||v_1||^2 \cdot v_1 = 4/2(1,1) = (2,2)$. Το κάθετο διάνυσμα είναι το $v_2 - (2,2) = (2,-2)$.

60. Σε κάθε περίπτωση κατασκευάστε ένα πίνακα A με την ζητούμενη ιδιότητα ή δείξτε γιατί αυτό δεν είναι δυνατό.
1) Ο χώρος στηλών περιέχει τα διανύσματα $(1,2,-3)$ και $(2,-3,5)$ και ο μηδενόχωρος περιέχει το $(1,1,1)$.
2) Ο χώρος γραμμών περιέχει τα $(1,2,-3)$ και $(2,-3,5)$ και ο μηδενόχωρος περιέχει το $(1,1,1)$.
3) Η εξίσωση $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ έχει λύση και $A^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
4) Το άθροισμα των στηλών είναι το διάνυσμα $(0,0,0)$ και το άθροισμα των γραμμών είναι το διάνυσμα $(1,1,1)$.

Απάντηση 1) Πάρτε για παράδειγμα τον $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$. Μπορείτε να βρείτε άλλον;
2) Δεν υπάρχει τέτοιος πίνακας. Ο λόγος είναι ότι ο χώρος γραμμών είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του μηδενόχωρου. Επομένως θα έπρεπε το $(2,-3,5)$ να είναι κάθετο στο $(1,1,1)$ που δεν είναι.
3) Δεν υπάρχει τέτοιος πίνακας. Ο λόγος είναι ότι η πρώτη εξίσωση σημαίνει ότι το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ανήκει στο χώρο στηλών $R(A)$ του A, ενώ η δεύτερη συνεπάγεται ότι το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ανήκει στον αριστερό μηδενόχωρο

$N(A^T)$ του A. Αλλά $N(A^T) = R(A)^{\perp}$ επομένως θα έπρεπε τα διανύσματα $(1,1,1)$ και $(1,0,0)$ να είναι κάθετα που δεν είναι.
4) Καταρχήν παρατηρείστε ότι το άθροισμα των στηλών ενός 3 επι 3 πίνακα A είναι το διάνυσμα που δίνεται σαν $A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Επομένως αν το άθροισμα των στηλών του A είναι το $(0,0,0)$ αυτό ισοδυναμεί με το να έχεις το διάνυσμα $(1,1,1)$ στο μηδενόχωρο του A. Αλλά ο μηδενόχωρος του πίνακα είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου γραμμών. Επομένως το διάνυσμα $(1,1,1)$ πρέπει να είναι κάθετο σε κάθε γραμμή του A. Άρα θα είναι κάθετο και στο άθροισμα των γραμμών του A. Αλλά το άθροισμα των γραμμών του A πάλι δίνει το διάνυσμα $(1,1,1)$. Δηλαδή θα έπρεπε το $(1,1,1)$ να είναι κάθετο στον εαυτό του. Αυτο δεν συμβαίνει για κανένα μη μηδενικό διάνυσμα και άρα τέτοιος πίνακας δεν υπάρχει.

61. Βρείτε τρία ορθοκανονικά διανύσματα $v_1, v_2, v_3 \in R^3$, τέτοια ώστε τα v_1, v_2 να παράγουν τον χώρο στηλών του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ποιός θεμελιώδης υπόχωρος του A περιέχει το διάνυσμα v_3;

Απάντηση

Οι στήλες του A είναι γρ. ανεξ. (γιατί;) και άρα παράγουν τον χώρο στηλών του A. Άρα $R(A) =< w_1 = (1,2,-2), w_2 = (1,-1,4) >$. Ορθοκανονικοποιούμε την βάση $\{w_1, w_2\}$ του $R(A)$ και έχουμε $v_1 = (1,2,-2)/3$ και $v_2 = u_2/|u_2|$ όπου $u_2 = w_2 - \frac{<w_1,w_2>}{|w_1|^2} w_1 = (2,1,2)$. Άρα τα $v_1 = 1/3(1,2,-2)$ και $v_2 = 1/3(2,1,2)$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του $R(A)$.

Συμπληρώνουμε σε βάση του R^3 διαλέγοντας το διάνυσμα v_3 από τον $N(A^t)$ (με αυτό τον τρόπο έχουμε την ζητούμενη ορθογωνιότητα χωρίς κόπο). Υπολογίζουμε τον $N(A^t)$ (με απαλοιφή στον A^t) και έχουμε $N(A^t) =< (-2,2,1) >$. Άρα τα διανύσματα

$$v_1 = 1/3(1,2,-2), v_2 = 1/3(2,1,2), v_3 = 1/3(-2,2,1)$$

αποτελούν ορθοκανονική βάση του R^3 ενώ τα v_1, v_2 είναι βάση του χώρου στηλών του A.

62. Εάν A είναι ένας m επί n πίνακας και $b \in R^m$, τότε ένα και μόνο ένα από τα επόμενα ισχύει
1)Το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση
2)Υπάρχει $y \in R^m$ μη κάθετο στο b ώστε $A^t y = 0$.

Απάντηση

Το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση αν και μόνο αν το διάνυσμα b ανήκει στο χώρο στηλών του A, δηλ. $b \in R(A)$. Όπως ξέρουμε $R(A)^{\perp} = N(A^t)$ και $N(A^t)^{\perp} = R(A)$. Άρα $b \in R(A)$ αν και μόνο αν το b είναι κάθετο στον $N(A^t)$ δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $y \in N(A^t)$ το b είναι κάθετο στο y. Επομένως είτε υπάρχει $y \in N(A^t)$ (και άρα $A^t y = 0$) που δεν είναι κάθετο στο b είτε κάθε $y \in N(A^t)$ είναι κάθετο στο b (και άρα $b \in R(A)$).

63. Εφαρμόστε την διαδικασία Gram-Schmidt στα διανύσματα $(1,-1,0)$, $(0,1,-1)$ και $(1,0,-1)$ για να βρείτε ορθοκανονική βάση του επιπέδου $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Πόσα μη μηδενικά διανύσματα προκύπτουν από αυτή την διαδικασία;

Απάντηση

Αν $v_1 = (1,-1,0), v_2 = (0,1,-1)$ και $v_3 = (1,0,-1)$ τότε είναι φανερα διανύσματα του δοσμένου επιπέδου E αφού ικανοποιούν την εξίσωσή του. Το επίπεδο είναι διδιάστατο επομένως δεν ειναι και τα τρία ανεξάρτητα (παραγματικά $v_3 = v_1 + v_2$). Εφαρμόσουμε Gram-Schmidt και έχουμε $u_1 = v_1$ και

$$u_2 = v_2 - \frac{< v_2, u_1 >}{|u_1|^2} u_1 = 1/2(1,1,-1)$$

ενώ

$$u_3 = v_3 - \frac{< v_3, v_1 >}{|v_1|^2} v_1 - \frac{< v_3, u_2 >}{|u_2|^2} u_2 = (1,0,-1) - 1/2(1,-1,0) - 1/2(1,1,-2) = (0,0,0).$$

Επομένως η ζητούμενη ορθοκανονική βάση του επιπέδου είναι η

$$w_1 = 1/\sqrt{2}(1,-1,0),\ w_2 = 1/\sqrt{3}(1,1,-1).$$

64. Έστω $V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in R^4 \mid x_1 = 2x_2, x_3 = x_4\}$. Βρείτε ορθοκανονική βάση για τον V και τον $V^\perp$.

Απάντηση

Τα διανύσματα του V ικανοποιούν $(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_2(2,1,0,0) + x_3(0,0,1,1)$. Επομένως τα διανύσματα $v_1 = (2,1,0,0)$ και $v_2 = (0,0,1,1)$ αποτελούν βάση του V. Είναι φανερό ότι τα v_1, v_2 είναι ορθογώνια και επομένως μία ορθοκανονική βάση του V είναι η $\{w_1 = 1/\sqrt{3}(2,1,0,0), w_2 = 1/\sqrt{2}(0,0,1,1)\}$.
Δείτε επίσης ότι ο V είναι ο μηδενόχωρος του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Άρα ο $V^\perp$ είναι ο χώρος γραμμών του πίνακα. Επομένως μία βάση του $V^\perp$ είναι η $\{(1,-2,0,0),(0,0,1,-1)\}$. Παρατηρούμε ότι τα δύο διανύσματα είναι ορθογώνια μεταξύ τους και άρα μία ορθοκανονική βάση του $V^\perp$ είναι η $\{1/sqrt3(1,-2,0,0), 1/\sqrt{2}(0,0,1,-1)\}$.

Κεφάλαιο 5
Ορίζουσες

65. Βρείτε τις ορίζουσες των παρακάτω πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 101 & 201 & 301 \\ 102 & 202 & 302 \\ 103 & 203 & 303 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & 1 & t^2 \\ t^2 & t & 1 \end{bmatrix}.$$

Απάντηση

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{bmatrix} = (b-a)(c-b)(c-a)$$

Ανάλογα έχουμε

$$\det B = \det \begin{bmatrix} 101 & 201 & 301 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 101 & 201 & 301 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{και } \det C = \det \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & 1 & t^2 \\ t^2 & t & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1+t+t^2 & t & t^2 \\ 1+t+t^2 & 1 & t^2 \\ 1+t+t^2 & t & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= (1+t+t^2)\cdot \det \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \\ 1 & 1 & t^2 \\ 1 & t & 1 \end{bmatrix} = (1+t+t^2)\cdot \det \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t^2 \end{bmatrix} = (1+t+t^2)\cdot(1-t)\cdot(1-t^2).$$

66. Για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

εφαρμόστε απαλοιφή Gauss για να υπολογίσετε την ορίζουσα $|A|$. Υπολογίστε επίσης τις $|A^5|, |3A|, |A^t|$. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος υπολογίστε και την $|A^{-1}|$.

Απάντηση

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \ldots = -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -6.$$

Επίσης $\det A^5 = (-6)^5$, $\det(3A) = 3^4(-6)$ και $\det(A^T) = \det A = -6$. Ο A είναι αντιστρέψιμος αφού η ορίζουσά του δεν είναι μηδέν και $\det(A^{-1}) = -1/6$.

67. Είναι τα ακόλουθα Σωστά ή Λάθος;
1) Η ορίζουσα του πίνακα $S^{-1}AS$ ισούται με την ορίζουσα του A.
2) Αν $|A| = 0$ τότε τουλάχιστον ένας από τους συμπαράγοντες είναι 0.

3) Ένας πίνακας με στοιχεία 0 και 1 έχει ορίζουσα 1,0,ή -1.

Απάντηση

1)Σωστό αφού $|S^{-1}AS| = |S^{-1}||A||S| = 1/|S||A||S| = |A|$.

2)Λάθος, δες π.χ τον $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3)Λάθος για παράδειγμα ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ έχει ορίζουσα 2.

68.Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$ όπου a, b, c σταθερές.

1) Δείξτε ότι ο A είναι αντισυμμετρικός, δηλαδή ότι $A^T = -A$.

2) Δείξτε ότι $|A| = 0$.

3) Βρείτε ένα παράδειγμα αντισυμμετρικού A 4 επί 4 ώστε η ορίζουσα του να είναι διάφορη του 0.

Απάντηση

1) Φανερό.

2) Πράξεις ή καλύτερα δείτε ότι $|A^T| = |A|$ αλλά και $|A^T| = |-A| = (-1)^3|A| = -|A|$. Άρα $|A| = -|A|$ και επομένως $|A| = 0$.

3) Πάρτε για παράδειγμα τον $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

69. Βρείτε τον πίνακα συμπαραγόντων τον συζυγή και τον αντίστροφο του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Απάντηση

Πίνακας συμπαραγόντων είναι ο

$$C = \begin{bmatrix} -7 & 8 & -4 \\ 9 & -9 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο συζυγής είναι ο $adjA = C^T = \begin{bmatrix} -7 & 9 & 1 \\ 8 & -9 & -2 \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ και ο αντίστροφος του A δίνεται σαν

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} adjA = \frac{1}{-3} \cdot \begin{bmatrix} -7 & 9 & 1 \\ 8 & -9 & -2 \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

όπου $detA = |A| = -3$.

70. Βρείτε την ορίζουσα του

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

καθώς και του $n \times n$ πίνακα $B = [b_{i,j}]$ όπου $b_{i,j} = i + j$.

Απάντηση
Πράξεις και απαλοιφή Gauss για να εμφανιστούν αρκετά μηδενικά....

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

Για τον B_n έχουμε $|B_1| = 2$ και $|B_2| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1$. Για $n \geq 3$ εχουμε

$$|B_n| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & \dots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n+2 \\ & & \ddots & & \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & n+n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & \dots & n+1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & \ddots & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Η τελευταία ορίζουσα είναι 0 γιατί έχει δυο γραμμές ίδιες.

71.Χρησιμοποιήστε τον κανόνα Cramer για να λύσετε το σύστημα

$$\begin{aligned} x + 4y - z &= 1 \\ x + y + z &= 0 \\ 2x + 3z &= 0. \end{aligned}$$

Απάντηση Σύμφωνα με τον κανόνα Cramer έχουμε

$$x = \frac{|B_1|}{|A|},\ y = \frac{|B_2|}{|A|} \text{ και } z = \frac{|B_3|}{|A|}.$$

όπου A είναι ο πίνακας συντελεστών του συστήματος, δηλ. ο $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ και άρα $|A| = 1$. Επίσης $B_1 == \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ και άρα $|B_1| = 3$. Ανάλογα έχουμε $B_2 == \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ και άρα $|B_2| = -1$ ενώ $B_3 == \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ και άρα $|B_3| = -2$. Επομένως $x = 3, y = -1, z = -2$.

72. Αν τα στοιχεία του τετραγωνικού πίνακα A είναι ακέραιοι και $|A| = \pm 1$ δείξτε ότι και τα στοιχεία του A^{-1} είναι ακέραιοι.
Απάντηση
Παρατηρήστε ότι ο συζυγής $adjA$ ενός πίνακα A με ακέραιες τιμές έχει επίσης ακέραιες τιμές (αφού οι τιμές του $adjA$ προέρχονται από προσθαφαιρέσεις και πολ/μους στοιχείων του A). Επίσης $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA = \pm 1 adjA$. Επομένως τα στοιχεία του A^{-1} είναι ακέραιοι.

73. Εξηγήστε γιατί το σημείο (x, y) περιέχεται στην ευθεία που ορίζουν τα σημεία $(2, 8)$ και $(4, 7)$ όταν

$$det \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} = 0 \text{ ή } x + 2y - 18 = 0.$$

Απάντηση

Το σημείο (x, y) περιέχεται στην ευθεία που ορίζουν τα σημεία $(2, 8)$ και $(4, 7)$ αν και μόνο αν τα τρία σημεία δεν φτιαχνουν τρίγωνο, ισοδύναμα αν και μόνο αν το εμβαδόν του τριγώνου που φτιάχνουν είναι 0. Τα τρία σημεία φτιάχνουν τα διανύσματα $v_1 = (x, y) - (4, 7) = (x - 4, y - 7)$ και $v_2 = (2, 8) - (4, 7) = (-2, 1)$. Παρατηρήστε ότι το τρίγωνο που φτιάχνουν τα παραπάνω 3 σημεία έχει εμβαδό 0 (δηλ. συνευθειακά) αν κα μονο αν το εμβαδό του παρ/μου με πλευρές τα V_1, v_2 είναι 0. Το εμβαδό του παρα/μου είναι ίσο με την ορίζουσα $\begin{vmatrix} x-4 & y-7 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$.
Επίσης δείτε ότι

$$det \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} x-4 & y-7 & 0 \\ 2-4 & 8-7 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot det \begin{bmatrix} x-4 & y-7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άρα τα τρία σημεία είναι συνευθειακά ακριβώς όταν η ορίζουσα $det \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ μηδενίζεται.

Κεφάλαιο 6
Ιδιοτιμές

74. Βρείτε τις ιδιοτιμές και αντίστοιχους ιδιόχωρους για τους πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Απάντηση Για τις ιδιοτιμές υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα $A - \lambda I_3$. Έτσι έχουμε

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda).$$

Άρα ιδιοτιμές του A είναι οι 3, 1, 0 (όλες με αλγεβρική πολ/τα 1).
Ιδιόχωροι:
Για $\lambda = 3$.
Λύνουμε το ομογενές $(A - 3I_3)x = 0$. Επομένως πίνακας συντελεστών του ομογενους είναι ο $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ και γενική παραμετρική λύση του η $(x, y, z) = x(1, 0, 0)$ με $x \in \mathbf{R}$. Επομένως ιδιόχωρος για $\lambda = 3$ είναι ο $\{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbf{R}\}$ και μια βάση του είναι το διάνυσμα $(1, 0, 0)$.
Για $\lambda = 1$.
Λύνουμε το ομογενές με πίνακα συντελεστών τον $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$. Η διανυσματική του λύση και άρα ο ιδιόχωρος για την ιδιοτιμή $\lambda = 1$ είναι $\{y(-2, 1, 0) \mid y \in \mathbf{R}\}$. Μια βάση για τον ιδιόχωρο είναι το $(-2, 1, 0)$.
Για $\lambda = 0$. Λύνουμε το ομογενές με πίνακα συντελεστών τον $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. Η διανυσματική του λύση και άρα ο ιδιόχωρος για την ιδιοτιμή $\lambda = 0$ είναι $\{z(2, -2, 1) \mid z \in \mathbf{R}\}$. Μια βάση για τον ιδιόχωρο είναι το $(2, -2, 1)$.

Για τον B δουλεύουμε ανάλογα. Έτσι έχουμε χαρακτηριστικό πολυώνυμο του B το $\chi_B(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 2)$ και ιδιοτιμές τις 2 και -2 με αλγεβρική πολ/τα 2 και 1 αντίστοιχα. Οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι είναι $V_1 = \{(x, y, z) = y(0, 1, 0) + z((1, 0, 1)\ x, z \in \mathbf{R}\}$ και $V_2 = \{(x, y, z) = z(-1, 0, 1)\ z \in \mathbf{R}\}$.

75. Δείξτε ότι ο A παραπάνω μπορεί να διαγωνιοποιηθεί και βρείτε R ώστε $R^{-1}AR = D$ διαγώνιος. Έπειτα υπολογίστε τον A^{60}.
Απάντηση. Ο τυχαίος $n \times n$ πίνακας A διαγωνιοποιείται αν και μόνο αν έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. (Υπενθύμιση: ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι πάντα γραμ. ανεξάρτητα). Επομένως ο A διαγωνιοποιείται και ο ζητούμενος R (έχει στήλες τα γραμ. ανεξ. ιδιοδιανύσματα του A) είναι ο $R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Επίσης $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Αφού $R^{-1} \cdot A \cdot R = D$ ισχύει $A = R \cdot D \cdot R^{-1}$ και επομένως $A^{60} = R \cdot D^{60} \cdot R^{-1}$ με $D^{60} = \begin{bmatrix} 3^{60} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{60} & 0 \\ 0 & 0 & 0^{60} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^{60} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

76. Δείξτε ότι οι ιδιοτιμές του ανάστροφου πίνακα A^T είναι ίσες με τις ιδιοτιμές του A.
Απάντηση. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας. Τότε (βεβαιωθείτε ότι καταλαβαίνετε όλες τις παρακάτω ισότητες) $\chi_{A^T}(\lambda) = \det(A^T - \lambda I_n) = \det(A^T - \lambda I_n^T) = \det[(A - \lambda I_n)^T] = \det(A - \lambda I_n) = \chi_A(\lambda)$. Επομένως οι A και A^T έχουν ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο άρα και ίδιες ιδιοτιμές.

77. Ποιοί από τους επόμενους πίνακες διαγωνιοποιούνται;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Απάντηση. Ο τυχαίος $n \times n$ πίνακας A διαγωνιοποιείται αν και μόνο αν έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Επομένως ο A δεν διαγωνιοποιείται (τα ιδιοδιανύσματά του είναι όλα πολ/σια του $(1,1)$).
Ο B διαγωνιοποιείται στον $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ μέσω του $R = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (γιατί;)
Ο C επίσης δεν διαγωνιοποιείται (όλα τα ιδιοδιανύσματά του είναι πολ/σια του $(0,1)$).

78. Αν οι ιδιοτιμές ενός 3 επί 3 πίνακα A είναι οι 1, 2, 4 βρείτε το ίχνος του A^2 και την ορίζουσα του $(A^{-1})^T$.
Απάντηση Καταρχήν παρατηρήστε ότι αν ο πίνακας A έχει ιδιοτιμή λ με αντίστοιχο μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα v τότε ο A^2 έχει ιδιοτιμή την λ^2 με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα πάλι το v. Αυτό ισχύει γιατί έχουμε:

$$A^2v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda A v = \lambda\lambda v.$$

Επομένως ιδιοτιμές του A^2 είναι τα $1, 2^2 = 4$ και $4^2 = 16$. Άρα το ίχνος του A^2 ισούται με $1 + 4 + 16 = 21$.
Για την ορίζουσα του $(A^{-1})^T$ έχουμε $|(A^{-1})^T| = |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$. Αλλά $|A| = 1 \cdot 2 \cdot 4$ (γινόμενο των ιδιοτιμών του πίνακα (με πολ/τα)). Άρα $|(A^{-1})^T| = 1/8$.

79. Βρείτε τον 2×2 πίνακα A του οποίου οι ιδιοτιμές είναι τα 1 και 4 και τα ιδιοδιανύσματα είναι $(3,1)$ και $(2,1)$ αντιστοίχως.
Απάντηση. Ο πίνακας A διαγωνοποιείται (γιατί;). Μάλιστα για $R = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ και $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ΄έχουμε $R^{-1}AR = D$ και επομένως

$$A = RDR^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 18 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}.$$

80. Σωστό η Λάθος
Αν ο μιγαδικός πίνακας A έχει μοναδικά ιδιοδιανύσματα τα πολ/σια του $(1,0,0)$, τότε
1) Ο A δεν αντιστρέφεται
2) Ο A έχει μια πολλαπλη ιδιοτιμή
3) Ο A δεν διαγωνιοποιείται.
Απάντηση. 1) Λάθος, εξαρτάται από την ιδιοτιμή του A. Για παράδειγμα ο $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος και έχει μοναδικά ιδιοδιανύσματα τα πολ/σια του $(1,0,0)$ (αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 1 (αλγεβρικής πολ/τας 3). Ενώ ο $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμος έχει μοναδικά ιδιοδιανύσματα τα πολ/σια του $(1,0,0)$ (αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 0 (αλγεβρικής πολ/τας 3).
2) Σωστό. Αφου το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι 3ου βαθμού έχει 3 ρίζες-ιδιοτιμές και για κάθε διαφορετική ιδιοτιμή έχζουμε γρμ. ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Άρα αφού ο A έχει 1 γραμ. ανεξάρτητο ιδιοδιάνυσμα, έχει μοναδική ιδιοτιμη με αλγεβρ. πολ/τα 3.
3) Σωστό, χρειάζεται 3 γραμ. ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

81. Σωστό η Λάθος
Αν ο 3 επί 3 πίνακας A έχει ιδιοτιμές τα 1, 1, 2 τότε
1) Ο πίνακας αντιστρέφεται
2) Ο πίνακας διαγωνιοποιειται
3) Ο πίνακας δεν διαγωνιοποιείται.
Απάντηση. 1) Σωστό, αφού οι ιδιοτιμές του είναι όλες διάφορες του 0 (και άρα....)

2) Λάθος, για παράδειγμα ο $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ δεν διαγωνοποιειται (γιατί;)

3) Λάθος, για παράδειγμα ο $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ είναι ήδη διαγώνιος με ιδιοτιμές τις 1, 1, 2.