ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ –ΤΜΗΜΑ Α

Θ. Γαρεφαλάκης- Μ. Λουκάκη

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 15'.Φεύγοντας, παραδίνετε τα γραπτά, το πρόχειρο και τα θέματα. Επίσης οι τσάντες και τα κινητά σας πρέπει να είναι μπροστά στον πίνακα και όχι δίπλα σας ή πάνω σας.

Θέμα 1(20)

Ποιά από τις παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμική;

1. $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : T_1(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, e^{x_1})$
2. $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 : T_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3, 2x_1, 0)$
3. $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : T_4(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3 \cdot x_2, x_1 - x_3)$

Για αυτή που είναι γραμμική (T) δώστε τον πίνακα της απεικόνισης.
Επίσης για την γραμμική T, υπολογίστε την διάσταση του πυρήνα της $\mathrm{Ker}(T)$ και της εικόνα της $\mathrm{Im}(T)$.
Δώστε μια βάση για την εικόνα $\mathrm{Im}(T)$.

Θέμα 2(20)

Δίδεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

και τα διανύσματα $x = (x, y, z)^t$ και $b = (1, \lambda, \lambda^2)^t$.

1. Για ποιές τιμές του λ έχει ο πίνακας A τάξη 1; τάξη 2; τάξη 3;
2. Για ποιές τιμές του λ έχει το σύστημα $AX = b$ λύση; (Δεν ζητάω να βρείτε την λύση.)

Θέμα 3(20)

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και μιά βάση για κάθε ιδιόχωρο του πίνακα A. Είναι ο A διαγωνιοποιήσιμος;

Θέμα 4(20)

Βρείτε 3 ορθοκανονικά διανύσματα v_1, v_2, v_3 του $\mathbb{R}^3$ ώστε τα v_1, v_2 να αποτελούν βάση του χώρου γραμμών του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Θέμα 5(30)

Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις εξετάστε εάν είναι αληθής ή ψευδής. Δικαιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.

1. Αν A, B, C είναι αντιστρέψιμοι πίνακες τότε και ο $(A + B)C$ είναι αντιστρέψιμος.
2. Αν A είναι ένας 4 επί 3 πίνακας και v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ τότε και τα Av_1, Av_2, Av_3 είναι γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα του $\mathbb{R}^4$.
3. Αν τα u, v είναι ορθογώνια διανύσματα τότε και τα $u + v, u - v$ είναι ορθογώνια.
4. Το σύνολο των διανυσμάτων $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y \geq 0\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.
5. Κάθε 2 επί 2 πίνακας διαγωνιοποιείται.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Ιανουάριος 2018

Μ. Λουκάκη
Θ. Γαρεφαλάκης

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ – Τμήμα Β

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 15 λεπτά. Φεύγοντας, παραδίνετε τα γραπτά, το πρόχειρο και τα θέματα. Επίσης, δε θα πρέπει να έχετε κοντά σας τσάντα ή κινητό τηλέφωνο (έστω και απενεργοποιημένο).

Θέμα 1 (25 μον.)
Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$L(x, y, z, w) = (x + y + z + t^2 w, y + 3z + tw, -x + tz - 2w).$$

1. Βρείτε τον πίνακα της γραμμικής απεικόνισης.
2. Εξετάστε για ποιές τιμές της παραμέτρου $t \in \mathbb{R}$ είναι η L επί.
3. Επιλέξτε μια τιμή του t για την οποία η L δεν είναι επί και γι αυτή την τιμή βρείτε μία βάση του πυρήνα και μία βάση της εικόνας της L.

Θέμα 2 (20 μον.)
Δίνεται ο υπόχωρος $U = \langle (1, 1, 0) \rangle$ του $\mathbb{R}^3$.

1. Βρείτε μία βάση του $U^{\perp}$.
2. Γράψτε το διάνυσμα $(1, 2, 3)$ ως άθροισμα $u + w$ με $u \in U$ και $w \in U^{\perp}$.

Θέμα 3 (20 μον.)
Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και μιά βάση για κάθε ιδιόχωρο του πίνακα A. Είναι ο A διαγωνιοποιήσιμος;

Θέμα 4 (20 μον.)
Έστω ο πίνακας $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ με την ιδιότητα $\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A)$.

1. Δείξτε ότι το n είναι άρτιος και $\dim \mathcal{R}(A) = n/2$.
2. Δείξτε ότι $\mathcal{N}(A^t) = \mathcal{R}(A^t)$.
3. Δείξτε ότι υπάρχουν $n/2$ στήλες, $u_1, \ldots, u_{n/2}$ και $n/2$ γραμμές $v_1, \ldots, v_{n/2}$ του A τέτοιες ώστε το $\{u_1, \ldots, u_{n/2}, v_1, \ldots, v_{n/2}\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$.

Θέμα 5 (25 μον.)
Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις εξετάστε εάν είναι αληθής ή ψευδής. Δικαιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.

1. Στον $\mathbb{R}^5$ υπάρχουν υπόχωροι U, V, με $\dim U = \dim V = 3$ τέτοιοι ώστε κάθε διάνυσμα του U είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα του V.
2. Υπάρχει πίνακας $A \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε $(1, 2, 3, 0) \in \mathcal{N}(A)$ και οι τρεις πρώτες στήλες του A είναι βάση του $\mathcal{R}(A)$.
3. Αν ένα γραμμικό σύστημα έχει περισσότερες μεταβλητές από εξισώσεις τότε αποκλείεται να έχει μοναδική λύση.
4. Υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας A ο οποίος έχει ιδιοτιμή το 0.