Απειροστικός I (Τμήμα Α)

Διαγώνισμα Εξεταστικής Ιανουαρίου 2017
Διάρκεια 2.5 ώρες. Μπορείτε να φύγετε μετά μία ώρα.
Δεν επιτρέπεται να έχετε ηλεκτρονικές συσκευές δίπλα σας ή πάνω σας.[1]
Παρακαλώ αφήστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!

(**1**) (2 μονάδες) (*i*) Υπολογίστε τα όρια των ακολουθιών

$$x_n = \sqrt[n]{2^n + n^2}, \qquad y_n = \frac{\sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots + n^n}}{n}.$$

(*ii*) Δείξτε ότι η ακολουθία (x_n) που ικανοποιεί $x_1 = 2$ και $x_{n+1} = \sqrt{2x_n - 1}$, $n \in \mathbb{N}$, συγκλίνει και υπολογίστε το όριο της.

(**2**) (2 μονάδες) Εξετάστε για ποιά $a > 0$ συγκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^a \log n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{2n} \frac{1}{t^a + 1}\, dt.$$

(**3**) (1.5 μονάδες) Έστω P πολυώνυμο. Δείξτε ότι η εξίσωση

$$-\log x = |P(x)|$$

έχει τουλάχιστον μία θετική πραγματική λύση.

(**4**) (1.5 μονάδες) (*i*) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί $f'(x) = 2xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = ce^{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(*ii*) Βρείτε όλες τις συνεχείς $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν $f(x) = \int_0^{x^2} f(\sqrt{t})\, dt + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(**5**) (1.5 μονάδες) (*i*) Δείξτε ότι για κάθε $x, y \in [0, 1]$ ισχύει $|e^x - e^y| \le e|x - y|$.

(*ii*) Δείξτε ότι για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει $e^x \le 1 + x + \frac{e}{2}x^2$.

(**6**) (2.5 μονάδες) (*i*) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1}{x^2 - 1}\, dx, \qquad \int_{-1}^{1} \frac{x^9}{x^{10} + 1}\, dx, \qquad \int \cos(\log x)\, dx.$$

(*ii*) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1}\, dx, \qquad \int_0^1 \log x\, dx.$$

---

[1] Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση **αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής** επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο **αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα** του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Απειροστικός Ι (Τμήμα Α)

Διαγώνισμα Εξεταστικής Σεπτέμβρη 2017
Διάρκεια 2.5 ώρες. Μπορείτε να φύγετε μετά μία ώρα.
Δεν επιτρέπεται να έχετε ηλεκτρονικές συσκευές δίπλα σας ή πάνω σας.[1]
Παρακαλώ αφήστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!

(**1**) (2 μονάδες) (*i*) Υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{[\log n]}{\sqrt{n}}.$$

(*ii*) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την ακολουθία (x_n) που ικανοποιεί $x_1 = 2$ και $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

(**2**) (1.5 μονάδες) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n^2}}{\sqrt{n}}.$$

(**3**) (2 μονάδες) (*i*) Βρείτε την τιμή του a για την οποία η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x)-x}{x^2} & x \neq 0, \\ a & x = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο 0.

(*ii*) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right)$.

(**4**) (1.5 μονάδες) (*i*) Έστω $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί $f(0) = f(1)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [0,1]$ ώστε $f(\xi) = f\left(\xi + \frac{1}{2}\right)$.

(*ii*) Έστω $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί $f(0) = f(1) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [0,1]$ ώστε $f'(\xi) = f(\xi)$.

(**5**) (2 μονάδες) Υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right), \qquad \lim_{n\to\infty} e^{-n^2}\int_0^n e^{t^2}\,dt.$$

(**6**) (2 μονάδες) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα (το τρίτο ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο)

$$\int_0^1 \log(x^2+1)\,dx, \qquad \int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx, \qquad \int_0^1 \log x\,dx.$$

---

[1]Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση **αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής** επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο **αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα** του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.