ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2018 ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι
Διδάσκων: Κ. Αθανασόπουλος

ΘΕΜΑ 1ο. (2) Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία αύξουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $a_{nm} \geq n \cdot a_m$ για κάθε n, $m \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί οτι

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \sup\Big\{\frac{a_n}{n} : n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Απάντηση: Εστω $m \in \mathbb{N}$ οποιοσδήποτε. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν μοναδικοί k_n, $r_n \in \mathbb{Z}^+$ ώστε $n = mk_n + r_n$ και $0 \leq r_n < m$. Από τις υποθέσεις μας προκύπτει τώρα οτι

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_{mk_n+r_n}}{mk_n+r_n} \geq \frac{a_{mk_n}}{mk_n+r_n} \geq \frac{k_n a_m}{mk_n+r_n} = \frac{a_m}{m+\frac{r_n}{k_n}}.$$

Αφού $k_n = \dfrac{n}{m} - \dfrac{r_n}{m} \to +\infty$, συμπεραίνουμε οτι

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} \geq \frac{a_m}{m}$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} \geq \sup\{\frac{a_m}{m} : m \in \mathbb{N}\} \geq \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} \geq \liminf_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n}.$$

ΘΕΜΑ 2ο. (2) Εστω $f : [0,1] \to [0,1]$ μία συνεχής συνάρτηση και $0 \leq a_1 \leq 1$. Θέτουμε $a_{n+1} = f(a_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(α) Αν η f είναι αύξουσα συνάρτηση, να αποδειχθεί οτι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει μονότονα σε κάποιο όριο $\xi \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$.
(β) Αν η f είναι φθίνουσα συνάρτηση, να αποδειχθεί οτι οι υπακολουθίες $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ και $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουν μονότονα. Επιπλέον, αν $\xi = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n-1}$ και $\zeta = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n}$, τότε $f(\xi) = \zeta$ και $f(\zeta) = \xi$.
(γ) Αν $x_1 = \dfrac{1}{2}$ και $x_{n+1} = (1 - x_n)^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, να ευρεθούν τα σημεία συσσώρευσης του συνόλου $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Συγκλίνει η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

Απάντηση: (α) Επειδή η f υποτίθεται οτι είναι αύξουσα, αν $a_1 \leq a_2$, τότε επαγωγικά $a_n \leq a_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή η ακολουθία είναι αύξουσα. Για τον ίδιο λόγο, αν $a_1 \geq a_2$, τότε η ακολουθία είναι φθίνουσα. Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση είναι μονότονη και ως φραγμένη συγκλίνει σε κάποιο $\xi \in [0,1]$. Από τη συνέχεια της f έχουμε $f(\xi) = \xi$.
(β) Αν η f είναι φθίνουσα, τότε η $f \circ f$ είναι αύξουσα. Αφού $a_{n+2} = f(f(a_n))$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπως στο (α) οι υπακολουθίες $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ και $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μονότονες και ως φραγμένες συγκλίνουν σε όρια $\xi = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n-1}$ και $\zeta = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n}$. Από τη συνέχεια της f έχουμε $f(\xi) = \zeta$ και $f(\zeta) = \xi$.
(γ) Εφαρμόζεται το (β) για τη γνήσια φθίνουσα συνεχή συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,1]$ με $f(x) = (1-x)^2$. Εδώ έχουμε

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}, \quad x_3 = f(\frac{1}{4}) = \frac{9}{16} > \frac{1}{2} \quad \text{και } x_4 = f(\frac{9}{16}) = \frac{49}{256} < \frac{1}{4}.$$

Συνεπώς, η υπακολουθία $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνήσια φθίνουσα, ενώ η $(x_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνήσια αύξουσα και

$$0 \leq \zeta < \cdots < x_4 < x_2 < \frac{1}{2} = x_1 < x_3 < \cdots < \xi \leq 1,$$

όπου $\xi = \lim_{n\to+\infty} x_{2n-1}$ και $\zeta = \lim_{n\to+\infty} x_{2n}$. Από αυτό προκύπτει οτι το σύνολο $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ έχει ακριβώς δύο σημεία συσσώρευσης, τα ζ και ξ, και η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει. Επειδή $\zeta = (1-\xi)^2$ και $\xi = (1-\zeta)^2$, αφαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε οτι

$$\zeta - \xi = (1-\xi)^2 - (1-\zeta)^2 = (\zeta - \xi)(2 - \xi - \zeta)$$

οπότε $\zeta + \xi = 1$. Αντικαθιστώντας έχουμε $1 - \zeta = (1-\zeta)^2$ και αφού $0 \leq \zeta < \frac{1}{2}$, προκύπτει οτι $\zeta = 0$ και $\xi = 1$.

ΘΕΜΑ 3ο. (2,5) (α) Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες στο $\mathbb{R}$ με $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, που έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:
(i) Η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.
(ii) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

Να αποδειχθεί οτι $\lim_{n\to+\infty} a_n \sum_{k=1}^{n} b_k = 0$.

(β) Να αποδειχθεί οτι $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 0$ για κάθε $p > 0$.

Απάντηση: (α) Εστω $\epsilon > 0$. Από την υπόθεση (ii) και το Θεώρημα του Cauchy, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$0 \leq \sum_{k=n_0}^{n} a_k b_k < \epsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$. Από την υπόθεση (i) έχουμε όμως

$$\sum_{k=n_0}^{n} a_k b_k \geq a_n \sum_{k=n_0}^{n} b_k = a_n \sum_{k=1}^{n} b_k - a_n \sum_{k=1}^{n_0-1} b_k$$

για κάθε $n > n_0$. Συνεπώς,

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k < \epsilon + a_n \sum_{k=1}^{n_0-1} b_k$$

και επειδή $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, από την υπόθεση (i), προκύπτει οτι

$$0 \leq \limsup_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \epsilon$$

για κάθε $\epsilon > 0$. Αυτό σημαίνει οτι

$$0 \leq \liminf_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \limsup_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 0.$$

(β) Εφαρμόζουμε το (α) για $a_n = \dfrac{1}{n^p}$ και $b_n = \dfrac{1}{n}$.

ΘΕΜΑ 4ο. (2) Εστω $p > 0$, $q > 0$ και $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$f(x) = \frac{(\log x)^p}{x^q}.$$

(α) Να ευρεθούν τα ανοιχτά υποδιαστήματα του $(1, +\infty)$ στα οποία η f είναι γνήσια μονότονη και να καθοριστεί το είδος της μονοτονίας.
(β) Να αποδειχθεί οτι $0 < f(x) \leq \left(\dfrac{p}{qe}\right)^p$ για κάθε $x > 1$.
(γ) Να αποδειχθεί οτι η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(\log n)^p}{n^q}$$

συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

Απάντηση: (α) Η f είναι διαφορίσιμη (μάλιστα C^∞) συνάρτηση και

$$f'(x) = \frac{1}{x^{2q}}\left[p(\log x)^{p-1}\frac{1}{x}x^q - (\log x)^p q x^{q-1}\right] = \frac{1}{x^{q+1}}(\log x)^{p-1}[p - q\log x]$$

για κάθε $x > 1$. Συνεπώς, η f είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα $(1, e^{p/q})$ και είναι γνήσια φθίνουσα στο διάστημα $(e^{p/q}, +\infty)$.
(β) Από το (α) προκύπτει οτι η f παίρνει μέγιστη τιμή στο $e^{p/q}$, που είναι η $f(e^{p/q}) = \left(\dfrac{p}{qe}\right)^p$.
(γ) Επειδή $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^{q/p}} = 0$, έχουμε και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\log x}{x^{q/p}}\right)^p = 0.$$

Από αυτό και το (α) συμπεραίνουμε οτι η ακολουθία $\left(\dfrac{(\log n)^p}{n^q}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τελικά γνήσια φθίνουσα και συγκλίνει στο 0. Συνεπώς, εφαρμόζεται το κριτήριο του Leibniz για την εναλλάσουσα σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(\log n)^p}{n^q}$$

η οποία, σύμφωνα με αυτό, συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 5ο. (2,5) Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ μία διαφορίσιμη συνάρτηση για την οποία υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f'(x)| \leq M|f(x)|$ για κάθε $x \in I$. Αν υπάρχει $a \in I$ τέτοιο ώστε $f(a) = 0$, να αποδειχθεί οτι $f = 0$.

Απάντηση: Θεωρούμε το σύνολο

$$T = \{x \in I : x \geq a \quad \text{και } f(y) = 0 \quad \text{για κάθε } a \leq y \leq x\}.$$

Θα δείξουμε με απαγωγή στο άτοπο οτι $T = \{x \in I : x \geq a\}$. Εστω λοιπόν οτι αυτό δεν ισχύει, δηλαδή υπάρχει κάποιο $b \in I$ τέτοιο ώστε $b > a$ και $f(b) \neq 0$. Τότε το T είναι άνω φραγμένο σύνολο (το b είναι ένα άνω φράγμα του). Προφανώς, $T \neq \varnothing$, αφού $a \in T$. Από την πληρότητα του $\mathbb{R}$ υπάρχει το $t = \sup T \in \mathbb{R}$. Αφού $a \leq t \leq b$ και $[a, b] \subset I$, επειδή το I είναι διάστημα, έχουμε $t \in I$ και επιπλέον $f(t) = 0$, από τη συνέχεια της f. Από τον ορισμό του t, έχουμε επίσης

$$N(s) = \sup\{|f(x)| : t \leq x \leq s\} > 0$$

για κάθε $s \in I$ με $t < s$. Επιλέγουμε ένα $s \in I$ με $0 < s - t < \dfrac{1}{2M}$. Από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής, για κάθε $t < x \leq s$ υπάρχει κάποιο $t < \xi < x \leq s$ τέτοιο ώστε $f(x) - f(t) = f'(\xi)(x - t)$ και συνεπώς

$$|f(x)| = |f(x) - f(t)| = |f'(\xi)|(x - t) \leq M|f(\xi)|(s - t) < \frac{1}{2}|f(\xi)| \leq \frac{1}{2}N(s)$$

για κάθε $t \leq x \leq s$. Αυτό όμως σημαίνει οτι $0 < N(s) \leq \dfrac{1}{2}N(s)$, που είναι αντίφαση. Ετσι αποδεικνύεται οτι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in I$ με $x \geq a$. Ομοια αποδεικνύεται οτι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in I$ με $x \leq a$.