Μάθημα 20

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

20.1 Επικαμπύλια ολοκληρώματα

20.1.1 Ορισμός σε διανυσματικό πεδίο

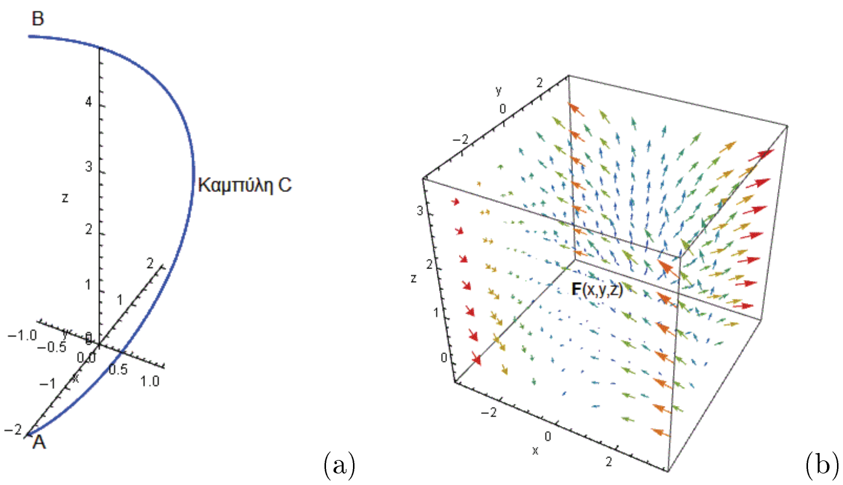
Στο μάθημα αυτό γίνεται μια γενίκευση της μέχρι τώρα γνωστής στον αναγνώστη έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx,$$

σύμφωνα με την οποία το διάστημα ολοκλήρωσης $[\alpha, \beta]$ αντικαθίσταται από μια καμπύλη, έστω C (Σχ. 20.1.1 - 1a), με πεπερασμένο μήκος, που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση[1] $\mathbf{r}(t)$, ενώ η ολοκληρωτέα συνάρτηση $f(x)$

[1] Βλέπε Μάθημα *Διανυσματική συνάρτηση - Παραμετρική παράσταση καμπυλών.*

από ένα διανυσματικό πεδίο, που περιγράφεται επίσης από μία [2]διανυσματική συνάρτηση, έστω $\mathbf{F}$ (Σχ. 20.1.1 - 1b), που ορίζεται επί της C (Σχ. 20.1.1 - 2c), δηλαδή τα σημεία (x, y), αντίστοιχα (x, y, z) στα οποία ορίζεται η $\mathbf{F}$, είναι επίσης σημεία της C (Σχ. 20.1.1 - 2d). Τα ολοκληρώματα αυτά λέγονται τότε **επικαμπύλια** και η καμπύλη C **δρόμος ολοκλήρωσης**.



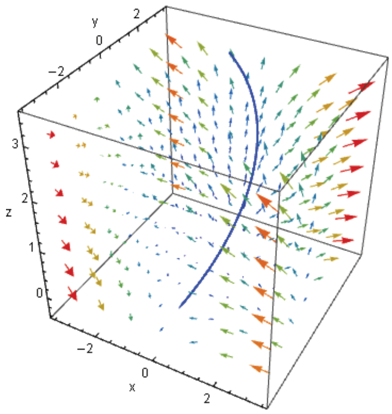
Σχήμα 20.1.1 - 1: (a) η καμπύλη C και (b) το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$.

Δίνεται στη συνέχεια ο παρακάτω ορισμός του επικαμπύλιου ολοκληρώματος:

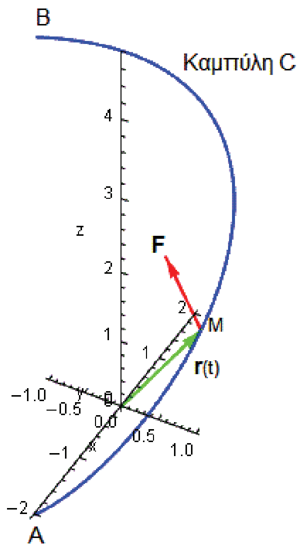
Ορισμός 20.1.1 - 1 (επικαμπύλιο ολοκλήρωμα). *Έστω C μία καμπύλη με πεπερασμένο μήκος που περιγράφεται με παραμετρική μορφή από τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}(t)$ για κάθε $t \in [\alpha, \beta]$ και ένα διανυσματικό πεδίο, έστω $\mathbf{F}$, που είναι ορισμένο επί της C (Σχ. 20.1.1 - 2). Τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\mathbf{F}$ επί της C, συμβολίζεται με*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r}$$

[2]Βλέπε Μάθημα *Διανυσματικός Διαφορικός Λογισμός - Βαθμωτά και διανυσματικά πεδία.*



(c)



(d)

Σχήμα 20.1.1 - 2: (c) το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ με την καμπύλη C και (d) το πεδίο $\mathbf{F}$ επί της C, δηλαδή, όταν τα σημεία (x, y, z) στα οποία ορίζεται η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}$, είναι επίσης σημεία της C.

και ορίζεται από τον τύπο

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r} = \int_\alpha^\beta \mathbf{F}\left[\mathbf{r}(t)\right] \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt, \qquad (20.1.1 - 1)$$

όταν το τελευταίο ολοκλήρωμα υπάρχει.

Αν η καμπύλη C είναι **κλειστή**, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος της C συμβολίζεται με

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r},$$

όπου στο σύμβολο της ολοκλήρωσης τίθεται πολλές φορές και βέλος για να καθοριστεί η φορά διαγραφής της C.

Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα έχουν πολλές εφαρμογές στις θετικές επιστήμες, όπως:

- στο έργο δυνάμεων,
- τη δυναμική ενέργεια,
- τη ροή θερμότητας,
- την εντροπία,
- τη ροή ρευστών κ.λπ.[3]

Σημείωση 20.1.1 - 1

Στη βιβλιογραφία τα επικαμπύλια ολοκληρώματα που ορίζονται από ένα διανυσματικό πεδίο επί μιας καμπύλης, είναι επίσης γνωστά και ως επικαμπύλια ολοκληρώματα του 2ου είδους.

20.1.2 Τύπος υπολογισμού

Έστω ότι η διανυσματική συνάρτηση που περιγράφει το πεδίο $\mathbf{F}$, εκφράζεται συναρτήσει των συντεταγμένων του στον χώρο των 3-διαστάσεων ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x,y,z) &= P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k} \\ &= \langle P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z), \rangle \end{aligned} \qquad (20.1.2 - 1)$$

ενώ η [4]διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}$ ως

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}. \qquad (20.1.2 - 2)$$

Υπενθυμίζεται στο σημείο αυτό ότι: αν $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ και $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα, τότε το **εσωτερικό γινόμενο** $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ υπολογίζεται από τον τύπο

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3. \qquad (20.1.2 - 3)$$

---

[3] Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 3, 4, 5, 6] και στη μαθηματική βάση δεδομένων *http://en.wikipedia.org/wiki/Line_integral*

[4] Βλέπε Μάθημα *Διανυσματική συνάρτηση*.

Τότε σύμφωνα με τις $(20.1.2-1)$ και $(20.1.2-2)$ λαμβάνοντας υπόψη και τον τύπο $(20.1.2-3)$ το ολοκλήρωμα $(20.1.1-1)$ γράφεται

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}(t)\cdot d\,\mathbf{r} &= \int_C (P\,\mathbf{i}+Q\,\mathbf{j}+R\,\mathbf{k})\cdot(dx\,\mathbf{i}+dy\,\mathbf{j}+dz\,\mathbf{k})\\ &= \int_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz, \qquad (20.1.2 - 4)\end{aligned}$$

ενώ, αν

$$\mathbf{F}(x,y)=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j},$$

η αντίστοιχη της $(20.1.2-4)$ έκφραση στον χώρο των 2-διαστάσεων είναι

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}(t)\cdot d\,\mathbf{r} &= \int_C (P\,\mathbf{i}+Q\,\mathbf{j})\cdot(dx\,\mathbf{i}+dy\,\mathbf{j})\\ &= \int_C P\,dx+Q\,dy. \qquad (20.1.2 - 5)\end{aligned}$$

Σύμφωνα με την υποσημείωση 4 η παραμετρική παράσταση της καμπύλης C θα ορίζεται από τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}(t)$ και θα είναι της μορφής

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}\\ &= \langle x(t),y(t),z(t)\rangle\,, \quad \text{όταν} \quad t\in[\alpha,\beta]. \qquad (20.1.2 - 6)\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην $(20.1.2-1)$ τα $x,\ y,\ z$ με τις αντίστοιχες παραμετρικές εκφράσεις τους $x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$, που δίνονται από την $(20.1.2-6)$, προκύπτει η παρακάτω παραμετρική έκφραση του διανυσματικού πεδίου:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(t)=\mathbf{F}(x(t),y(t),z(t)) &= \langle P(x(t),y(t),z(t)),Q(x(t),y(t),z(t)),\\ &= R(x(t),y(t),z(t))\rangle\,. \qquad (20.1.2 - 7)\end{aligned}$$

Υποθέτοντας ότι οι συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$ είναι παραγωγίσιμες για κάθε $t\in[\alpha,\beta]$, από την $(20.1.2-6)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= x'(t)\mathbf{i}+y'(t)\mathbf{j}+z'(t)\mathbf{k}\\ &= \left\langle x'(t),y'(t),z'(t)\right\rangle\,, \quad \text{όταν} \quad t\in[\alpha,\beta]. \qquad (20.1.2 - 8)\end{aligned}$$

Σύμφωνα με τις $(20.1.2-7)$ και $(20.1.2-8)$, λαμβάνοντας υπόψη και τον ήδη γνωστό τύπο $(20.1.2-3)$ υπολογισμού του εσωτερικού γινομένου

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3,$$

η ολοκληρωτέα συνάρτηση στην $(20.1.1-1)$, δηλαδή στην

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r} = \int_\alpha^\beta \mathbf{F}\left[\mathbf{r}(t)\right]\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt,$$

γράφεται

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(t)\cdot\mathbf{r}'(t) &= P(x(t),y(t),z(t))\,x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))\,y'(t)\\ &\quad + R(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)\\ &= P(t)\,x'(t) + Q(t)\,y'(t) + R(t)\,z'(t).\end{aligned} \qquad (20.1.2 - 9)$$

Τότε από την $(20.1.2-9)$ προκύπτει ο παρακάτω τύπος υπολογισμού του επικαμπύλιου ολοκληρώματος $(20.1.1-1)$ για τον χώρο των 3-διαστάσεων

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r} = \int_\alpha^\beta \left[P(t)x'(t) + Q(t)y'(t) + R(t)z'(t)\right]\,d\,t, \qquad (20.1.2 - 10)$$

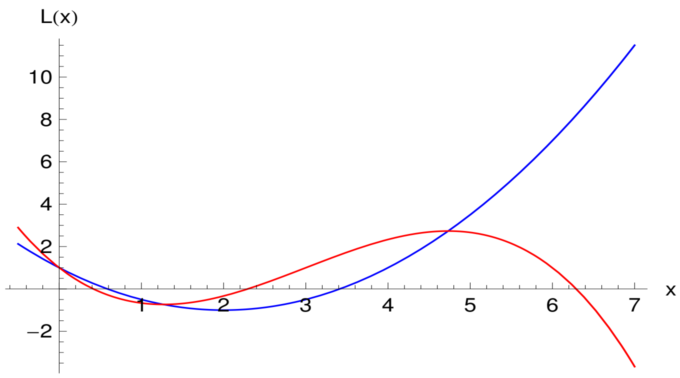
ενώ, αν

$$\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j},$$

ο αντίστοιχος τύπος για τον χώρο των 2-διαστάσεων είναι

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r} = \int_\alpha^\beta \left[P(t)x'(t) + Q(t)y'(t)\right]\,d\,t. \qquad (20.1.2 - 11)$$

Κρίνεται απαραίτητο στο σημείο αυτό να γίνει υπενθύμιση των παρακάτω χρήσιμων για τα επόμενα παραμετρικών παραστάσεων:



Σχήμα 20.1.2 - 1: παραμετρική παράσταση ευθείας.

Ευθεία

Οι παραμετρικές μορφές των $x(t)$, $y(t)$, αντίστοιχα $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ της παραμετρικής εξίσωσης του **ευθύγραμμου τμήματος** M_1M_2 για την περίπτωση του χώρου των

- 2-διαστάσεων, όταν $M_1\,(x_1, y_1)$ η αρχή και $M_2\,(x_2, y_2)$ το τέλος, είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= tx_2 + (1-t)x_1, \\ y(t) &= ty_2 + (1-t)y_1 \quad \text{με} \quad t \in [0,1]. \end{aligned} \tag{20.1.2 - 12}$$

- 3-διαστάσεων, όταν $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$ - αρχή και $M_2\,(x_2, y_2, z_2)$ - τέλος (Σχ. 20.1.2 - 1), είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= tx_2 + (1-t)x_1, \\ y(t) &= ty_2 + (1-t)y_1, \\ z(t) &= tz_2 + (1-t)z_1 \quad \text{με} \quad t \in [0,1]. \end{aligned} \tag{20.1.2 - 13}$$

Περιφέρεια κύκλου

Έστω αρχικά ότι το κέντρο του κύκλου συμπίπτει με την αρχή των αξόνων. Τότε, αν R η ακτίνα, η εξίσωση των σημείων της περιφέρειας γράφεται

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

οπότε παραμετρικές μορφές των $x(t)$ και $y(t)$ είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= R\cos t \quad \text{και} \\ y(t) &= R\sin t \quad \text{με} \quad t \in [0, 2\pi). \end{aligned} \tag{20.1.2 - 14}$$

Αν το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο (α, β), τότε η εξίσωση των σημείων της περιφέρειας γράφεται

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2,$$

οπότε

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha + R\cos t \quad \text{και} \\ y(t) &= \beta + R\sin t \quad \text{με} \quad t \in [0, 2\pi). \end{aligned} \tag{20.1.2 - 15}$$

Σημείωση 20.1.2 - 1

Σε κάθε άλλη διαφορετική των παραπάνω περίπτωση η παραμετρική παράσταση της καμπύλης C θα δίνεται.

Παράδειγμα 20.1.2 - 1

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r}$, όταν

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + (xz + y)\mathbf{k}$$

και C το ευθύγραμμο τμήμα AB με αρχή το $A(1, -1, 2)$ και τέλος το $B(3, 1, -1)$.

Λύση. Έστω

$$\begin{aligned} &A\left(x_1, y_1, z_1\right), \quad \text{όπου} \quad x_1 = 1, \quad y_1 = -1, \quad z_1 = 2, \quad \text{και} \\ &B\left(x_2, y_2, z_2\right) \qquad\qquad x_2 = 3, \quad y_2 = 1, \quad z_2 = -1. \end{aligned}$$

Τότε το ευθύγραμμο τμήμα AB σύμφωνα με τον τύπο $(20.1.2-13)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= tx_2 + (1-t)x_1, \\ y(t) &= ty_2 + (1-t)y_1, \\ z(t) &= tz_2 + (1-t)z_1 \quad \text{με} \quad t \in [0,1] \end{aligned}$$

εκφράζεται παραμετρικά ως εξής:

$$\begin{aligned} x(t) &= t\cdot 3 + (1-t)\cdot 1 = 2t+1 &(1)\\ y(t) &= t\cdot 1 + (1-t)\cdot(-1) = 2t-1 &(2)\\ z(t) &= t\cdot(-1) + (1-t)\cdot 2 = -3t+2, \quad \text{όταν} \quad t\in[0,1]. &(3) \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2 &(4)\\ y'(t) &= 2 &(5)\\ z'(t) &= -3. &(6) \end{aligned}$$

Από το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + (xz+y)\mathbf{k} = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}.$$

προκύπτει ότι: $P = x, \quad Q = -y \quad \text{και} \quad R = xz + y.$

Άρα σύμφωνα με τις (1)-(3) έχουμε

$$\begin{aligned} P(t) &= x = 2t+1, \\ Q(t) &= -y = -2t+1, \quad \text{και} \\ R(t) &= xz + y = (2t+1)(-3t+2) + 2t - 1 \\ &= -6t^2 + 3t + 1. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στον τύπο $(20.1.2-10)$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\int\limits_{AB} \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r} &= \int\limits_0^1 \left[P(t)x'(t)+Q(t)y'(t)+R(t)z'(t)\right]\,d\,t, \\
&= \int\limits_0^1 \Bigg[(2t+1)\cdot \overbrace{2}^{\text{Εξ. }(4)} + (-2t+1)\cdot \overbrace{2}^{\text{Εξ. }(5)} \\
&\quad + \left(-6t^2+3t+1\right)\cdot \overbrace{(-3)}^{\text{Εξ. }(6)}\Bigg]\,d\,t \\
&= t-\frac{9t^2}{2}+6t^3\Big|_0^1=\frac{5}{2}\,.
\end{aligned}$$

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA γίνεται με το παρακάτω πρόγραμμα:

Πρόγραμμα 20.1.2 - 1 (επικαμπύλιου ολοκληρώματος 2ου είδους)

```
x1 = 1; y1 = 1; x2 = 2; y2 = 3;z1=2;z2=-1;
x[t_] := t x2 + (1 - t) x1
y[t_] := t y2 + (1 - t) y1
y[t_] := t z2 + (1 - t) z1
Print["x(t) = ", x[t]," , y(t) = ", y[t]," , z(t) =",z[t]]
xd[t_] := D[x[t], t];yd[t_] := D[y[t], t];zd[t_] := D[z[t], t];
Print["x'(t) = ", xd[t]," , y'(t) = ", yd[t]," , z'(t) = ", zd[t]]
P[t_] := y[t];Q[t_] :=- y[t];R[t_]:=x[t] z[t]+y[t]
Print["P(t) = ", Simplify[P[t]]]
Print["Q(t) = ", Simplify[Q[t]]]
Print["R(t) = ", Simplify[R[t]]]
Print["P(t)x'(t)+Q(t)y'(t) =",
Simplify[P[t] xd[t] + Q[t] yd[t] + R[t] zd[t]]]
w = Integrate[P[t] xd[t] + Q[t] yd[t] + R[t] zd[t], {t, 0, 1}];
Print["Linear Integral: ", w]
```

■

Παράδειγμα 20.1.2 - 2

Όμοια το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r}$, όταν

$$\mathbf{F} = (x-y)\,\mathbf{i} + (x+y)\,\mathbf{j}$$

και C η περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου με κέντρο $(0,0)$, όταν η περιφέρεια διαγράφεται δεξιόστροφα, δηλαδή αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Λύση. Επειδή ο κύκλος είναι μοναδιαίος, πρέπει $R = 1$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο (20.1.2−14) η περιφέρεια έχει την παρακάτω παραμετρική παράσταση:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t, \quad \text{και} && (1) \\ y(t) &= \sin t \quad \text{με} \quad t \in [0, 2\pi), && (2) \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\sin t, \quad \text{και} && (3) \\ y'(t) &= \cos t. && (4) \end{aligned}$$

Το διανυσματικό πεδίο γράφεται

$$\mathbf{F} = (x-y)\,\mathbf{i} + (x+y)\,\mathbf{j} = P(x,y)\,\mathbf{i} + Q(x,y)\,\mathbf{j},$$

οπότε $\quad P = x - y \quad$ και $\quad Q = x + y$.

Άρα σύμφωνα με τις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} P(t) &= x - y = \cos t - \sin t, \quad \text{και} \\ Q(t) &= x + y = \cos t + \sin t. \end{aligned}$$

Τότε από τον τύπο (20.1.2 − 11) έχουμε

$$\begin{aligned}
\oint \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \left[P(t)x'(t) + Q(t)y'(t)\right]\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left[(\cos t - \sin t)\cdot \overbrace{(-\sin t)}^{\text{Εξ. }(3)} + (\cos t + \sin t)\cdot \overbrace{\cos t}^{\text{Εξ. }(4)}\right]\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.
\end{aligned}$$

■

20.1.3 Ιδιότητες

Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα έχουν ιδιότητες ανάλογες με εκείνες των ήδη γνωστών ολοκληρωμάτων. Οι βασικότερες από αυτές που δίνονται στη συνέχεια με τη μορφή θεωρημάτων είναι:

Θεώρημα 20.1.3 - 1 (γραμμική). *Έστω* $\mathbf{F}$ *και* $\mathbf{G}$ *διανυσματικά πεδία, που είναι ορισμένα επί μιας καμπύλης* C *με πεπερασμένο μήκος και παραμετρική παράσταση* $\mathbf{r}(t)$ *για κάθε* $t \in [\alpha, \beta]$. *Τότε, αν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα των* $\mathbf{F}$ *και* $\mathbf{G}$ *επί της* C *υπάρχουν, για κάθε* $k,\ \lambda \in \mathbb{R}$ *ισχύει ότι*

$$\int_C (k\,\mathbf{F} + \lambda\,\mathbf{G})\cdot d\,\mathbf{r} = k\int_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r} + \lambda\int_C \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r}$$

Η ιδιότητα γενικεύεται.

Θεώρημα 20.1.3 - 2 (προσθετική). *Έστω* $\mathbf{F}$ *διανυσματικό πεδίο, που είναι ορισμένο επί μιας καμπύλης* C *με πεπερασμένο μήκος και παραμετρική παράσταση* $\mathbf{r}(t)$ *για κάθε* $t \in [\alpha, \beta]$. *Τότε, αν* C_1 *και* C_2 *είναι δύο διαφορετικά τόξα της* C, *τέτοια ώστε το άθροισμά τους να είναι η* C *και να διαγράφονται από το ίδιο διάνυσμα* $\mathbf{r}(t)$ *που διαγράφεται και η* C, *ισχύει ότι*

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r}.$$

Η ιδιότητα γενικεύεται για ν το πλήθος επιμέρους τόξα της C.

Θεώρημα 20.1.3 - 3. *Έστω* $\mathbf{F}$ *διανυσματικά πεδίο, που είναι ορισμένο επί μιας καμπύλης* C *με πεπερασμένο μήκος και παραμετρική παράσταση* $\mathbf{r}(t)$ *για κάθε* $t \in [\alpha, \beta]$. *Τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα παραμένει αμετάβλητο σε μία αλλαγή της παραμέτρου* t, *που διατηρεί τον προσανατολισμό της* C *και αλλάζει πρόσημο, όταν η αλλαγή αυτή αντιστρέψει τον προσανατολισμό, δηλαδή*

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r} = -\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r}.$$

Η ιδιότητα αυτή εκφράζει την ανεξαρτησία του επικαμπύλιου ολοκληρώματος από την εκλογή της παραμέτρου.

20.1.4 Σχέση επικαμπύλιου ολοκληρώματος και κλίσης

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r}$$

δεν είναι γενικά ανεξάρτητο από τον δρόμο της ολοκλήρωσης C, δηλαδή, αν υποτεθεί ότι η C έχει αρχή το σημείο A και τέλος το B, τότε η τιμή του, όταν ο δρόμος είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB, είναι διαφορετική εκείνης, όταν ο δρόμος είναι μια οποιαδήποτε άλλη καμπύλη με αρχή το A και τέλος το B.

Τα παραπάνω δεν ισχύουν και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα έχει την ίδια τιμή ανεξάρτητα του τρόπου διαγραφής της C από το A στο B, μόνον όταν το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ είναι συντηρητικό.[5]

Σχετικά αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα:

---

[5]

Ορισμός (συντηρητικό πεδίο). *Το διανυσματικό πεδίο που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση* $\mathbf{F}$ *θα λέγεται* **συντηρητικό**, *όταν*

$$\mathbf{F} = \nabla \varphi.$$

Βλέπε Μάθημα *Διανυσματικός Διαφορικός Λογισμός - Συντηρούμενα πεδία.*

Θεώρημα 20.1.4 - 1 (ανεξαρτησίας επικαμπύλιου ολοκληρώματος). *Έστω*

$$\mathbf{F} = \nabla \varphi,$$

όπου φ βαθμωτή συνάρτηση της οποίας υπάρχουν τουλάχιστον οι 1ης τάξης μερικές παράγωγοι και είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r}, \tag{20.1.4 - 1}$$

όταν C η καμπύλη από το σημείο $A\,(x_1, y_1, z_1)$ στο $B\,(x_2, y_2, z_2)$ του πεδίου, είναι ανεξάρτητο από τον δρόμο της ολοκλήρωσης και ισχύει

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r} = \int_{A(x_1,y_1,z_1)}^{B(x_2,y_2,z_2)} d\phi = \phi\,(x_2, y_2, z_2) - \phi\,(x_1, y_1, z_1)\,. \tag{20.1.4 - 2}$$

Αντίστροφα: *αν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (20.1.4−1) είναι ανεξάρτητο από τον δρόμο της ολοκλήρωσης, τότε υπάρχει μία βαθμωτή συνάρτηση, έστω φ, έτσι ώστε $\mathbf{F} = \nabla \varphi$.*

Άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι το:

Πόρισμα 20.1.4 - 1. *Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός συντηρητικού διανυσματικού πεδίου κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης είναι μηδέν.*

Κρίνεται απαραίτητο στο σημείο αυτό για ευκολία των παρακάτω ασκήσεων, να γίνει υπενθύμιση των παρακάτω εννοιών:[6]

Ορισμός 20.1.4 - 2. *Έστω ένα διανυσματικό πεδίο που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}$. Τότε το πεδίο θα λέγεται* **αστρόβιλο** *(irrotational field), όταν ισχύει*

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}. \tag{20.1.4 - 3}$$

Θεώρημα 20.1.4 - 2. *Ένα διανυσματικό πεδίο είναι αστρόβιλο, όταν είναι συντηρητικό και αντίστροφα.*

[6] Βλέπε επίσης Μάθημα *Διανυσματικός Διαφορικός Λογισμός - Αστρόβιλα πεδία.*

Παρατήρηση 20.1.4 - 1

Αν στην αναλυτική περιγραφή του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}$ λείπει κάποια συνιστώσα, τότε στον υπολογισμό του στροβιλισμού $\nabla \times \mathbf{F}$ η συνιστώσα αυτή υπολογίζεται με την τιμή της ίση με το 0.

Παράδειγμα 20.1.4 - 1

Έστω το διανυσματικό πεδίο (Σχ. 20.1.4 - 1a)

$$\mathbf{F} = 2\,x\,y\,\mathbf{i} + \left(x^2 + 2\,y^2\right)\,\mathbf{j}.$$

Δείξτε ότι

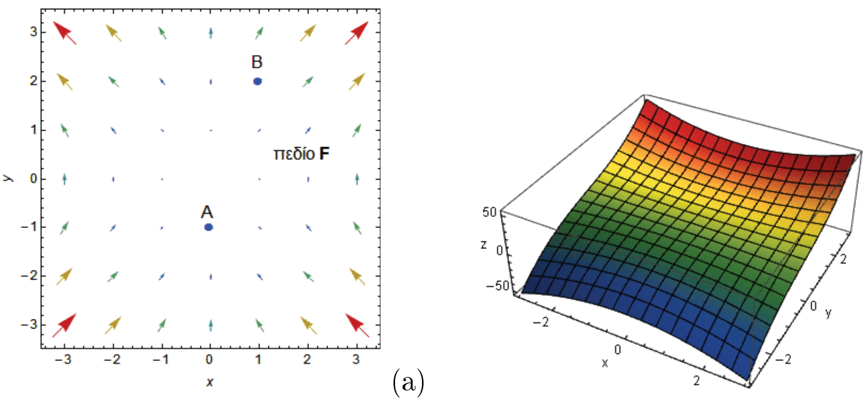
i) το πεδίο $\mathbf{F}$ είναι συντηρητικό.

ii) Στη συνέχεια να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r},$$

όταν C ο δρόμος ολοκλήρωσης από το σημείο $A(0,-1)$ στο $B(1,2)$.

Λύση.



(a) (b)

Σχήμα 20.1.4 - 1: (a) το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = 2\,x\,y\,\mathbf{i} + \left(x^2 + 2\,y^2\right)\,\mathbf{j}$ και τα σημεία $A(0,-1)$, $B(1,2)$ και (b) το δυναμικό $\phi(x,y) = x^2 y + y^3$.

i) Σύμφωνα με τα Θεωρήματα 20.1.4 - 1 - 20.1.4 - 2 και τον Ορισμό 20.1.4 - 2 αρκεί να δειχθεί ότι

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Αν

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= 2\,x\,y\,\mathbf{i} + \left(x^2 + 2\,y^2\right)\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} \\
&\quad \text{(υποχρεωτικά η συνιστώσα που λείπει πρέπει να είναι} \\
&\quad \text{ίση με μηδέν - Παρατήρηση } 20.1.4 - 1) \\
&= P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k},
\end{aligned}$$

τότε

$$P = 2\,x\,y, \quad Q = x^2 + 2\,y^2 \quad \text{και} \quad R = 0. \tag{1}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2\,x\,y & x^2 + 2\,y^2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (0 - Q_z)\,\mathbf{i} + (P_z - 0)\,\mathbf{j} + (Q_x - P_y)\,\mathbf{k} = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Τότε από το Θεώρημα 20.1.4 - 2 προκύπτει ότι το πεδίο $\mathbf{F}$ είναι συντηρητικό, δηλαδή

$$\mathbf{F} = \nabla\varphi,$$

όπου φ το δυναμικό.

ii) Εφόσον το πεδίο είναι συντηρητικό, για τον υπολογισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος πρέπει να υπολογιστεί το δυναμικό του.

Υπολογισμός του δυναμικού

Σύμφωνα με την (i), αν

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k} \\ &= \nabla\varphi = \varphi_x\,\mathbf{i} + \varphi_y\,\mathbf{j} + \varphi_z\,\mathbf{k}, \end{aligned}$$

τότε από την (1) προκύπτει ότι

$$\varphi_x = P = 2\,x\,y \quad \varphi_y = Q = x^2 + 3\,y^2 \quad \text{και} \quad \varphi_z = R = 0.$$

Για να προσδιοριστεί το δυναμικό φ, πρέπει να ολοκληρωθούν οι παραπάνω σχέσεις ως προς x, y και z αντίστοιχα. Αυτό γίνεται με τη βοήθεια του ολικού διαφορικού της φ ως εξής:

$$\begin{aligned} d\varphi &= \varphi_x\,dx + \varphi_y\,dy + 0\,dz \\ &= 2\,x\,y\,dx + \left(x^2 + 3\,y^2\right)\,dy \\ &= d_x\left(x^2 y\right) + d_y\left(x^2 y + y^3\right) \\ &= d_x(x^2 y + \overbrace{y^3}^{d_x(y^3)=0}) + d_y\left(x^2 y + y^3\right) \\ &= d\left(x^2 y + y^3\right). \end{aligned}$$

Επομένως το δυναμικό του πεδίου $\mathbf{F}$ είναι

$$\phi(x, y) = x^2 y + y^3 + c,$$

όταν c σταθερά (Σχ. 20.1.4 - 1b).

Άρα από το Θεώρημα 20.1.4 - 1 και τον τύπο $(20.1.4 - 2)$ έχουμε

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r} = \int_{A(0,-1)}^{B(1,2)} d\,\varphi = \varphi\,(1,2) - \varphi\,(0,-1) = 11.$$

■

Παράδειγμα 20.1.4 - 2

Όμοια το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r}$, όταν

$$\mathbf{F} = 3\,x^2 z\,\mathbf{i} + z^2\,\mathbf{j} + \left(x^3 + 2\,y\,z\right)\,\mathbf{k}.$$

και C ο δρόμος ολοκλήρωσης από το σημείο $A(-1,1,2)$ στο $B(1,2,4)$.
Λύση. Σύμφωνα με το Παράδειγμα 20.1.4 - 1, αν

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= 3\,x^2 z\,\mathbf{i} + z^2\,\mathbf{j} + \left(x^3 + 2\,y\,z\right)\,\mathbf{k} \\ &= P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k},\end{aligned}$$

τότε

$$P = 3\,x^2 z, \quad Q = z^2 \quad \text{και} \quad R = x^3 + 2\,y\,z. \tag{2}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3\,x^2 z & z^2 & x^3 + 2\,y\,z \end{vmatrix} \\ &= \left(R_y - Q_z\right)\mathbf{i} + \left(P_z - R_x\right)\mathbf{j} + \left(Q_x - P_y\right)\mathbf{k} = \mathbf{0},\end{aligned}$$

οπότε όμοια σύμφωνα με το γνωστό Θεώρημα 20.1.4 - 2 το πεδίο $\mathbf{F}$ είναι συντηρητικό.

Υπολογισμός του δυναμικού

Έστω

$$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k} = \nabla\varphi = \varphi_x\,\mathbf{i} + \varphi_y\,\mathbf{j} + \varphi_z\,\mathbf{k},$$

τότε σύμφωνα με τη (2) είναι

$$\varphi_x = 3\,x^2 z, \quad \varphi_y = z^2 \quad \text{και} \quad \varphi_z = x^3 + 2\,y\,z.$$

Ολοκληρώνοντας τις παραπάνω σχέσεις ως προς x, y και z προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
d\varphi &= \varphi_x\, dx + \varphi_y\, dy + \varphi_z\, dz \\
&= 3\,x^2 z\, dx + z^2\, dy + \left(x^3 + 2\,y\,z\right)\, dz \\
&= d_x\left(x^3 z\right) + d_y\left(y\,z^2\right) + d_z\left(x^3 z + y^2 z\right) \\
&= d_x(x^3 z + \overbrace{y^2 z}^{d_x(y^2 z)=0}) + d_y(y\,z^2 + \overbrace{x^3 z}^{d_y(x^3 z)=0}) + d_z\left(x^3 z + y^2 z\right) \\
&= d\left(x^3 z + y^2 z\right).
\end{aligned}$$

Άρα το δυναμικό του πεδίου $\mathbf{F}$ είναι

$$\phi(x, y, z) = x^3 z + y^2 z + c,$$

όταν c σταθερά

Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 20.1.4 - 1 και τον τύπο $(20.1.4 - 2)$ έχουμε

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r} = \int_{A(-1,1,2)}^{B(1,2,4)} d\,\varphi = \varphi\,(1,2,4) - \varphi\,(-1,1,2) = 6.$$

■

Ασκήσεις

1. Αφού πρώτα δειχθεί ότι τα παρακάτω πεδία είναι συντηρούμενα, στη συνέχεια να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r},$$

όταν το C είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB και $\mathbf{F}$:

i) $y^4 z^2\,\mathbf{i} + 4xy^3 z^2\,\mathbf{j} + 2xy^4 z\,\mathbf{k}$ από το σημείο $A(-1,2,4)$ στο $B(3,2,2)$,

ii) $(y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j})\,e^{xy}$ από το $A(1,0)$ στο $B(2,2)$,

iii) $\left(4xy-3x^2z^2\right)\mathbf{i}+2x^2\,\mathbf{j}-2x^3z\,\mathbf{k}$ από το $A(0,1,1)$ στο $B(2,2,4)$,

iv) $(2x\cos y+z\sin y)\,\mathbf{i}+\left(xz\cos y-x^2\sin y\right)\mathbf{j}+x\sin y\,\mathbf{k}$ από το $(1,\pi,3)$ στο $(-1,0,1)$,

v) $\left(y^2z^3\cos x-4x^3z\right)\mathbf{i}+2yz^3\sin x\,\mathbf{j}+\left(3y^2z^2\sin x-x^4\right)\mathbf{k}$ από το $(\pi/2,1,1)$ στο $(\pi,3,3)$.

2. Να προσδιοριστεί το δυναμικό των πεδίων:

i) $\mathbf{E}=r\,\mathbf{r}$ *ii*) $\mathbf{E}=r^2\,\mathbf{r}$,

όταν $\mathbf{r}$ διάνυσμα θέσης. Στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I=\int\limits_C \mathbf{E}\cdot d\,\mathbf{r},$$

όταν C το άνω τμήμα της περιφέρειας $x^2+y^2=4$.

Απαντήσεις

1. Το αντίστοιχο δυναμικό ϕ είναι:
(i) xy^4z^2, (ii) e^{xy} (αρχικά $P=ye^{xy}$, $Q=xe^{xy}$, $R=0$), (iii) $2x^2y-x^3z^2$,
(iv) $x^2\cos y+xz\sin y$, (v) $y^2z^3\sin x-x^4z$.
2. Είναι $\mathbf{r}=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$, οπότε $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Τότε:
(i) $\phi_x=x\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\phi_y=y\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ και $\phi_z=z\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, οπότε τελικά $\phi(x,y,z)=\frac{1}{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος έχουμε ως δρόμο ολοκλήρωσης το άνω μέρος της περιφέρειας ακτίνας $R=2$ από το σημείο $A(2,0)$ στο $B(-2,0)$. Επειδή $z=0$, πρέπει $\phi(x,y)=\frac{1}{3}\sqrt{x^2+y^2}$. Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 20.1.4 - 1 και τον τύπο $(20.1.4-2)$ έχουμε

$$I=\int\limits_C \mathbf{E}\cdot d\,\mathbf{r}=\int\limits_{A(2,0)}^{B(-2,0)} d\,\varphi=\varphi\,(2,0)-\varphi\,(-2,0)=0.$$

(ii) $\phi_x=x\,\left(x^2+y^2+z^2\right)$ κ.λπ., οπότε τελικά

$$\phi=\frac{1}{4}\left(x^4+y^4+z^4+2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2\right).$$

Για το ολοκλήρωμα είναι όμοια $z=0$, οπότε $\phi=\frac{1}{4}\left(x^4+y^4+2x^2y^2\right)=\frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right)^2$ με $I=0$.

20.1.5 Ορισμός σε βαθμωτό πεδίο

Έστω C μία καμπύλη με παραμετρική εξίσωση

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}, \quad \text{όταν} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

όπου οι συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$ είναι παραγωγίσιμες για κάθε $t \in (\alpha, \beta)$.

Είναι ήδη γνωστό από το Μάθημα *Διανυσματικές Συναρτήσεις - Γεωμετρική σημασία παραγώγου* ότι:

- η παράγωγος $\mathbf{r}'(t)$ ορίζει τη διεύθυνση της εφαπτομένης της C, και
- το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{T}(t)$ ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}, \quad \text{όταν} \quad \mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}. \tag{20.1.5 - 1}$$

Επομένως, αν η παράμετρος t παριστάνει τον χρόνο, είναι προφανές ότι η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}'(t)$ θα παριστάνει το **διάνυσμα της ταχύτητας**, έστω $\mathbf{v}(t)$, οπότε

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$$

σε κάθε σημείο της C και θα έχει **μέτρο**

$$v(t) = \left|\mathbf{r}'(t)\right| = |\mathbf{v}(t)|\,.$$

Έστω $s = s(t)$ το μήκος του τόξου επί της C που διαγράφεται σε χρόνο t. Τότε σύμφωνα και με τους παραπάνω τύπους είναι:

$$\frac{ds(t)}{dt} = v(t) = \left|\mathbf{r}'(t)\right|, \quad \text{οπότε} \quad ds(t) = v(t)\,dt = \left|\mathbf{r}'(t)\right|\,dt. \tag{20.1.5 - 2}$$

Η $(20.1.5 - 1)$ σύμφωνα με την $(20.1.5 - 2)$ διαδοχικά γράφεται

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|}\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \\ &= \frac{1}{v(t)}\frac{d\,\mathbf{r}(t)}{d\,t} = \frac{1}{\dfrac{ds(t)}{d\,t}}\frac{d\,\mathbf{r}(t)}{d\,t} = \frac{d\,\mathbf{r}(t)}{ds(t)}\,, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\mathbf{T} = \frac{d\,\mathbf{r}(t)}{ds(t)}\,.$$

Άρα

$$d\,\mathbf{r} = \mathbf{T}\,ds. \qquad (20.1.5 - 3)$$

Επομένως σύμφωνα με την $(20.1.5-3)$ το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r}$ τελικά γράφεται

$$\int\limits_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r} = \int\limits_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \int\limits_C f\,ds, \qquad (20.1.5 - 4)$$

όπου η $f = \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}$ λόγω του εσωτερικού γινομένου είναι **βαθμωτή συνάρτηση**.

Η $(20.1.5-4)$ δίνει μία άλλη έκφραση του επικαμπύλιου ολοκληρώματος, που αναλυτικά ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 20.1.5 - 1 (επικαμπύλιου ολοκληρώματος). *Αν η f περιγράφει ένα βαθμωτό πεδίο, που είναι ορισμένο επί μιας καμπύλης C με πεπερασμένο μήκος, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f ως προς ένα τόξο s της C, συμβολίζεται με $\int_C f ds$ και ισούται με*

$$\int\limits_C f\,ds = \int\limits_\alpha^\beta f\left[\mathbf{r}(t)\right]\,ds(t) = \int\limits_\alpha^\beta f\left[\mathbf{r}(t)\right]s'(t)\,dt, \qquad (20.1.5 - 5)$$

όταν το τελευταίο ολοκλήρωμα υπάρχει.

Σημείωση 20.1.5 - 1

Στη βιβλιογραφία τα επικαμπύλια ολοκληρώματα που ορίζονται από ένα βαθμωτό πεδίο επί μιας καμπύλης, είναι επίσης γνωστά και ως επικαμπύλια ολοκληρώματα του 1ου είδους.

20.1.6 Εφαρμογές

Οι σημαντικότερες εφαρμογές ανάλογα με τη φυσική σημασία της βαθμωτής συνάρτησης f δίνονται στη συνέχεια.

- $f = 1$

  Τότε το ολοκλήρωμα $\int_C ds$ παριστάνει το μήκος της καμπύλης C.

  Επειδή σύμφωνα με τον τύπο $(20.1.5-5)$ είναι

  $$\frac{ds}{dt} = v(t) = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}$$

  το **μήκος** L της C θα δίνεται από τον τύπο

  $$\begin{aligned} L &= \int_C ds = \int_{\alpha}^{\beta} s'(t)\, dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt. \qquad (20.1.6 - 1) \end{aligned}$$

- Αν η f παριστάνει την **πυκνότητα** ρ σε κάθε σημείο της C, τότε η **ολική μάζα** M δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

  $$M = \int_C \rho\, ds = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t) s'(t)\, dt. \qquad (20.1.6 - 2)$$

  Στην περίπτωση αυτή οι συντεταγμένες $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ του **κέντρου μάζας** είναι

  $$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{1}{M} \int_C x\, \rho\, ds = \frac{1}{M} \int_{\alpha}^{\beta} x(t)\, \rho(t)\, s'(t)\, dt, \\ \overline{y} &= \frac{1}{M} \int_C y\, \rho\, ds = \frac{1}{M} \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, \rho(t)\, s'(t)\, dt, \quad \text{και} \\ \overline{z} &= \frac{1}{M} \int_C z\, \rho\, ds = \frac{1}{M} \int_{\alpha}^{\beta} z(t)\, \rho(t)\, s'(t)\, dt, \qquad (20.1.6 - 3) \end{aligned}$$

  ενώ η **ροπή αδράνειας** I_l ως προς άξονα l ισούται με

  $$\mathrm{I}_l = \int_C \delta^2 \rho\, ds = \int_{\alpha}^{\beta} \delta^2(t)\, \rho(t) s'(t)\, dt, \qquad (20.1.6 - 4)$$

όπου με $\delta = \delta(x, y, z)$ συμβολίζεται η απόσταση του τυχόντος σημείου της C από τον l.

Παράδειγμα 20.1.6 - 1

Έστω C η σπείρα ενός ελατηρίου με σχήμα ένα τόξο της κυκλικής έλικας με παραμετρική εξίσωση (Σχ. 20.1.6 - 1a)

$$\mathbf{r}(t) = \alpha\cos t\,\mathbf{i} + \alpha\sin t\,\mathbf{j} + \beta t\,\mathbf{k}, \quad \text{όταν } \alpha > 0 \text{ και } t \in [0, 2\pi].$$

Αν η πυκνότητα του ελατηρίου είναι

$$\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

ζητείται να υπολογιστεί το μήκος, η μάζα και οι συντεταγμένες $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ του κέντρου μάζας του ελατηρίου.

Λύση. Έχουμε

$$x(t) = \alpha\cos t, \quad y(t) = \alpha\sin t \quad \text{και} \quad z(t) = \beta t,$$

οπότε

$$x'(t) = -\alpha\sin t, \quad y'(t) = \alpha\cos t \quad \text{και} \quad z'(t) = \beta.$$

Τότε

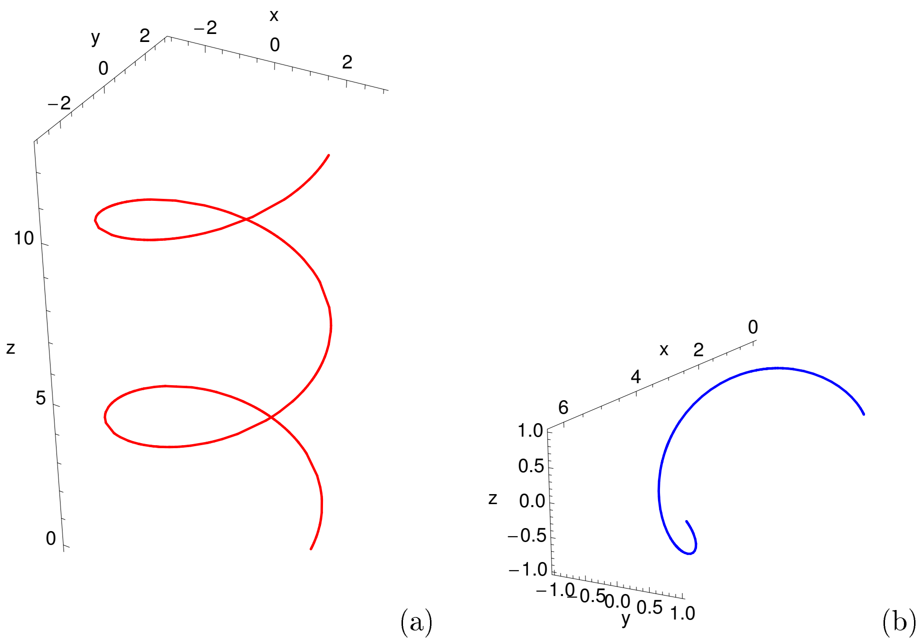
$$s'(t) = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

Σύμφωνα με τον τύπο $(20.1.6 - 1)$ το μήκος L του ελατηρίου είναι

$$\begin{aligned} L &= \int_C ds = \int_\alpha^\beta s'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\,dt = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\int_0^{2\pi} dt = 2\pi\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \end{aligned}$$

Επειδή $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ είναι

$$\begin{aligned} \rho\,[\mathbf{r}(t)] &= \rho(x(t), y(t), z(t)) = x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) \\ &= \alpha^2\cos^2 t + \alpha^2\sin^2 t + \beta^2 t^2 \\ &= \alpha^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) + \beta^2 t^2 = \alpha^2 + \beta^2 t^2. \end{aligned}$$



Σχήμα 20.1.6 - 1: Η καμπύλη C σε: (a) Παράδειγμα 20.1.6 - 1, όταν $\alpha = 3$, $\beta = 1$ και $t \in [0, 4\pi]$, (b) Άσκηση $1\,(i)$, όταν $\alpha = 3$, $\beta = 1$ και $t \in [0, 2\pi]$.

Επομένως η ολική μάζα M σύμφωνα με την $(20.1.6-2)$ είναι

$$\begin{aligned} M &= \int_C \rho\, ds = \int_0^{2\pi} \rho\,[\mathbf{r}(t)]\, s'(t)\, d\,t = \int_0^{2\pi} \rho(t)\, s'(t)\, d\,t \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\alpha^2+\beta^2 t^2\right) \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, d\,t \\ &= \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \int_0^{2\pi} \left(\alpha^2+\beta^2 t^2\right)\, d\,t \\ &= \frac{2\pi}{3} \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \left(3\alpha^2+4\pi^2\beta^2\right). \end{aligned}$$

Επίσης από τους τύπους $(20.1.6-3)$ διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} \int_C x\,\rho\, ds &= a\sqrt{a^2+b^2} \int_0^{2\pi} \left(a^2+b^2t^2\right)\cos t\, d\,t \\ &= a\sqrt{a^2+b^2} \left\{2b^2 t\cos t + \left[a^2+b^2\left(t^2-2\right)\right]\sin t\right\}\Big|_0^{2\pi} \\ &= 4ab^2\,\pi\sqrt{a^2+b^2}, \\ \int_C y\,\rho\, ds &= a\sqrt{a^2+b^2} \int_0^{2\pi} \left(a^2+b^2t^2\right)\sin t\, d\,t \\ &= a\sqrt{a^2+b^2} \left\{2b^2 t\sin t - \left[a^2+b^2\left(t^2-2\right)\right]\cos t\right\}\Big|_0^{2\pi} \\ &= -4ab^2\,\pi^2\sqrt{a^2+b^2}, \quad \text{και} \\ \int_C z\,\rho\, ds &= a\sqrt{a^2+b^2} \int_0^{2\pi} t\left(a^2+b^2t^2\right)\, d\,t \\ &= b\sqrt{a^2+b^2} \left(\frac{a^2t^2}{2}+\frac{b^2t^4}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} \\ &= 2b\left(a^2+2b^2\pi^2\right)\,\pi^2\sqrt{a^2+b^2}, \end{aligned}$$

οπότε το κέντρο μάζας θα είναι

$$(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \left(\frac{6ab^2}{3a^2 + 4b^2\pi^2}, -\frac{6ab^2\pi}{3a^2 + 4b^2\pi^2}, \frac{3b\pi\left(a^2 + 2b^2\pi^2\right)}{3a^2 + 4b^2\pi^2} \right).$$

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA έγινε με το παρακάτω πρόγραμμα:

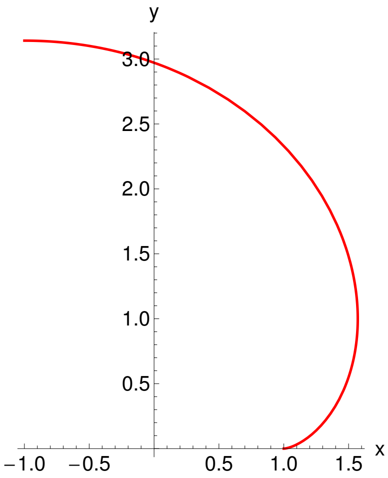
Πρόγραμμα 20.1.6 - 2 (επικαμπύλιου ολοκληρώματος 1ου είδους)

```
x[t_] := a Cos[t]
y[t_] := a Sin[t]
z[t_] := b t
f[t_] := (x[t])^2 + (y[t])^2 + (z[t])^2
Print["x'(t) = ", D[x[t], t], "  ,  ", "y'(t) = ",
 D[y[t], t], "  ,  ", "z'(t) = ", D[z[t], t]]
Print["s'(t) = ",
 Simplify[Sqrt[(D[x[t], t])^2 + (D[y[t], t])^2 + (D[z[t], t])^2]]]
Print["Length L = ",Integrate[Sqrt[(D[x[t], t])^2 + (D[y[t], t])^2
+ (D[z[t], t])^2], {t, 0,2 Pi}]]
Print["f(t) = ", Simplify[f[t]]]
M = Simplify[Integrate[f[t] Sqrt[(D[x[t], t])^2 + (D[y[t], t])^2
+ (D[z[t], t])^2], {t, 0,2 Pi}]];
Print["Mass M = ", M]
x1 = Simplify[Integrate[x[t] f[t] Sqrt[(D[x[t], t])^2 + (D[y[t], t])^2
+ (D[z[t],t])^2], {t, 0, 2 Pi}]];
y1 = Simplify[Integrate[y[t] f[t] Sqrt[(D[x[t], t])^2 + (D[y[t], t])^2
+ (D[z[t],t])^2], {t, 0, 2 Pi}]];
z1 = Simplify[Integrate[z[t] f[t] Sqrt[(D[x[t], t])^2
+ (D[y[t], t])^2 + (D[z[t],t])^2], {t, 0, 2 Pi}]];
Print["Center of mass  x = ", Simplify[x1/M], "  ,  y = ",
 Simplify[y1/M], "  ,  z = ", Simplify[z1/M]]
ParametricPlot3D[{x[t], y[t], z[t]}, {t, 0, 4 Pi},
 PlotStyle -> {Red, Thick}, Boxed -> False,
 AxesLabel -> {"x", "y  ", "z"},
 BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 16}]
```

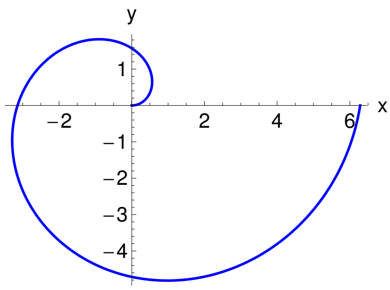
■

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί το μήκος L, η ολική μάζα M και οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας του σύρματος στις παρακάτω περιπτώσεις:



(a)



(b)

Σχήμα 20.1.6 - 2: Η καμπύλη C στην: (a) Άσκηση 1 (ii), όταν $t \in [0, \pi]$ και (b) Άσκηση 1 (iii), όταν $t \in [0, 2\pi]$.

i) $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \sin t\,\mathbf{k}$ και $t \in [0, 2\pi]$, όταν η πυκνότητα του σύρματος είναι $\rho(x, y, z) = x^2$ (Σχ. 20.1.6 - 1b).

ii) $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t\cos t)\mathbf{j}$ με $t \in [0, \pi]$ και η πυκνότητα του σύρματος είναι $\rho(x, y) = x^2 + y^2$ (Σχ. 20.1.6 - 2a).

iii) $\mathbf{r}(t) = t\cos t\,\mathbf{i} + t\sin t\,\mathbf{j}$ με $t \in [0, 2\pi]$ και $\rho(x, y) = x^2$ (Σχ. 20.1.6 - 2b).

2. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα των z της σπείρας του Παραδείγματος 20.1.6 - 1.

3. Να δειχθεί ότι η ροπή αδράνειας ενός ομογενούς κυκλικού σύρματος με ακτίνα R ως προς έναν άξονα που περνά από το κέντρο του είναι $MR^2/2$, όταν M η μάζα του σύρματος. Κατόπιν να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας ως προς άξονα, που απέχει από το κέντρο του απόσταση ίση με d.

Απαντήσεις

1. (i) $s'(t) = \sqrt{2}$, $L = 2\sqrt{2}\,\pi$, $\rho(t) = t^2$, $M = \frac{8\sqrt{2}\,\pi^3}{3}$, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3}{2\pi^2}, -\frac{3}{2\pi}\right)$.
(ii) $s'(t) = t$, $L = \frac{\pi^2}{2}$, $\rho(t) = 1 + t^2$, $M = \frac{1}{4}\pi^2\left(1 + 2\pi^2\right)$,

$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{4\left(54-14\pi^2+\pi^4\right)}{\pi^2\left(\pi^2+2\right)}, \frac{4\left(5\pi^2-27\right)}{\pi\left(\pi^2+2\right)} \right)$.

(iii) $s'(t) = \sqrt{1+t^2}$, $L = \pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2}\sinh^{-1} 2\pi$, $\rho(t) = t^2\cos^2 t$. Οι υπόλοιποι υπολογισμοί των ολοκληρωμάτων γίνονται μόνον προσεγγιστικά, όπως με ανάπτυγμα κατά Maclaurin ή με προσεγγιστικές μεθόδους (βλέπε βιβλιογραφία). $M = 214.42$ κ.λπ.

Ανάλογα οι Ασκήσεις **2** και **3**.

20.1.7 Σχέση επικαμπύλιου και διπλού ολοκληρώματος

Στην παράγραφο αυτή θα εξεταστεί η σχέση που υπάρχει μεταξύ του επικαμπύλιου και του διπλού ολοκληρώματος.

Σχετικά ισχύει το παρακάτω θεώρημα:[7]

Θεώρημα 20.1.7 - 1 (Green στο επίπεδο). *Έστω D ένας κλειστός τόπος του επιπέδου που περικλείεται από μία κλειστή και απλή καμπύλη C του xy-επιπέδου (Σχ. 20.1.7 - 1). Τότε, αν P και Q είναι συνεχείς συναρτήσεις στο D, ισχύει*

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy, \tag{20.1.7 - 1}$$

όταν η καμπύλη C διαγράφεται κατά τη θετική φορά.

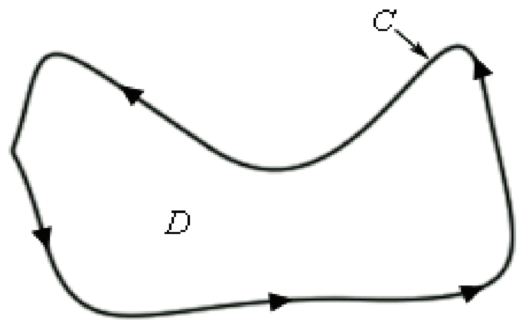
Σημειώσεις 20.1.7 - 1

i) Υπενθυμίζεται ότι ως θετική φορά διαγραφής ή διαφορετικά δεξιόστροφη φορά θεωρείται αυτή που είναι αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

ii) Μία καμπύλη C είναι κλειστή, όταν η αρχή και το τέλος της συμπίπτουν.

iii) Με τον όρο απλή καμπύλη εννοείται ότι η διαγραφή της γίνεται με συνεχή τρόπο και ότι η C καλύπτει πλήρως τον τόπο D. Το θεώρημα γενικεύεται και αποδεικνύεται στη βιβλιογραφία ότι ισχύει και για άλλες μορφές της καμπύλης C και του τόπου D.

[7] Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, και απόδειξη του θεωρήματος παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 4.



Σχήμα 20.1.7 - 1: Θεώρημα του Green.

Έστω τώρα ότι στο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$, οι συνιστώσες του P και Q επαληθεύουν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 20.1.7 - 1. Τότε έχοντας υπόψη τον τύπο $(20.1.2 - 10)$, οπότε ο τύπος $(20.1.7 - 1)$ γράφεται

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r} &= \oint_C P\,dx + Q\,dy \\ &= \iint_D (Q_x - P_y)\;dx\,dy. \qquad (20.1.7 - 2)\end{aligned}$$

Ο τύπος $(20.1.7 - 2)$ θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια για τους υπολογισμούς.

Παράδειγμα 20.1.7 - 1

Με το Θεώρημα του Green να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\oint_C F\cdot d\,r$, όταν

$$\mathbf{F} = \left(5 - xy - y^2\right)\,\mathbf{i} + \left(x^2 - 2xy\right)\,\mathbf{j}$$

και C το τετράγωνο με κορυφές $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,0)$ και $(1,1)$, που διαγράφεται δεξιόστροφα.

Λύση. Από την έκφραση του διανυσματικού πεδίου έχουμε ότι, αν

$$F = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} = \left(5 - xy - y^2\right)\,i + \left(x^2 - 2xy\right)\,j,$$

τότε

$$P = 5 - xy - y^2 \quad \text{και} \quad Q = x^2 - 2xy. \tag{1}$$

Η καμπύλη C προφανώς πληροί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 20.1.7 - 1, ενώ το τετράγωνο D που ορίζει, περιγράφεται ως εξής:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \right\}.$$

Επομένως στο διπλό ολοκλήρωμα έχουμε την ολοκληρωτέα συνάρτηση $Q_x - P_y$ να ορίζεται σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο[8] από τους τύπους (20.1.7–2) και (1) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\oint_C F \cdot dr &= \iint_D (Q_x - P_y)\, dx\, dy \\
&= \iint_D [(2x - 2y) - (-x - 2y)]\, dx\, dy \\
&= 3 \int_0^1 \left[\int_0^1 x\, dx \right] dy = 3 \int_0^1 \left. \frac{x^2}{2} \right|_{x=0}^{x=1} dy \\
&= \frac{3}{2} \int_0^1 dy = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 20.1.7 - 2

Όμοια με το Θεώρημα του Green να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\oint_C xy\, dx + x^2 y^3\, dy,$$

όταν C το τρίγωνο με κορυφές $(0,0)$, $(1,0)$ και $(1,2)$, που διαγράφεται δεξιόστροφα (Σχ. 20.1.7 - 2).

Λύση. Προφανώς είναι

$$P = xy \quad \text{και} \quad Q = x^2 y^3. \tag{2}$$

---

[8]Βλέπε Μάθημα *Πολλαπλά ολοκληρώματα* Κεφ. *Διπλά ολοκληρώματα - Μέθοδοι υπολογισμού Περίπτωση Ι.*

Όμοια η καμπύλη C πληροί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 20.1.7 - 1, ενώ το τρίγωνο D που ορίζει, σύμφωνα και με το (Σχ. 20.1.7 - 2) περιγράφεται ως εξής:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2x \right\}.$$

Επομένως από τους τύπους (20.1.7 − 1) και (2) προκύπτει ότι[9]

$$\begin{aligned}
\oint_C xy\,dx + x^2y^3\,dy &= \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy \\
&= \iint_D \left(2xy^3 - x\right)\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^{2x} \left(2xy^3 - x\right)\,dy\right]dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}\,xy^4 - xy\right]_{y=0}^{y=2x} dx \\
&= \int_0^1 \left(8\,x^5 - 2\,x^2\right)\,dx = \left[\frac{4}{3}\,x^6 - \frac{2}{3}\,x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

■

20.2 Επιφανειακά ολοκληρώματα

20.2.1 Παραμετρικός ορισμός επιφάνειας

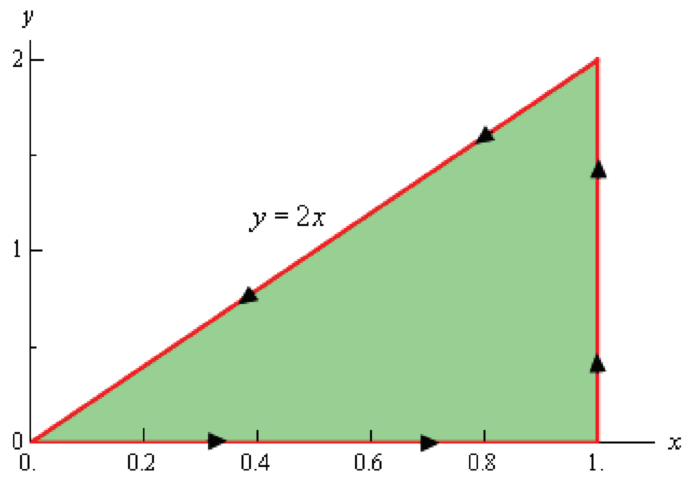
[10]Είναι ήδη γνωστό στον αναγνώστη ότι η έννοια της καμπύλης ορίστηκε με τη βοήθεια της κίνησης ενός υλικού σημείου που έχει έναν βαθμό ελευθερίας. Με τη βοήθεια τώρα μιας ανάλογης κίνησης δίνεται ο παρακάτω ορισμός της επιφάνειας:

---

[9]Όμοια βλέπε Μάθημα *Πολλαπλά ολοκληρώματα* Κεφ. *Διπλά ολοκληρώματα - Μέθοδοι υπολογισμού Περίπτωση ΙΙ.*

[10]Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 3, 4, 5, 6] και στη μαθηματική βάση δεδομένων

http://en.wikipedia.org/wiki/Surface_integral



Σχήμα 20.1.7 - 2: Παράδειγμα 20.1.7 - 2.

Ορισμός 20.2.1 - 1 (επιφάνειας). *Ορίζεται ως επιφάνεια ο γεωμετρικός τόπος των θέσεων ενός υλικού σημείου, που κινείται στον χώρο και έχει* **δύο** *βαθμούς ελευθερίας.*

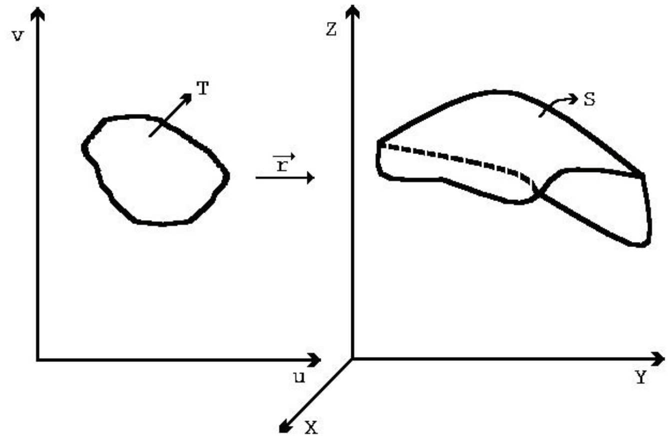
Αν λοιπόν για την παραμετρική παράσταση μιας καμπύλης απαιτείται η χρήση μιας παραμέτρου, τώρα για την παραμετρική παράσταση μιας επιφάνειας (Σχ. 20.2.1 - 1) απαιτούνται δύο παράμετροι, που συνήθως συμβολίζονται με u και v. Επομένως, αν $M(x, y, z)$ είναι ένα τυχόν σημείο μιας επιφάνειας S, οι καρτεσιανές συντεταγμένες x, y και z θα εκφράζονται συναρτήσει των παραμέτρων u και v ως εξής:

$$x = X(u, v), \quad y = Y(u, v) \quad \text{και} \quad z = Z(u, v), \qquad (20.2.1 - 1)$$

οπότε για το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}$ του σημείου M πρέπει

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = X(u, v)\,\mathbf{i} + Y(u, v)\,\mathbf{j} + Z(u, v)\,\mathbf{k}, \qquad (20.2.1 - 2)$$

όταν $(u, v) \in T$ με T έναν τόπο του χώρου των δύο διαστάσεων στον οποίο μεταβάλλονται οι παράμετροι u και v, αντίστοιχα. Η $(20.2.1 - 2)$ ορίζει τότε την **παραμετρική εξίσωση** των σημείων της επιφάνειας S.



Σχήμα 20.2.1 - 1: παραμετρική παράσταση επιφάνειας.

Παράδειγμα 20.2.1 - 1

Ζητείται η παραμετρική εξίσωση των σημείων της επιφάνειας της σφαίρας με εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Λύση. Είναι γνωστό ότι οι σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ) ορίζονται από τις σχέσεις (Σχ. 20.2.1 - 2)

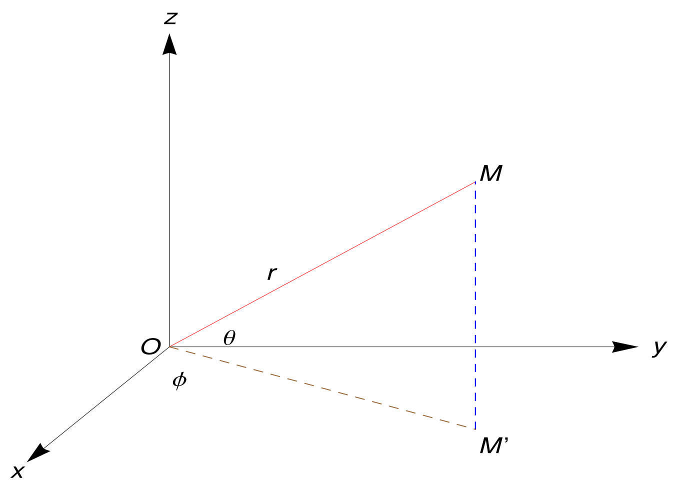
$$\begin{gathered} x = r\cos\theta\cos\phi, \quad y = r\cos\theta\sin\phi, \quad z = r\sin\theta \\ \text{με } r \geq 0 \quad \text{και} \quad \phi \in [0, 2\pi), \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{gathered} \tag{20.2.1 - 3}$$

Επομένως αντιστοιχώντας τους τύπους (20.2.1–3) με τους τύπους (20.2.1–1), δηλαδή

$$\phi \to u \quad \text{και} \quad \theta \to v$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} x &= R\cos u\cos v = X(u, v), \\ y &= R\sin u\cos v = Y(u, v), \qquad \text{όταν} \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \\ z &= R\sin v = Z(u, v), \end{aligned}$$



Σχήμα 20.2.1 - 2: οι σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ).

Ο τόπος που μεταβάλλονται οι παράμετροι u και v είναι στην περίπτωση αυτή το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ (Σχ. 20.2.1 - 3).

Τότε η **παραμετρική εξίσωση της επιφάνειας της σφαίρας** θα είναι

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = R\cos u \cos v\,\mathbf{i} + R\sin u\cos v\,\mathbf{j} + R\sin v\,\mathbf{k}. \qquad (20.2.1 - 4)$$

■

Σημείωση 20.2.1 - 1

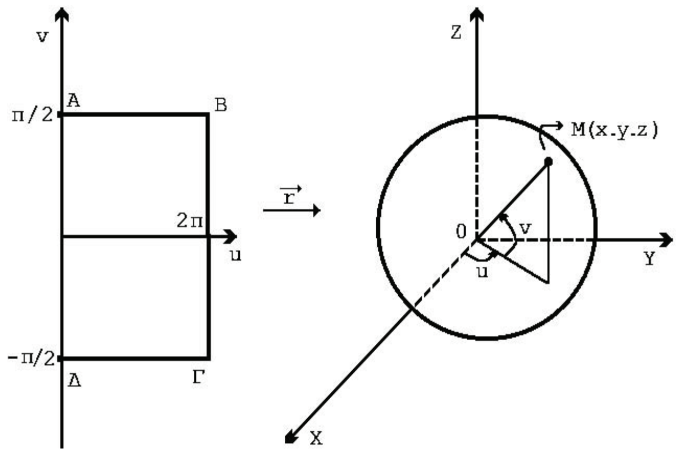
Στην περίπτωση που ζητείται η παραμετρική εξίσωση των σημείων του **άνω ημισφαιρίου**, χρησιμοποιείται όμοια ο τύπος $(20.2.1 - 4)$ με

$$(u, v) \in [0, 2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

20.2.2 Θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο

Έστω μία επιφάνεια S με παραμετρική εξίσωση της μορφής $(20.2.1 - 2)$, δηλαδή

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = X(u, v)\,\mathbf{i} + Y(u, v)\,\mathbf{j} + Z(u, v)\,\mathbf{k}.$$



Σχήμα 20.2.1 - 3: παραμετρική παράσταση σφαίρας.

Υποθέτοντας ότι οι συναρτήσεις X, Y και Z έχουν τουλάχιστον 1ης τάξης μερικές παραγώγους ως προς u και v, από την παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u}\,\mathbf{i} + \frac{\partial Y}{\partial u}\,\mathbf{j} + \frac{\partial Z}{\partial u}\,\mathbf{k},$$

ή

$$\mathbf{r}_u = X_u\,\mathbf{i} + Y_u\,\mathbf{j} + Z_u\,\mathbf{k}.$$

Τότε σύμφωνα με τη γεωμετρική σημασία της παραγώγου το διάνυσμα $\mathbf{r}_u$ είναι **κάθετο** στο $\mathbf{r}$ στο σημείο M και ορίζει το διάνυσμα της **ταχύτητας** κατά την u-καμπύλη.

Όμοια υπολογίζεται το

$$\mathbf{r}_v = X_v\,\mathbf{i} + Y_v\,\mathbf{j} + Z_v\,\mathbf{k},$$

που είναι επίσης **κάθετο** στο $\mathbf{r}$ στο σημείο M και ορίζει το διάνυσμα ταχύτητας κατά την v-καμπύλη.

Έστω τώρα το **εξωτερικό γινόμενο**

$$\mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \qquad (20.2.2 - 1)$$

που κατά τα γνωστά,[11] όταν

$$\mathbf{w} \neq \mathbf{0},$$

δηλαδή τα διανύσματα

$$\mathbf{r}_u \quad \text{και} \quad \mathbf{r}_v$$

δεν είναι συγγραμμικά, οπότε είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τότε το εξωτερικό γινόμενο

- ορίζει ένα διάνυσμα $\mathbf{w}$ κάθετο στα διανύσματα $\mathbf{r}_u$ και $\mathbf{r}_v$, τέτοιο ώστε μαζί με αυτά να αποτελεί δεξιόστροφο σύστημα, και
- το μέτρο του $|\mathbf{w}|$ ισούται με το **εμβαδόν** του παραλληλογράμμου που ορίζεται με πλευρές τα μέτρα των διανυσμάτων $\mathbf{r}_u$ και $\mathbf{r}_v$.

Στην $(20.2.2-1)$ το $\mathbf{w}$ λέγεται **θεμελιώδες διάνυσμα** (fundamental vector), ενώ το εξωτερικό γινόμενο του 2ου μέλους **θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο** (fundamental vector product).

Αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 20.2.2 - 1. *Αν $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ είναι το διάνυσμα θέσης τυχόντος σημείου M της επιφάνειας S, τότε το θεμελιώδες διάνυσμα είναι* ***κάθετο*** *σε κάθε συνεχή καμπύλη, που διέρχεται από το M.*

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 20.2.2 - 1 (εφαπτόμενο επίπεδο). *Έστω ότι $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ είναι το διάνυσμα θέσης τυχόντος σημείου M της επιφάνειας S. Τότε ορίζεται ως εφαπτόμενο επίπεδο (tangent plane) της επιφάνειας S στο σημείο της $M(u, v)$ και συμβολίζεται με $T(M)$, το επίπεδο που ορίζεται από τις διευθύνσεις των $\mathbf{r}_u$ και $\mathbf{r}_v$ στο M.*

Τότε το διάνυσμα που ορίζει το εξωτερικό γινόμενο

$$\mathbf{w} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$$

[11] Βλέπε Μάθημα *Ανώτερα Μαθηματικά - Διανύσματα*.

θα είναι **κάθετο** στο επίπεδο $T(M)$ και θα έχει αντίστοιχο **μοναδιαίο διάνυσμα** (unit normal vector) το

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \,. \tag{20.2.2 - 2}$$

Έστω τώρα ότι η παράμετρος u είναι σταθερή και η παράμετρος v παριστάνει τον χρόνο. Τότε

- το
  $$|\mathbf{r}_v|$$
  παριστάνει την **επιτρόχια ταχύτητα**, ενώ
- το γινόμενο
  $$|\mathbf{r}_v|\,\Delta v$$
  το **διανυθέν διάστημα** κατά τη v-καμπύλη.
- Όμοια το
  $$|\mathbf{r}_u|\,\Delta u$$
  θα παριστάνει το διανυθέν διάστημα κατά την u-καμπύλη.

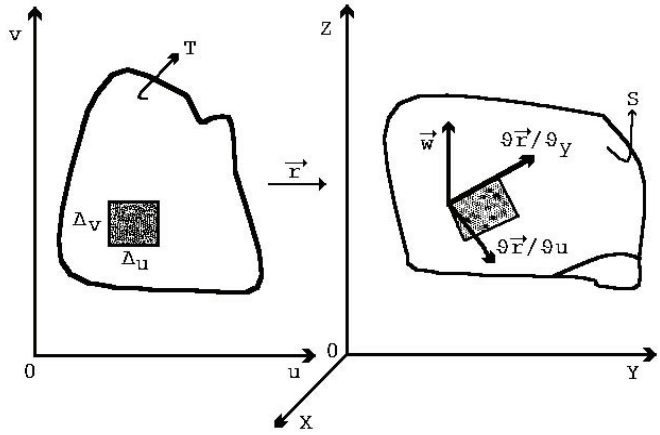
Σύμφωνα και με το Σχ. 20.2.2 - 1 πρέπει στην περίπτωση αυτή το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις Δu και Δv να απεικονίζεται μέσω της $\mathbf{r}$ σε ένα παραλληλόγραμμο - με την ευρεία έννοια του όρου - επί της επιφάνειας S, που ορίζεται από τα διανύσματα

$$\mathbf{r}_u\,\Delta u \quad \text{και} \quad \mathbf{r}_v\,\Delta v$$

και το οποίο έχει εμβαδόν

$$\Delta S = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,\Delta u\,\Delta v. \tag{20.2.2 - 3}$$

Το ΔS είναι δυνατόν να θεωρηθεί τότε ως το **στοιχειώδες εμβαδόν** της επιφάνειας S.



Σχήμα 20.2.2 - 1: το θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο $\mathbf{w}$ και αντίστοιχο θεμελιώδες εμβαδόν.

Παράδειγμα 20.2.2 - 1

Ζητείται το θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο της επιφάνειας με διανυσματική εξίσωση (Σχ. 20.2.2 - 2a)

$$\mathbf{r}(u,v) = (u+v)\,\mathbf{i} + (u-v)\,\mathbf{j} + v^2\,\mathbf{k}.$$

Λύση. Είναι

$$X(u,v) = u+v, \quad Y(u,v) = u-v \quad \text{και} \quad Z(u,v) = v^2.$$

Τότε

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{i}+\mathbf{j} \quad \text{και} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{i}-\mathbf{j}+2v\,\mathbf{k},$$

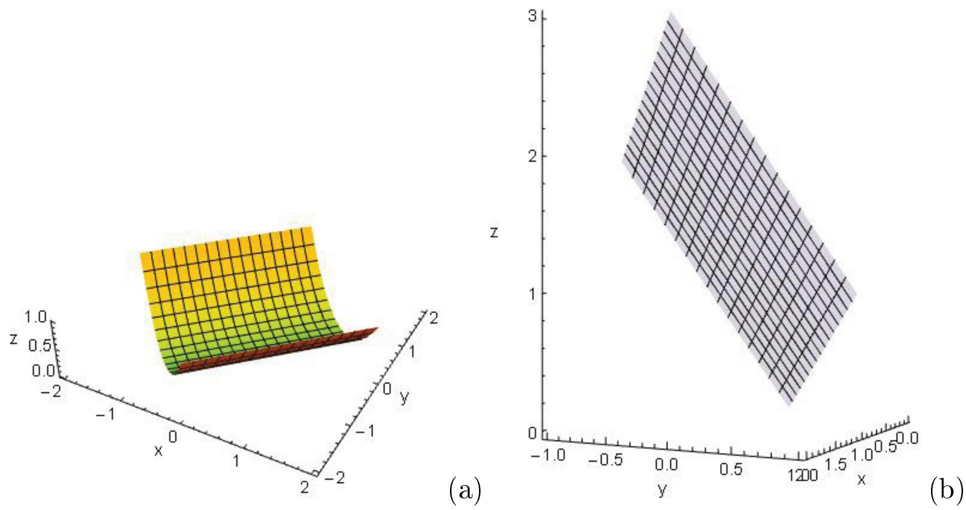
οπότε

$$\mathbf{w} = 2v\,\mathbf{i} - 2v\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}.$$

■

Άσκηση

Να υπολογιστεί το θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο των παρακάτω επιφανειών με παραμετρικές εξισώσεις:

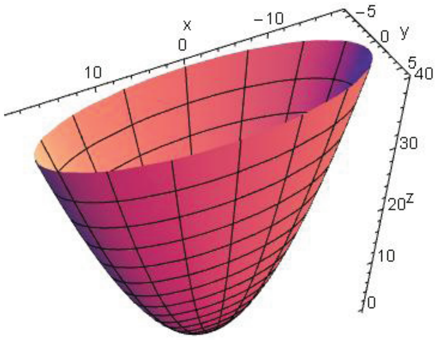


Σχήμα 20.2.2 - 2: Η επιφάνεια S στο: (a) Παράδειγμα 20.2.2 - 1 και (b) στην Άσκηση (i), όταν $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, $a_1 = a_2 = a_3 = b_1 = 1$, $b_2 = -1$, και $b_3 = 2$.

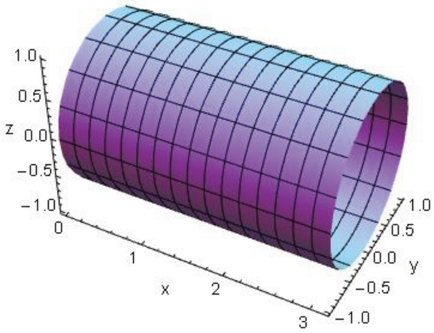
i) $\mathbf{r}(u, v) = (x_0 + a_1 u + b_1 v)\,\mathbf{i} + (y_0 + a_2 u + b_2 v)\,\mathbf{j} + (z_0 + a_3 u + b_3 v)\,\mathbf{k}$
επίπεδο - plane - (Σχ. 20.2.2 - 2b).

ii) $\mathbf{r}(u, v) = au\cos v\,\mathbf{i} + bu\sin v\,\mathbf{j} + u^2\,\mathbf{k}$
ελλειπτικό παραβολοειδές - elliptic paraboloid - (Σχ. 20.2.2 - 3a), ενώ το αντίστοιχο **υπερβολικό παραβολοειδές** - elliptic paraboloid $\mathbf{r}(u, v) = a(u + v)\,\mathbf{i} \pm bv\,\mathbf{j} + \left(u^2 + 2uv\right)\,\mathbf{k}$.

iii) $\mathbf{r}(u, v) = u\,\mathbf{i} + a\sin v\,\mathbf{j} + a\cos v\,\mathbf{k}$
κυκλικός κύλινδρος (cylinder) με βάση στο yz-επίπεδο ακτίνας a (Σχ. 20.2.2 - 3b). Ο αντίστοιχος κυκλικός κύλινδρος με βάση στο xy-επίπεδο ακτίνας a έχει παραμετρική εξίσωση $\mathbf{r}(u, v) = a\sin v\,\mathbf{i} + a\cos v\,\mathbf{j} + u\,\mathbf{k}$, ενώ ο **ελλειπτικός κύλινδρος** με βάση στο xy-επίπεδο και ημιάξονες a, b την $\mathbf{r}(u, v) = a\sin v\,\mathbf{i} + b\cos v\,\mathbf{j} + u\,\mathbf{k}$



(a)



(b)

Σχήμα 20.2.2 - 3: Η επιφάνεια S στην: (a) Άσκηση (ii), όταν $a3$, $b=1$ και (b) Άσκηση (iii), όταν $a=1$.

iv) $\mathbf{r}(u,v) = R\cos v\cos u\,\mathbf{i} + R\sin u\cos v\,\mathbf{j} + R\sin v\,\mathbf{k}$
σφαίρα (sphere) ακτίνας R - (Σχ. 20.2.2 - 4a),

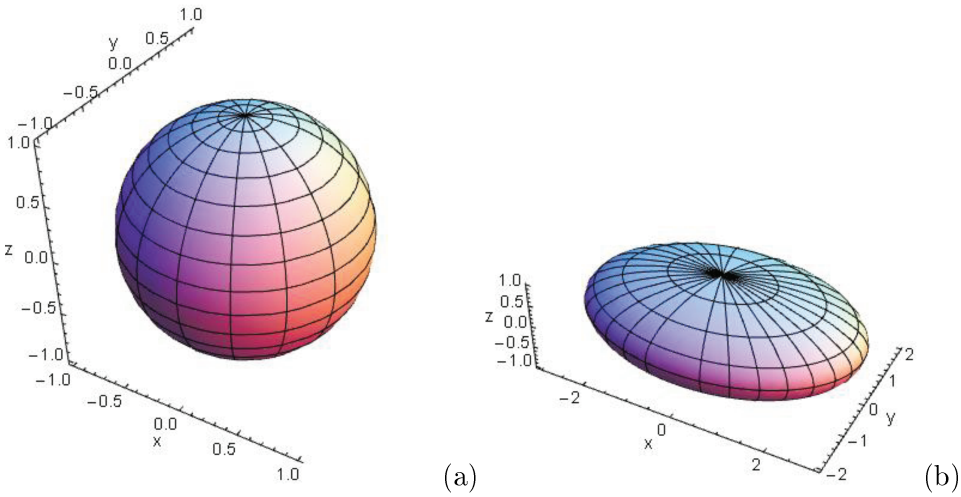
v) $\mathbf{r}(u,v) = a\sin u\cos v\,\mathbf{i} + b\sin u\sin v\,\mathbf{j} + c\cos u\,\mathbf{k}$
ελλειψοειδές -ellipsoid - (Σχ. 20.2.2 - 4b).

Η εντολή υπολογισμού του θεμελιώδους διανυσματικού γινομένου της Άσκησης (v) με το MATHEMATICA είναι:

```
X[u_, v_] := a Sin[u] Cos[v]
Y[u_, v_] := b Sin[u] Sin[v]
Z[u_, v_] := c  Cos[u]
Ru = {D[X[u, v], u], D[Y[u, v], u], D[Z[u, v], u]}
Rv = {D[X[u, v], v], D[Y[u, v], v], D[Z[u, v], v]}
w = Simplify[Cross[Ru, Rv]]
|w| = FullSimplify[Sqrt[vct.vct]]
```

ενώ του αντίστοιχου τριδιάστατου γραφικού

```
a = 3; b = 2; c = 1;
ParametricPlot3D[{X[u, v], Y[u, v], Z[u, v]},
{u, 0,2 Pi}, {v, -Pi/2, Pi/2}, Boxed -> False,
  AxesLabel -> {"x", "y  ", "z   "},
  PlotStyle -> {LightYellow, Thick},
  BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 14}]
```



Σχήμα 20.2.2 - 4: Η επιφάνεια S στην: (a) Άσκηση (iv), όταν $R = 1$ και (b) Άσκηση (v), όταν $a = 2$, $b = 2$ και $c = 1$.

Απαντήσεις

(i) $\mathbf{w} = (-a_3 b_2 + a_2 b_3)\,\mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\mathbf{j} + (-a_2 b_1 + a_1 b_2)\,\mathbf{k}$,

(ii) $\mathbf{w} = -2bu^2 \cos v\,\mathbf{i} - 2au^2 \sin v\,\mathbf{j} + abu\,\mathbf{k}$, (iii) $\mathbf{w} = a \sin v\,\mathbf{j} + a \cos v\,\mathbf{k}$,

(iv) $\mathbf{w} = R^2 \cos u \cos^2 v\,\mathbf{i} + R^2 \sin u \cos^2\,\mathbf{j} + R^2 \sin u \cos v\,\mathbf{k}$,

(v) $\mathbf{w} = bc \sin^2 u \cos v\,\mathbf{i} + ac \sin^2 u \sin v\,\mathbf{j} + ab \cos u \sin u\,\mathbf{k}$.

20.2.3 Φυσική ερμηνεία και ορισμός

Για να γίνει περισσότερο κατανοητή η έννοια, το επιφανειακό ολοκλήρωμα δίνεται ως ένα παράδειγμα από τη μελέτη της ροής των ρευστών.

Αν (x, y, z) είναι ένα τυχόν σημείο του ρευστού, τότε έστω $\rho = \rho(x, y, z)$ η πυκνότητα και $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z)$ η αντίστοιχη ταχύτητα, που θεωρείται ότι μεταβάλλονται σε κάθε σημείο του ρευστού και ορίζουν η 1η ένα βαθμωτό πεδίο (πυκνοτήτων) και η 2η ένα διανυσματικό πεδίο (ταχυτήτων).

Τότε ορίζεται το διανυσματικό πεδίο **πυκνοτήτων ροής** του ρευστού ως

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \rho(x, y, z)\mathbf{v}(x, y, z)$$

και μετρά τη μεταβολή της μάζας του ρευστού ανά μονάδα εμβαδού στο σημείο (x, y, z).

Έστω τώρα ότι ζητείται να υπολογιστεί η **ολική μάζα** του ρευστού, που διέρχεται από μία επιφάνεια S στη μονάδα του χρόνου. Υποτίθεται ότι η παραμετρική εξίσωση της S είναι της μορφής $(20.2.1-2)$, δηλαδή

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v) = X(u,v)\,\mathbf{i} + Y(u,v)\,\mathbf{j} + Z(u,v)\,\mathbf{k}, \quad \text{όταν} \quad (u,v) \in T \tag{20.2.3 - 1}$$

και ότι ο τόπος T έχει το σχήμα ορθογώνιου παραλληλογράμμου, όπου οι συναρτήσεις X, Y και Z παραγωγίζονται ως προς u και v αντίστοιχα.

Έστω επίσης ότι ο τόπος T έχει διαμεριστεί στα επιμέρους ορθογώνια παραλληλόγραμμα

$$T_1, \quad T_2, \quad \ldots, \quad T_\nu. \tag{20.2.3 - 2}$$

Τότε, επειδή μέσω της $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$, όπως αυτή ορίζεται στην $(20.2.3-1)$, είναι

$$\mathbf{r} : T \quad \longrightarrow \quad S,$$

σύμφωνα με τις διαμερίσεις $(20.2.3-2)$ θα έχουμε

$$\mathbf{r} \,:\, T_1 \quad \to \quad S_1, \quad \mathbf{r} \,:\, T_2 \quad \to \quad S_2, \ldots, \mathbf{r} \,:\, T_\nu \quad \to \quad S_\nu,$$

δηλαδή η επιφάνεια S διαμερίζεται στις επιμέρους επιφάνειες

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_\nu$$

με αντίστοιχα εμβαδά

$$E_1, \quad E_2, \quad \ldots, \quad E_\nu.$$

Υποθέτοντας ότι η πυκνότητα ρ και η ταχύτητα $\mathbf{v}$ στην επιφάνεια S_k για κάθε $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, \nu$ είναι σταθερές, ο όγκος του ρευστού που διέρχεται από την επιφάνεια S_k, θα ισούται με τον όγκο του στερεού, που έχει βάση E_k παράπλευρες ακμές παράλληλες προς το διάνυσμα $\mathbf{v}$ και ύψος $h_k = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$, όπου $\mathbf{n} = \mathbf{w}/|\mathbf{w}|$ το **μοναδιαίο διάνυσμα** κατά τη διεύθυνση του θεμελιώδους διανύσματος

$$\mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

και το οποίο όπως είναι ήδη γνωστό από την Παράγραφο 20.2.2 είναι **κάθετο** στην επιφάνεια S_k για κάθε $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, \nu$ (Σχ. 20.2.3 - 1).

Η μάζα του ρευστού που διέρχεται από την επιφάνεια S_k στην περίπτωση αυτή είναι

$$m_k = \rho V_k = \rho \left(E_k h_k\right) = \rho E_k \left(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\right) = E_k \left(\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\right) = E_k \left(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\right)$$

για κάθε $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, \nu$ και κατά συνέπεια η ολική μάζα M ισούται με

$$M = \sum_{k=1}^{\nu} m_k = \sum_{k=1}^{\nu} E_k \left(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\right).$$

Έστω

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \varphi,$$

όταν λόγω του εσωτερικού γινομένου το φ είναι **βαθμωτό μέγεθος**. Τότε σύμφωνα με τον τύπο $(20.2.2 - 3)$ είναι

$$E_k = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \Delta u_k \, \Delta v_k,$$

οπότε τελικά

$$M = \sum_{k=1}^{n} \varphi \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \Delta u_k \, \Delta v_k. \qquad (20.2.3 \text{ - } 3)$$

Υποθέτοντας ότι το γινόμενο

$$\varphi \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|$$

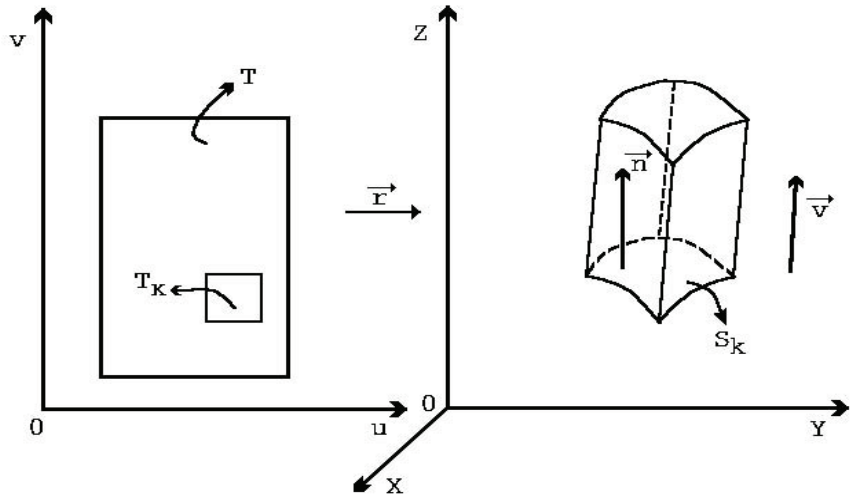
έχει **σταθερή τιμή** σε κάθε ανοικτό ορθογώνιο T_k, η ποσότητα αυτή ορίζει μία κλιμακωτή συνάρτηση, οπότε με ανάλογο συλλογισμό εκείνου του ορισμού του διπλού ολοκληρώματος,[12] όταν το ν τείνει στο άπειρο, δηλαδή ο διαμερισμός του T γίνεται, έτσι ώστε οι αντίστοιχες μέσω της $\mathbf{r}$ επιφάνειες S_k να έχουν διαγώνιο που τείνει στο μηδέν, δηλαδή **απειροστή επιφάνεια** ds, η $(20.2.3{-}3)$ εκφράζεται με τη μορφή ενός διπλού ολοκληρώματος με μεταβλητές u και v, δηλαδή

$$M = \iint_T \varphi \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du \, dv. \qquad (20.2.3 \text{ - } 4)$$

Σύμφωνα και με την $(20.2.3 - 4)$ έχουμε τους παρακάτω ορισμούς του επιφανειακού ολοκληρώματος.

---

[12] Βλέπε Μάθημα *Πολλαπλά Ολοκληρώματα - Διπλά ολοκληρώματα.*



Σχήμα 20.2.3 - 1: φυσική ερμηνεία επιφανειακού ολοκληρώματος.

Σε βαθμωτό πεδίο (1ο είδος)

Ορισμός 20.2.3 - 1. *Έστω S μία επιφάνεια με παραμετρική εξίσωση*

$$\mathbf{r}(u,v) = X(u,v)\,\mathbf{i} + Y(u,v)\,\mathbf{j} + Z(u,v)\,\mathbf{k}, \quad \text{όταν} \quad (u,v) \in T$$

και φ μία **βαθμωτή** *συνάρτηση που ορίζεται επί της S. Τότε ορίζεται ως επιφανειακό ολοκλήρωμα του 1ου είδους της φ επί της S το*

$$\iint_S \varphi\, ds = \iint_T \varphi\,[\mathbf{r}(u,v)] \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du\, dv, \qquad (20.2.3 - 5)$$

όταν το τελευταίο ολοκλήρωμα υπάρχει.

Εφαρμογές του επιφανειακού ολοκληρώματος του 1ου είδους θα δοθούν στην Παράγραφο 20.2.4, που ακολουθεί.

Σε διανυσματικό πεδίο (2ο είδος)

Ορισμός 20.2.3 - 2. *Έστω S μία επιφάνεια με παραμετρική εξίσωση*

$$\mathbf{r}(u,v) = X(u,v)\,\mathbf{i} + Y(u,v)\,\mathbf{j} + Z(u,v)\,\mathbf{k}, \quad \text{όταν} \quad (u,v) \in T$$

και $\mathbf{F}$ *μία* **διανυσματική** *συνάρτηση που ορίζεται επί της* S. *Τότε ορίζεται ως επιφανειακό ολοκλήρωμα του* 2*ου είδους της* $\mathbf{F}$ *επί της* S *το*

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{s} = \iint_T \mathbf{F}\,[\mathbf{r}(u,v)] \cdot \mathbf{w}\, du\, dv, \qquad (20.2.3 - 6)$$

όταν

$$\mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

το διάνυσμα του θεμελιώδους γινομένου και το ολοκλήρωμα $(20.2.3 - 6)$ *υπάρχει.*

Σημειώσεις 20.2.3 - 1

- Στην περίπτωση που η επιφάνεια είναι κλειστή, τότε χρησιμοποιείται ο συμβολισμός
$$\oint\!\!\oint_S \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{s}. \qquad (20.2.3 - 7)$$
- Το επιφανειακό ολοκλήρωμα $(20.2.3 - 6)$ εκφράζει τη **ροή** (flux) του πεδίου F στην επιφάνεια S (βλέπε Παράγραφο 20.2.3).

Παράδειγμα 20.2.3 - 1

Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

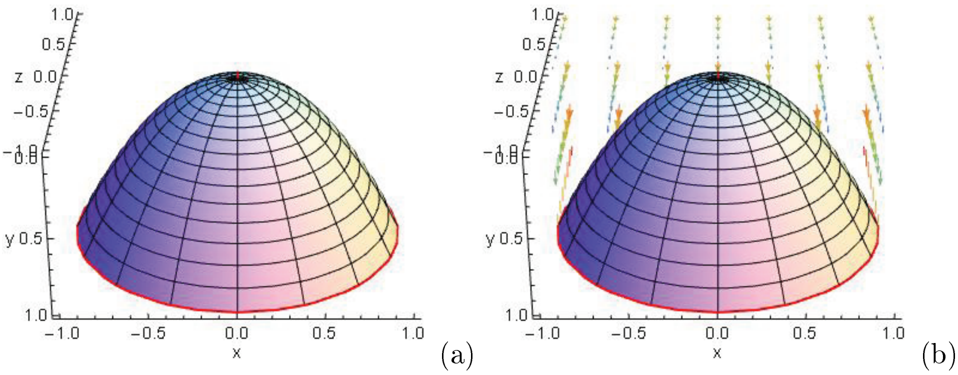
όταν S το παραβολοειδές (Σχ. 20.2.3 - 2a)

$$y = x^2 + z^2, \quad y \in [0,1] \quad \text{και} \quad x^2 + z^2 \leq 1, \quad \text{όταν} \quad y = 1$$

και F το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = y\,\mathbf{j} - z\,\mathbf{k} \quad (\Sigma\chi.\ 20.2.3 - 2a).$$

Λύση. Η εξίσωση του παραβολοειδούς είναι της μορφής $y = g(x,z)$, οπότε μια παραμετρική εξίσωσή του είναι δυνατόν να προκύψει από την παραμετρική



Σχήμα 20.2.3 - 2: Παράδειγμα 20.2.3 - 1: (a) η επιφάνεια S - **παραβολοειδές** με βάση (κόκκινη καμπύλη) στο xz-επίπεδο και θετική φορά διαγραφής - με παραμετρική εξίσωση $\mathbf{r}(u,v) = v\sin u\,\mathbf{i} + v^2\,\mathbf{j} + v\cos u\,\mathbf{k}$ και (b) η ροή του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F} = y\,\mathbf{j} - z\,\mathbf{k}$ στην S.

εξίσωση της $g(x,z)$, που είναι στην περίπτωση αυτή ο κυκλικός δίσκος στο xz-επίπεδο κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $R=1$.

Άρα χρησιμοποιώντας τους γνωστούς τύπους για την παραμετρική μορφή περιφέρειας (πολικές συντεταγμένες)[13] έχουμε

$$x = R\cos\theta, \quad z = R\sin\theta, \quad \text{όταν} \quad \theta \in [0,2\pi], \quad R \in [0,1].$$

Έστω

$$\theta \to u \quad \text{και} \quad R = v.$$

Επειδή η εξίσωση του παραβολοειδούς είναι $y = x^2 + z^2$, σύμφωνα με την παραπάνω παραμετρική μορφή των x, y πρέπει $y = v^2\sin^2 u + v^2\cos^2 u = v^2$, οπότε η παραμετρική εξίσωση είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u,v) &= X(u,v)\,\mathbf{i} + Y(u,v)\,\mathbf{j} + Z(u,v)\,\mathbf{k} \\ &= v\sin u\,\mathbf{i} + v^2\,\mathbf{j} + v\cos u\,\mathbf{k}, \end{aligned}$$

όταν

$$T = \{(u,v):\ u \in [0,2\pi] \quad \text{και} \quad v \in [0,1]\}\,.$$

[13] Βλέπε Μάθημα *Διανυσματικές Συναρτήσεις*.

Τότε

$$\begin{aligned} x &= X(u,v) = v\sin u, \quad y = Y(u,v) = v^2 \quad \text{και} \\ z &= Z(u,v) = v\cos u. \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\left[\mathbf{r}(u,v)\right] &= \mathbf{F} = y\,\mathbf{j} - z\,\mathbf{k} \\ &= v^2\,\mathbf{j} - v\cos u\,\mathbf{k} = \left\langle 0, v^2, -v\cos u\right\rangle. \qquad (20.2.3 - 8) \end{aligned}$$

Είναι

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} &= v\cos u\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} - v\sin u\,\mathbf{k}, \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= \sin u\,\mathbf{i} + 2v\,\mathbf{j} + \cos u\,\mathbf{k}, \end{aligned}$$

οπότε το θεμελιώδες γινόμενο θα ισούται με

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v\cos u & 0 & -v\sin u \\ \sin u & 2v & \cos u \end{vmatrix} \\ &= 2v^2\sin u\,\mathbf{i} - v\,\mathbf{j} + 2v^2\cos u\,\mathbf{k} \\ &= \left\langle 2v^2\sin u, -v, 2v^2\cos u\right\rangle. \qquad (20.2.3 - 9) \end{aligned}$$

Από τις $(20.2.3-8)$ και $(20.2.3-9)$ προκύπτει τότε ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\cdot\mathbf{w} &= \left\langle 0, v^2, -v\cos u\right\rangle \cdot \left\langle 2v^2\sin u, -v, 2v^2\cos u\right\rangle \\ &= -v^3\left(1 + 2\cos^2 u\right), \qquad (20.2.3 - 10) \end{aligned}$$

οπότε αντικαθιστώντας στον τύπο $(20.2.3-6)$ διαδοχικά έχουμε

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} &= \iint\limits_{T} \mathbf{F}\left[\mathbf{r}(u,v)\right]\cdot \mathbf{w}\, du\, dv \\
&= -\int_{0}^{2\pi} \left(1+2\cos^2 u\right)\left[\int_{0}^{1} v^3\, dv\right] du \\
&= -\int_{0}^{2\pi} \left(1+2\cos^2 u\right)\left[\frac{v^4}{4}\, dv\right] du \\
&= -\frac{1}{4}\int_{0}^{2\pi} \left(1+2\cos^2 u\right)\, du \\
&= -\frac{1}{4}\int_{0}^{2\pi} \left[1+2\left(\frac{1+\cos 2u}{2}\right)\right] du \\
&= -\frac{1}{4}\left[2u+\frac{1}{2}\sin 2u\right]_{0}^{2\pi} = -\pi .
\end{aligned}
$$

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA έγινε με το παρακάτω πρόγραμμα:

Πρόγραμμα 20.2.3 - 1 (επιφανειακού ολοκληρώματος 2ου είδους)

```
Z[u_, v_] := v Cos[ u]
X[u_, v_] := v Sin[u]
Y[u_, v_] := v^2
Ru = {D[X[u, v], u], D[Y[u, v], u], D[Z[u, v], u]};
Rv = {D[X[u, v], v], D[Y[u, v], v], D[Z[u, v], v]};
Print["r_u = ", Ru]; Print["r_v = ", Rv];
vct = Simplify[Cross[Ru, Rv]];
Print["Fundamental Product = ", Simplify[Cross[Ru, Rv]]]
F[u_, v_] := {0, Y[u, v], -Z[u, v]}
Print["F[r(u,v)].w = ", F[u, v].vct]
Integrate[F[u, v].vct, {u, 0, 2 Pi}, {v, 0, 1}]
```

της επιφάνειας S με την εντολή:

```
S = ParametricPlot3D[{X[u, v], Y[u, v], Z[u, v]}, {u, 0, 2 Pi},
  {v,0, 1}, Boxed -> False, AxesLabel -> {"  x  ", "y  ", "z   "},
  PlotStyle -> {LightYellow, Thick},
  BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 14},
  ViewPoint -> {0, -2, -4}, BoundaryStyle -> Directive[Red, Thick]]
```

και του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}$ επί της S:

```
F = VectorPlot3D[{0, y, -z}, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, 0, 1},
  AxesLabel -> {"x", "y", "z"},  BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial",
  FontSize -> 14}, VectorPoints -> 7, VectorScale -> Medium,
  VectorColorFunction -> "Rainbow"]
Show[S,F]
```

■

Άσκηση

Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathrm{s},$$

όταν S το παραβολοειδές $z = 16 - x^2 - y^2$ (Σχ. 20.2.3 - 3a) με $z \geq 0$ και $\mathbf{F}$ το διανυσματικό πεδίο

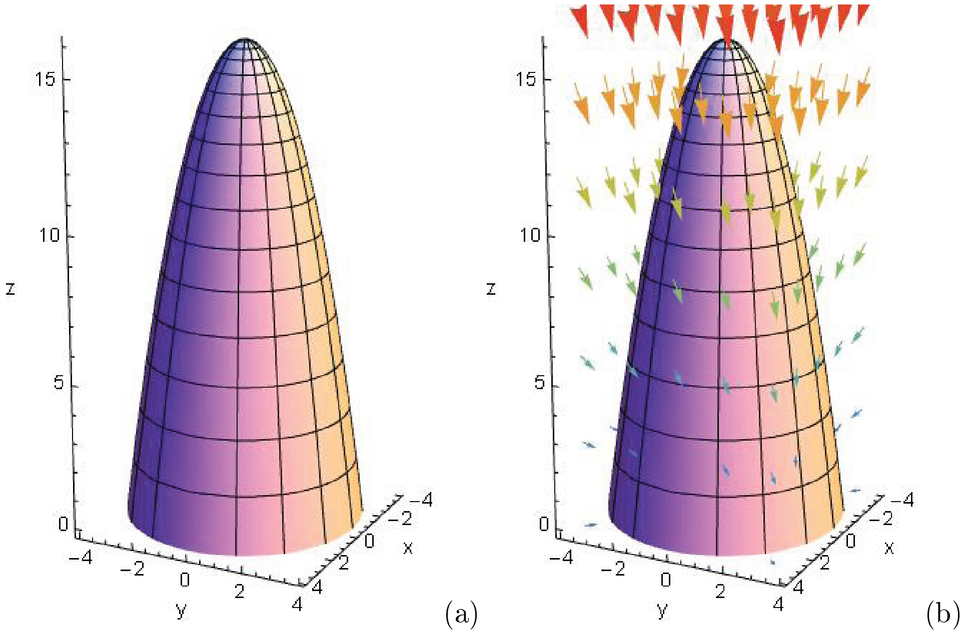
$$\mathbf{F} = y\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \quad (\Sigma\chi.\ 20.2.3 - 3b)$$

με κατεύθυνση την αρνητική φορά του z-άξονα.

Απαντήσεις

Θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο $w = -2v^2 \cos u\, i - 2v^2 \sin u\, j - v\, k$, οπότε

$$\iint_T \mathbf{F}\left[\mathbf{r}(u,v)\right] \cdot w\, du\, dv = \int_0^4 \int_0^{2\pi} \left[-v\left(16 - v^2\right) - 4v^3 \cos u \sin u\right] du\, dv = -128\pi.$$



Σχήμα 20.2.3 - 3: Παράδειγμα 20.2.3 - 1: (a) η επιφάνεια S - **παραβολοειδές** με βάση στο xy-επίπεδο και θετική φορά διαγραφής - με παραμετρική εξίσωση $\mathbf{r}(u,v) = v\cos u\,\mathbf{i} + v\sin u\,\mathbf{j} + \left(16 - v^2\right)\,\mathbf{k}$ και (b) η ροή του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F} = y\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ στην S.

20.2.4 Εφαρμογές επιφανειακού ολοκληρώματος

Οι σημαντικότερες ανάλογα με τη φυσική ερμηνεία της συνάρτησης φ δίνονται στη συνέχεια.

- **εμβαδόν** $\quad \varphi = 1$

  Τότε ο τύπος $(20.2.3 - 5)$ γράφεται

$$\iint\limits_S ds = \iint\limits_T \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv \qquad (20.2.4 - 1)$$

  και εκφράζει το **εμβαδόν** της επιφάνειας S.

- **ολική μάζα**

  Αν η φ παριστάνει την **πυκνότητα** ρ της μάζας ανά μονάδα εμβαδού για το υλικό ενός λεπτού κελύφους, που έχει το σχήμα της επιφανείας S, τότε η **ολική μάζα** M του κελύφους δίνεται από τον τύπο

$$M = \iint\limits_{S} \rho \, ds = \iint\limits_{T} \rho \left[\mathbf{r}(u,v) \right] \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du \, dv. \qquad (20.2.4 - 2)$$

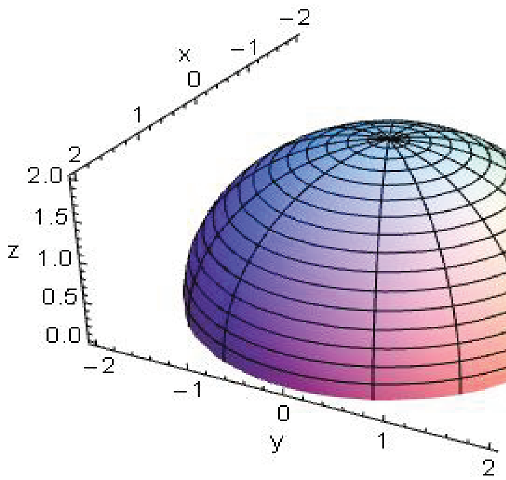
Στην περίπτωση αυτή οι συντεταγμένες $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ του κέντρου μάζας δίνονται από τους τύπους

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{1}{M} \iint\limits_{S} x\rho(x,y,z) \, ds \\ &= \frac{1}{M} \iint\limits_{T} X(u,v) \rho \left[\mathbf{r}(u,v) \right] \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du \, dv, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{y} &= \frac{1}{M} \iint\limits_{S} y\rho(x,y,z) \, ds \\ &= \frac{1}{M} \iint\limits_{T} Y(u,v) \rho \left[\mathbf{r}(u,v) \right] \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du \, dv, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{z} &= \frac{1}{M} \iint\limits_{S} z\rho(x,y,z) \, ds \qquad (20.2.4 - 3) \\ &= \frac{1}{M} \iint\limits_{T} Z(u,v) \rho \left[\mathbf{r}(u,v) \right] \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du \, dv. \end{aligned}$$

- **ροπή αδράνειας**
  Αν $d = d(x,y,z)$ είναι η κάθετη απόσταση από τον άξονα l τυχόντος σημείου $M(x,y,z)$ της επιφάνειας S, τότε η **ροπή αδράνειας** I της S



Σχήμα 20.2.4 - 1: Το άνω ημισφαίριο της σφαίρας του Παραδείγματος 20.2.4 - 1, όταν $R = 2$.

ως προς τον άξονα l είναι

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_l &= \iint_S d^2(x,y,z)\varphi(x,y,z)\,ds \qquad (20.2.4 - 4) \\ &= \iint_T d^2\left[\mathbf{r}(u,v)\right]\varphi\left[\mathbf{r}(u,v)\right]\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 20.2.4 - 1

Ζητείται να υπολογιστεί η επιφάνεια S, η ολική μάζα M και οι συντεταγμένες $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ του κέντρου της μάζας του άνω ημισφαιρίου της σφαίρας (Σχ. 20.2.4 - 1)

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

όταν η πυκνότητα $\rho(x,y,z) = c$ σταθερά.

Λύση. Μια παραμετρική εξίσωση της σφαίρας δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u,v) &= X(u,v)\,\mathbf{i} + Y(u,v)\,\mathbf{j} + Z(u,v)\,\mathbf{k} \\ &= R\cos u\cos v\,\mathbf{i} + R\sin u\cos v\,\mathbf{j} + R\sin v\,\mathbf{k}, \end{aligned}$$

όταν $u \in [0, 2\pi]$ και $v \in [0, \pi/2]$, επειδή πρόκειται για το άνω ημισφαίριο.

Άρα

$$\begin{aligned} x &= X(u,v) = R\cos u \cos v, \\ y &= Y(u,v) = R\sin u \cos v \quad \text{και} \\ z &= R\sin v. \end{aligned} \tag{20.2.4 - 5}$$

Τότε

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} &= -R\sin u \cos v\, \mathbf{i} + R\cos u \cos v\, \mathbf{j} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= -R\cos u \sin v\, \mathbf{i} - R\sin u \sin v\, \mathbf{j} + R\cos v\, \mathbf{k}, \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -R\sin u \cos v & R\cos u \cos v & 0 \\ -R\cos u \sin v & -R\sin u \sin v & R\cos v \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} R\cos u \cos v & 0 \\ -R\sin u \sin v & R\cos v \end{vmatrix} \mathbf{i} \\ &\quad - \begin{vmatrix} -R\sin u \cos v & 0 \\ -R\sin u \sin v & R\cos v \end{vmatrix} \mathbf{j} \\ &\quad + \begin{vmatrix} -R\sin u \cos v & R\cos u \cos v \\ -R\cos u \sin v & -R\sin u \sin v \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= R^2\cos u \cos^2 v\, \mathbf{i} + R^2 \sin u \cos^2 v\, \mathbf{j} + R^2 \sin v \cos v\, \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
|\mathbf{w}| &= \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| \\
&= R^2\sqrt{\cos^2 u \cos^4 v + \sin^2 u \cos^4 v + \sin^2 v \cos^2 v} \\
&= R^2\sqrt{\cos^4 v\left(\cos^2 u + \sin^2 u\right) + \sin^2 v \cos^2 v} \\
&= R^2\sqrt{\cos^2 v\left(\cos^2 v + \sin^2 v\right)} \\
&= R^2 \cos v. \qquad (20.2.4 - 6)
\end{aligned}$$

Τότε το εμβαδόν E της επιφάνειας S σύμφωνα με τον τύπο $(20.2.4-1)$ είναι

$$\begin{aligned}
E(s) = \iint\limits_S ds &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} R^2 \cos v \, du \, dv \\
&= R^2 \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi/2} \cos v \, dv\right] du = 2\pi R^2
\end{aligned}$$

και η ολική μάζα M με τον τύπο $(20.2.4-2)$

$$M = \iint\limits_S \rho(x,y,z)\, ds = cR^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \cos v \, du \, dv = 2\pi R^2 c,$$

όπου $\rho(x,y,z) = c$ σταθερά.

Επειδή πρόκειται για το άνω ημισφαίριο, λόγω συμμετρίας πρέπει

$$\overline{x} = \overline{y} = 0,$$

οπότε αρκεί να υπολογιστεί το $\overline{z}$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο $(20.2.4-5)$ είναι

$$z = Z(u,v) = R \sin v,$$

ενώ με τον $(20.2.4-6)$

$$|\mathbf{w}| = R^2 \cos v,$$

διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned}
\overline{z} &= \frac{1}{M}\iint\limits_{S} z\,\overbrace{\rho(x,y,z)}^{c\ \text{σταθερά}}\,ds = \frac{c}{M}\iint\limits_{S} z\,ds \\
&= \frac{c}{M}\iint\limits_{T} \underbrace{Z(u,v)}_{R\sin v}\overbrace{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|}^{R^2\cos v}du\,dv \\
&= \frac{cR^3}{M}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\cos v\sin v\,dv\right]du = \frac{cR^3}{2M}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2v\,dv\right]du \\
&= \frac{cR^3}{2M}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}\cos 2v\right]_0^{\pi/2}du = \frac{cR^3}{2M}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,du = \frac{cR^3}{2M}\int_0^{2\pi}du \\
&= \frac{2\pi cR^3}{4M} = \frac{R}{2}\,, \quad \text{όταν} \quad M = 2\pi R^2 c.
\end{aligned}$$

Άρα

$$(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = \left(0,0,\frac{R}{2}\right).$$

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA έγινε με το παρακάτω πρόγραμμα:

Πρόγραμμα 20.2.4 - 2 (επιφανειακού ολοκληρώματος 1ου είδους)

```
X[u_, v_] := R Cos[ u] Cos[v]
Y[u_, v_] := R Sin[u] Cos[v]
Z[u_, v_] := R Sin[v]
Ru = {D[X[u, v], u], D[Y[u, v], u], D[Z[u, v], u]}
Rv = {D[X[u, v], v], D[Y[u, v], v], D[Z[u, v], v]}
vct = Simplify[Cross[Ru, Rv]]
Print["Modulus Fundamental Product = ", Simplify[Sqrt[vct.vct]]]
f[u_, v_] := c
Print["Density = ", f[u, v]]
Print["Surface Area = ",
```

```
 Integrate[R^2 Cos[v], {u, 0, 2 Pi}, {v, 0, Pi/2}]]
Print["Mass = ",
 Integrate[R^2 Cos[v] f[u, v], {u, 0, 2 Pi}, {v, 0, Pi/2}]]
Print["Centre of mass z = ",
 Integrate[
   Z[u, v] R^2 Cos[v] f[u, v], {u, 0, 2 Pi}, {v, 0,
    Pi/2}]/(2 c Pi R^2)]
ParametricPlot3D[{X[u, v], Y[u, v], Z[u, v]}, {u, 0, 2 Pi}, {v, 0,
  Pi/2}, Boxed -> False, AxesLabel -> {"x  ", "y  ", "z   "},
 PlotStyle -> {LightYellow, Thick},
 BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 14},
 ViewPoint -> {Pi, Pi/2, 2}]
```

■

Άσκηση

Έστω S το τμήμα της επιφάνειας της σφαίρας

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

που περιορίζεται από τους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy και Oz (Σχ. 20.2.4 - 2). Αν η πυκνότητα της μάζας ανά μονάδα εμβαδού είναι

$$\rho(x, y, z) = x - 3y + 4,$$

να υπολογιστεί το εμβαδόν S, η μάζα και οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας.

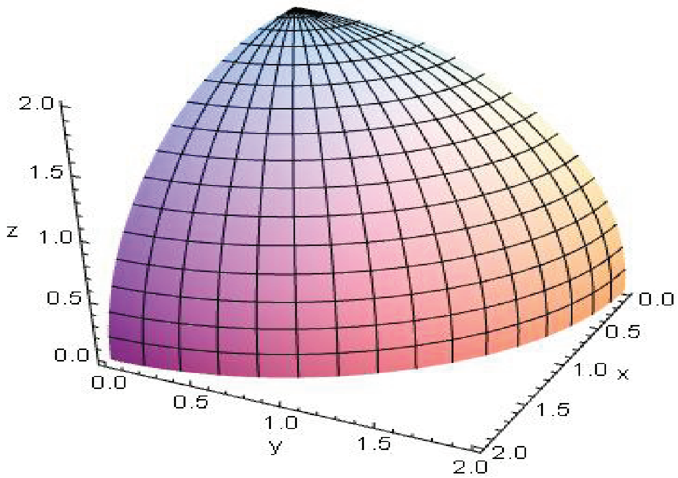
Απαντήσεις

Σύμφωνα με την $(20.2.4-6)$ είναι $|\mathbf{w}| = R^2 \cos v$, ενώ από την παραμετρική παράσταση της σφαίρας προκύπτει ότι

$$\rho(x, y, z) = x - 3y + 4 = 2\cos u \cos v - 6 \sin u \cos v + 4.$$

Άρα $\quad S = 2\pi, \quad M = 4\pi \quad$ και

$$(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{\pi}, \frac{4}{3\pi}, 2 - \frac{8}{3\pi}\right).$$



Σχήμα 20.2.4 - 2: Ο τόπος μεταβολής των παραμέτρων είναι $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και $v \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

20.2.5 Σχετικά θεωρήματα

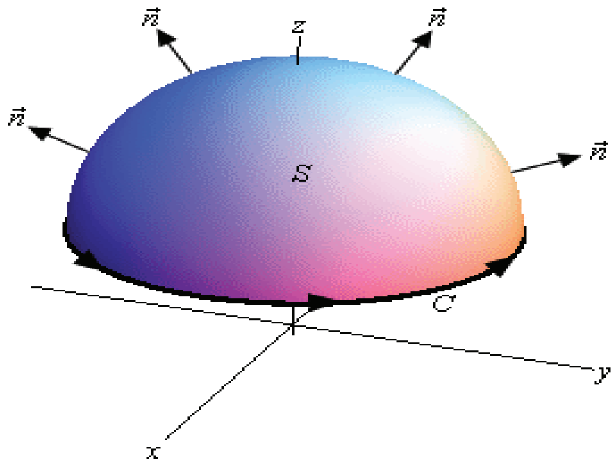
Δίνονται στη συνέχεια ορισμένα βασικά θεωρήματα σχετικά με τα επικαμπύλια και τα επιφανειακά ολοκληρώματα με σημαντικές εφαρμογές στις θετικές επιστήμες, ενώ ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία.

Θεώρημα 20.2.5 - 1 (Stokes). [14] *Αν S είναι μία επιφάνεια, που έχει για σύνορο μία απλή κλειστή καμπύλη C και $\mathbf{F}$ ένα διανυσματικό πεδίο, που ορίζεται πάνω στην S (Σχ. 20.2.5 - 1) και έχει παραγώγους 1ης τάξης συνεχείς συναρτήσεις, τότε αν $\mathbf{n}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια S και η φορά διαγραφής της καμπύλης C είναι η θετική, ισχύει*

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, ds. \qquad (20.2.5 - 1)$$

Ο τύπος $(20.2.5 - 1)$ είναι γνωστός ως **τύπος του Stokes**.

[14] Βλέπε επίσης *http://en.wikipedia.org/wiki/Stoke%27_theorem* και γενικότερη αναζήτηση σε **Stokes' theorem**.



Σχήμα 20.2.5 - 1: Θεώρημα του Stokes.

Παρατηρήσεις 20.2.5 - 1

- το θεώρημα εκφράζει μία σχέση μεταξύ ενός επιφανειακού ολοκληρώματος με ένα ή περισσότερα, σε πιο γενικές περιπτώσεις, επικαμπύλια ολοκληρώματα, που ορίζονται επάνω σε μία ή περισσότερες καμπύλες, που αποτελούν το σύνορο της επιφάνειας,
- το θεώρημα του Green αποτελεί μία ειδική περίπτωση του θεωρήματος του Stokes.

Τύπος υπολογισμού

Έστω

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) \quad \text{και} \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{F}.$$

Τότε

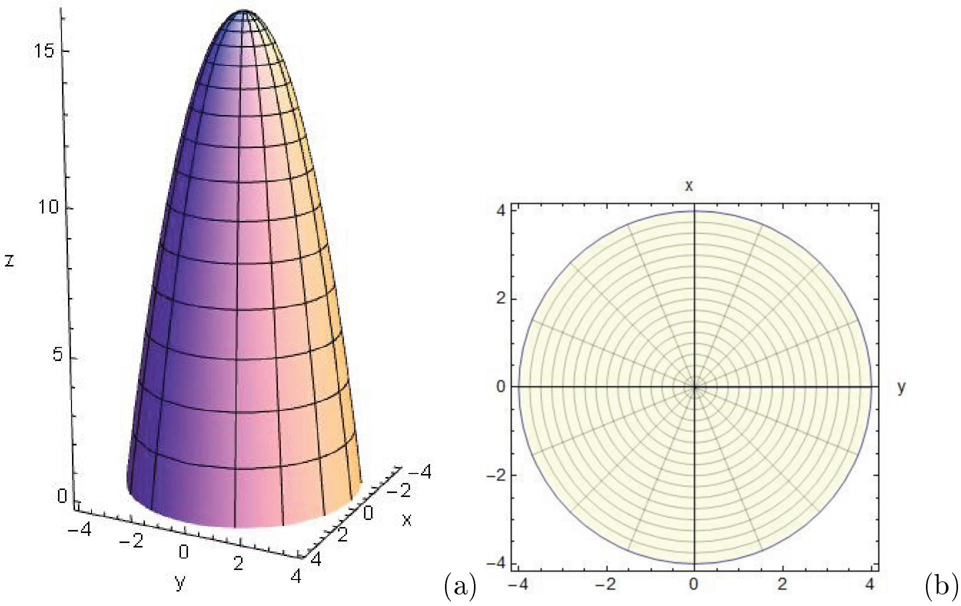
- αν η επιφάνεια S στο επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s}$ του τύπου του Stokes έχει παραμετρική εξίσωση $\mathbf{r}(u, v)$, όταν $(u, v) \in T$ με θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο $\mathbf{w} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$, ενώ
- η κλειστή καμπύλη C στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ έχει παραμετρική εξίσωση $\mathbf{r}(t)$,

ο τύπος του Stokes γράφεται

$$\oint_C \mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \iint_T \mathbf{G}[\mathbf{r}(u,v)] \cdot \mathbf{w}\, du\, dv. \qquad (20.2.5 - 2)$$

Παράδειγμα 20.2.5 - 1

Να επαληθευτεί (20.2.5 − 2) του Θεωρήματος του Stokes, όταν S είναι η επιφάνεια του παραβολοειδούς $z = 16 - x^2 - y^2$ με $z \geq 0$ (Σχ. 20.2.5 - 2a) και $\mathbf{F}$ το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = 3y\,\mathbf{i} + 4z\,\mathbf{j} - 6x\,\mathbf{k}$.



Σχήμα 20.2.5 - 2: Παράδειγμα 20.2.3 - 1: (a) η επιφάνεια S - **παραβολοειδές** στο xy-επίπεδο και θετική φορά διαγραφής - με παραμετρική εξίσωση $\mathbf{r}(u,v) = v\cos u\,\mathbf{i} + v\sin u\,\mathbf{j} + \left(16 - v^2\right)\,\mathbf{k}$ και (b) ο κυκλικός δίσκος κέντρου $(0,0)$ ακτίνας $R = 4$. Η παραμετρική εξίσωση της περιφέρειας είναι $\mathbf{r}(t) = 4\cos t\,\mathbf{j} + 4\sin t\,\mathbf{j}$, όταν $t \in [0, 2\pi)$.

Υπολογισμός του επικαμπύλιου ολοκληρώματος

Σύμφωνα με τη μεθοδολογία λύσης των αντίστοιχων επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων του 2ου είδους της Παραγράφου 20.1.1 στην περίπτωση αυτή η καμπύλη C, που είναι η βάση του παραβολοειδούς είναι περιφέρεια κύκλου κέντρου $(0,0)$ ακτίνας $R=4$ (Σχ. 20.2.5 - 2b), έχει παραμετρική εξίσωση

$$\mathbf{r}(t) \;=\; x(t)\,\mathbf{j}+y(t)\,\mathbf{j}=4\cos t\,\mathbf{j}+4\sin t\,\mathbf{j}, \qquad (20.2.5\text{ - }3)$$

όταν $t\in[0,2\pi)$.

Επομένως

$$x=x(t)=4\cos t,\quad y=y(t)=4\sin t\quad \text{και}\quad z=z(t)=0,$$

οπότε

$$x'(t)=-4\sin t,\qquad y'(t)=4\cos t\quad \text{και}\quad z'(t)=0. \qquad (20.2.5\text{ - }4)$$

Το διανυσματικό πεδίο γράφεται

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\,\mathbf{i}+Q(x,y,z)\,\mathbf{j}+R(x,y,z)\,\mathbf{k}\\ &= 3y\,\mathbf{i}+4z\,\mathbf{j}-6x\,\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα και με την $(20.2.5-4)$ είναι

$$\begin{aligned}P(x,y,z) &= 3y=12\sin t=P(t),\quad Q(x,y,z)=4z=16\sin t=Q(t)\\ R(x,y,z) &= 0=R(t),\end{aligned}$$

οπότε σύμφωνα με το 1ο μέλος του τύπου $(20.2.5-2)$ είναι

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi}\mathbf{F}[\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t)d\,t\\ &= \int_0^{2\pi}\left[P(t)x'(t)+Q(t)y'(t)+R(t)z'(t)\right]\,d\,t\\ &= -48\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,d\,t=-48\pi. \qquad (20.2.5\text{ - }5)\end{aligned}$$

Υπολογισμός του επιφανειακού ολοκληρώματος

Αρχικά υπολογίζεται ο στροβιλισμός του διανυσματικού πεδίου $F = 3y\,\mathbf{i} + 4z\,\mathbf{j} - 6x\,\mathbf{k}$ ως εξής:

$$\mathbf{G} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3y & 4z & -6x \end{vmatrix} = -4\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}.$$

[15]Η εξίσωση του παραβολοειδούς είναι της μορφής $z = g(x, y)$, οπότε μια παραμετρική εξίσωσή του είναι δυνατόν να προκύψει από την παραμετρική εξίσωση της $g(x, y)$, που είναι στην περίπτωση αυτή ο κυκλικός δίσκος στο xy-επίπεδο κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας $R = 4$ (Σχ. 20.2.5 - 2b).

Άρα χρησιμοποιώντας τους τύπους $(20.2.5 - 3)$ έχουμε

$$x = R\cos\theta, \quad z = R\sin\theta, \quad \text{όταν} \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad R \in [0, 4].$$

Έστω

$$\theta \to u \quad \text{και} \quad R = v.$$

Επειδή η εξίσωση του παραβολοειδούς είναι $z = 16 - x^2 - y^2$, σύμφωνα με την παραπάνω παραμετρική μορφή των x, y πρέπει

$$z = 16 - v^2\sin^2 u - v^2\cos^2 u = 16 - v^2,$$

οπότε η παραμετρική εξίσωση είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= X(u, v)\,\mathbf{i} + Y(u, v)\,\mathbf{j} + Z(u, v)\,\mathbf{k} \\ &= v\sin u\,\mathbf{i} + v\cos u\,\mathbf{j} + \left(16 - v^2\right)\,\mathbf{k}, \end{aligned}$$

όταν

$$T = \{(u, v) : \; u \in [0, 2\pi] \quad \text{και} \quad v \in [0, 4]\}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} x &= X(u, v) = v\sin u, \quad y = Y(u, v) = v\cos u, \quad \text{και} \\ z &= Z(u, v) = 16 - v^2. \end{aligned}$$

[15]Βλέπε ανάλογη λύση στο Παράδειγμα 20.2.3 - 1.

Προφανώς είναι

$$\mathbf{G}\left[\mathbf{r}(u,v)\right] = -4\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k} = \langle -4, 6, -3\rangle . \qquad (20.2.5 - 6)$$

Είναι

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} &= -v\sin u\,\mathbf{i} + v\cos u\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k},\\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= \cos u\,\mathbf{i} + \sin u\mathbf{j} - 2v\,\mathbf{k},\end{aligned}$$

οπότε το θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο θα ισούται με

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -v\sin u & v\cos u & 0 \\ \cos u & \sin u & -2v \end{vmatrix}\\ &= -2v^2\cos u\,\mathbf{i} - 2v^2\sin u\,\mathbf{j} - v\mathbf{k}\\ &= \left\langle -2v^2\cos u, -2v^2\sin u, -v\right\rangle . \qquad (20.2.5 - 7)\end{aligned}$$

Επειδή πρέπει το διάνυσμα $\mathbf{w}$ να έχει τη θετική διεύθυνση του z-άξονα, από τις $(20.2.5-6)$ και $(20.2.5-7)$ προκύπτει τότε ότι

$$\begin{aligned}\mathbf{G}\cdot(-\mathbf{w}) &= \langle -4, 6, -3\rangle \cdot \left\langle 2v^2\cos u, 2v^2\sin u, v\right\rangle\\ &= -8v^2\cos u + 12v^2\sin u - 3v, \qquad (20.2.5 - 8)\end{aligned}$$

οπότε αντικαθιστώντας στο 2ο μέλος του τύπου $(20.2.5-2)$ διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{aligned}\iint\limits_S \mathbf{G}\cdot d\,\mathbf{s} &= \iint\limits_T \mathbf{G}\left[\mathbf{r}(u,v)\right]\cdot(-\mathbf{w})\; du\, dv\\ &= -\int_0^{2\pi}\left[\int_0^4 \left(-3v - 8v^2\cos u + 12v^2\sin u\right)\, dv\right] du\\ &= -\int_0^{2\pi}\left(-24 - \frac{512}{3}\,\cos u + 256\sin u\right) du \qquad (20.2.5 - 9)\\ &= -48\pi \qquad (20.2.5 - 10)\end{aligned}$$

Από τις $(20.2.5-5)$ και $(20.2.5-10)$ προκύπτει τότε ότι ισχύει ο τύπος του Stokes.

Η γραφική παράσταση του κυκλικού δίσκου στο Σχ. 20.2.5 - 2b έγινε με την παρακάτω εντολή του MATHEMATICA:

```
ParametricPlot[{X[u, v], Y[u, v]}, {u, 0, 2 Pi}, {v, 0, 4},
 AxesLabel -> {"  y  ", "x  "},
 PlotStyle -> Directive[Opacity[0.7], LightYellow],
 BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 14}]
```

Θεώρημα 20.2.5 - 2 (απόκλισης). [16] *Έστω V ένα* [17] *συμπαγές (compact) στερεό που περιβάλλεται εξωτερικά από μία κλειστή κατά τμήματα λεία επιφάνεια S. Τότε, αν $\mathbf{F}$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο που ορίζεται στο V και έχει παραγώγους πρώτης τάξης συνεχείς συναρτήσεις, ισχύει*

$$\iiint\limits_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV=\oint\!\!\oint\limits_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=\oint\!\!\oint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds, \qquad (20.2.5\text{ - }11)$$

όταν $\mathbf{n}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην S με φορά προς το εξωτερικό της S.

Σημείωση 20.2.5 - 1

Το θεώρημα εκφράζει μία σχέση μεταξύ ενός τριπλού ολοκληρώματος, που ορίζεται σε ένα στερεό και ενός ολοκληρώματος που ορίζεται σε μία επιφάνεια S και περιβάλλει το στερεό.

Τύπος υπολογισμού

Αν

- $$\mathbf{F}=\mathbf{F}(x,y,z)=P\,\mathbf{i}+Q\,\mathbf{j}+R\,\mathbf{k},\quad \text{τότε}\quad \nabla\cdot\mathbf{F}=P_x+Q_y+R_z$$

  βαθμωτή συνάρτηση, δηλαδή το 1ο μέλος είναι ένα τριπλό ολοκλήρωμα.

---

[16] Βλέπε επίσης *http://en.wikipedia.org/wiki/Divergence_theorem* και γενικότερη αναζήτηση σε **divergence theorem**. Είναι γνωστό επίσης και ως **θεώρημα του Gauss** ή και **θεώρημα του Ostrogradsky**.

[17] **Συμπαγές** θεωρείται ένα στερεό, όταν είναι κλειστό και φραγμένο.

- Η επιφάνεια S στο επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ του τύπου (20.2.5–11) έχει παραμετρική εξίσωση $\mathbf{r}(u,v)$, όταν $(u,v) \in T$ με θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο $\mathbf{w} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$,

τότε ο τύπος $(20.2.5 - 11)$ γράφεται

$$\iiint\limits_V (P_x + Q_y + R_z)\, dV = \iint\limits_T \mathbf{F}[\mathbf{r}(u,v)] \cdot \mathbf{w}\, du\, dv. \qquad (20.2.5 - 12)$$

Παράδειγμα 20.2.5 - 2

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα της απόκλισης να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\oint\!\!\oint\limits_S \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{s}, \quad \text{όταν} \quad \mathbf{F} = 2x\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$$

και S η μοναδιαία σφαίρα με εξίσωση $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$.
Λύση. Έστω

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x,y,z) = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + Q\,\mathbf{k} = 2x\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k},$$

οπότε $P = 2x$, $Q = y^2$ και $R = z^2$.

Τότε

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = P_x + Q_y + R_z = 2 + 2y + 2z.$$

Άρα σύμφωνα με τον τύπο $(20.2.5 - 12)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\oint\!\!\oint\limits_S \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{s} &= \iiint\limits_V (P_x + Q_y + R_z)\, dV \\
&= 2 \iiint\limits_V (1 + y + z)\, dV \\
&= 2 \iiint\limits_V 1\, dV + 2 \iiint\limits_V y\, dV + 2 \iiint\limits_V z\, dV \\
&= 2\,\frac{4\pi}{3} + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = \frac{8\pi}{3},
\end{aligned}$$

επειδή ο όγκος V της σφαίρας ακτίνας r είναι[18]

$$V = \iiint\limits_V 1\, dV = \frac{4\pi r^3}{3} \overbrace{=}^{r=1} \frac{4\pi}{3}$$

και λόγω συμμετρίας

$$\iiint\limits_V y\, dV = \iiint\limits_V z\, dV = 0.$$

■

Με τη βοήθεια του Θεωρήματος 20.2.5 - 2 αποδεικνύεται το παρακάτω σημαντικό θεώρημα:

Θεώρημα 20.2.5 - 3 (Gauss). *Έστω S μία τυχούσα κλειστή επιφάνεια. Αν $Oxyz$ είναι ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων και $\mathbf{r}$ το διάνυσμα θέσης τυχόντος σημείου (x, y, z) της S, τότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα*

$$\iint\limits_S \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^3}\, ds, \tag{20.2.5 - 13}$$

όπου $\mathbf{n}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην S, ισούται με

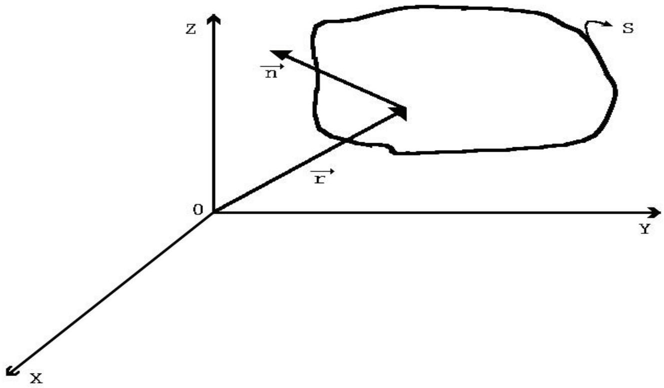
i) το μηδέν, αν το O βρίσκεται έξω απο την S (Σχ. 20.2.5 - 3),

ii) 4π, όταν το O βρίσκεται στο εσωτερικό της S (Σχ. 20.2.5 - 4).

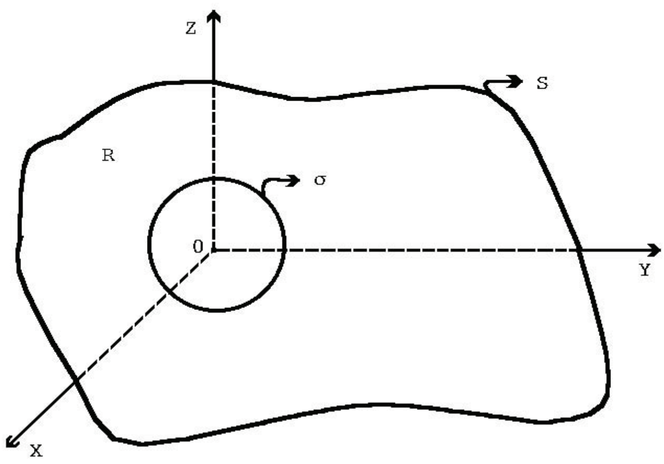
Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Gauss

Αν dS είναι μία στοιχειώδης επιφάνεια, τότε ενώνονται όλα τα σημεία που αποτελούν το σύνορό της με την αρχή O και με αυτόν τον τρόπο δημιουργείται ένας κώνος με βάση dS και κορυφή το O (Σχ. 20.2.5 - 5). Στη συνέχεια ο κώνος αυτός τέμνεται με μία σφαίρα που έχει κέντρο το O και ακτίνα r και συμβολίζεται με $d\Omega$ η τομή αυτή. Τότε, όπως είναι γνωστό, η στερεά γωνία $d\omega$, που αντιστοιχεί στην επιφάνεια dS και έχει κορυφή το O, ισούται με

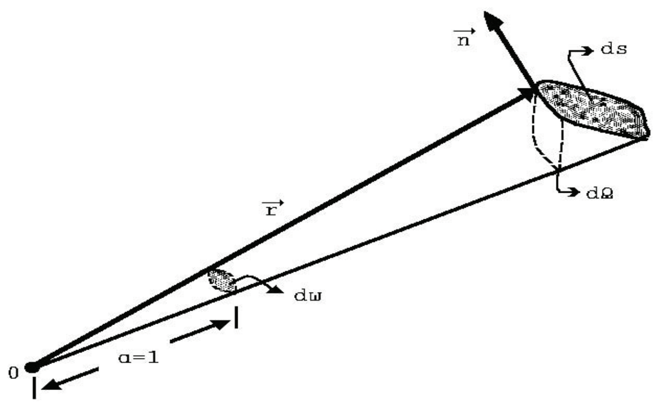
[18] Βλέπε Μάθημα *Πολλαπλά Ολοκληρώματα - Εφαρμογές τριπλού ολοκληρώματος* και *http://en.wikipedia/wiki/Volume*



Σχήμα 20.2.5 - 3: Θεώρημα 20.2.5 - 3 του Gauss - περίπτωση (i).



Σχήμα 20.2.5 - 4: Θεώρημα 20.2.5 - 3 του Gauss - περίπτωση (ii).



Σχήμα 20.2.5 - 5: γεωμετρική ερμηνεία θεωρήματος 20.2.5 - 3 του Gauss.

$$d\omega = \frac{d\Omega}{r^2}, \qquad (20.2.5 - 14)$$

ενώ η αριθμητική της τιμή θα είναι ίση με το εμβαδόν της τομής του κώνου με τη σφαίρα που έχει για κέντρο το O και ακτίνα $\alpha = 1$.

Έστω $\mathbf{n}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια dS και έστω επίσης ότι θ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\mathbf{r}$ και $\mathbf{n}$. Τότε από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = |\mathbf{r}||\mathbf{n}| \cos\theta = r\cos\theta,$$

δηλαδή

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r},$$

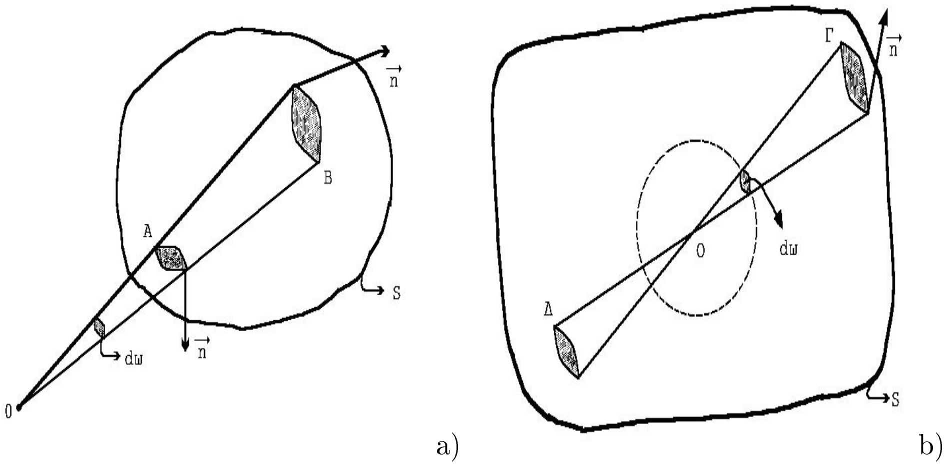
οπότε

$$d\Omega = \pm \cos\theta \, dS = \pm \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} \, dS.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην $(20.2.5 - 14)$ προκύπτει

$$d\omega = \pm \frac{\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\eta}}{r^3} \, dS,$$

όπου το πρόσημο εξαρτάται από το είδος της γωνίας θ (τίθεται το $+$, αν η γωνία θ είναι δεξιόστροφη, διαφορετικά το $-$).



Σχήμα 20.2.5 - 6: γεωμετρική ερμηνεία Θεωρήματος 20.2.5 - 3 του Gauss - περιπτώσεις: (i) Σχ. (a) και (ii) Σχ. (b).

Αν τώρα το O βρίσκεται έξω από την επιφάνεια S (Σχ. 20.2.5 - 6a), τότε η στερεά γωνία $d\omega$ στη θέση A είναι ίση με

$$d\omega = -\left(\mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{n}}{r^3}\right) dS,$$

ενώ στη θέση B ίση με

$$d\omega = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3}\, ds.$$

Προφανώς τότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα υπεράνω των επιφανειών αυτών είναι 0.

Αν, τέλος, το σημείο O βρίσκεται στο εσωτερικό της S (Σχ. 20.2.5 - 6b), τότε στις θέσεις Γ και Δ είναι

$$d\omega = \left(\mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{n}}{r^3}\right) dS,$$

οπότε τα επιφανειακά ολοκληρώματα υπεράνω και των δύο αυτών επιφανειών θα προστίθενται.

Η ολική στερεά γωνία, όταν η ολοκλήρωση γίνεται υπεράνω της S, ισούται με το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας με κέντρο το O και ακτίνα $\alpha = 1$, δηλαδή είναι ίση με 4π.

20.3 Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.* Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά.* Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Apostol, T. (1962). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός ΙΙ.* Εκδόσεις Ατλαντίς-Μ. Πεχλιβανίδης. ISBN 61–11601.

[4] Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός ΙΙ.* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–524–184–1.

[5] Marsden, J.E. & Tromba, A.J. (2011). *Διανυσματικός Λογισμός.* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–730–945–7.

[6] Spiegel, M. & Wrede, R. (2006). *Ανώτερα Μαθηματικά.* Εκδόσεις Τζιόλα. ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/