

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ ΔΙΑΒΑΘΜΙΣΜΕΝΗΣ ΔΥΣΚΟΛΙΑΣ

Σχολικό έτος : 2014-2015

Τα θέματα εμπλουτίζονται με την δημοσιοποίηση και των νέων θεμάτων από το Ι.Ε.Π.

Γενική Επιμέλεια:

Καραγιάννης Ιωάννης

Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1^ο : Διανύσματα

Θέμα 2 ^ο	5
Θέμα 4 ^ο	12

Κεφάλαιο 2^ο : Ευθείες

Θέμα 2 ^ο	15
Θέμα 4 ^ο	22

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Θ Ε Μ Α 2^ο

ΘΕΜΑ 1

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

(Μονάδες 8)

β) Αν τα διανύσματα $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $k\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι κάθετα να βρείτε την τιμή του k .

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{\beta} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ και $\vec{\gamma} = (7, 3)$

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι μη συγγραμμικά ανά δύο

(Μονάδες 10)

β) Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται τα σημεία $A(2, 3)$, $B(-1, 5)$ και $\Gamma(-2, -4)$.

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το συμμετρικό Δ του B ως προς το μέσο M της $ΑΓ$.

(Μονάδες 10)

γ) Τι σχήμα είναι το $ΑΒΓΔ$; Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τα σημεία $A(1+2a, 4a-2)$ και $B(5a+1, -a)$, $a \in \mathbb{Z}$.

α) Να γράψετε το $A\vec{B}$ συναρτήσει του a και να βρείτε το a ώστε $|A\vec{B}| = 10$.

(Μονάδες 12)

Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας-Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών

β) Έστω $a=2$. Να βρείτε σημείο M του άξονα $x'x$ ώστε το τρίγωνο MAB να είναι ισοσκελές με βάση την AB .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 5

Έστω \vec{a} , $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα του επιπέδου για τα οποία ισχύουν:

$$3|\vec{a}|+|\vec{\beta}|=9, \quad 2|\vec{a}|-|\vec{\beta}|=1 \quad \text{και} \quad (\vec{a}, \vec{\beta})=\frac{\pi}{3}$$

α) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων \vec{a} , $\vec{\beta}$ και το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{\beta}$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 6

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, 3)$ και $\vec{\beta} = \left(1, \frac{1}{2}\right)$.

α) Να βρείτε την προβολή του \vec{a} πάνω στο $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 10)

β) Να αναλύσετε το \vec{a} σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη με το $\vec{\beta}$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 7

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (-1, 3)$ και $\vec{\beta} = \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{\beta}$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τον θετικό αριθμό x για τον οποίο τα διανύσματα \vec{u} και $\vec{v} = (x^2, x-1)$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 8

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (-1, \sqrt{3})$ και $\vec{b} = (\sqrt{3}, 3)$. Να υπολογίσετε:

α) Τη γωνία $(\vec{a}, \hat{\vec{b}})$

(Μονάδες 10)

β) Το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{a}^2 \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \cdot \vec{a}$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 9

Δίνονται τα διανύσματα \vec{a} , \vec{b} με $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ και $(\vec{a}, \hat{\vec{b}}) = \frac{\pi}{3}$. Να υπολογίσετε τα εξής:

α) Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων \vec{a} , \vec{b} και κατόπιν την τιμή της παράστασης

$$\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot (2\vec{b})$$

(Μονάδες 10)

β) Το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{a} - 2\vec{b}$ και $\vec{b} + 2\vec{a}$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 10

Έστω \vec{a} , \vec{b} δυο διανύσματα με $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $(\vec{a}, \hat{\vec{b}}) = \frac{5\pi}{6}$ και $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$

α) Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{a} \cdot \vec{b}$ και $\vec{b} \cdot \vec{u}$.

(Μονάδες 16)

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος \vec{u} .

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 11

Θεωρούμε τα σημεία $A(\alpha+1, 3)$, $B(\alpha, 4)$ και $\Gamma(-4, 5\alpha+4)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα διανύσματα \vec{AB} , $\vec{B\Gamma}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε για ποια τιμή του α , τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 10)

γ) Αν $\alpha=1$, να βρείτε αριθμό λ ώστε $\vec{A\Gamma} = \lambda \vec{AB}$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 12

Θεωρούμε τα σημεία P, Λ, K και M του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση:

$$5P\vec{\Lambda} = 2P\vec{K} + 3P\vec{M}$$

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία K, Λ και M είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 10)

β) Για τα παραπάνω σημεία K, Λ και M να δείξετε ότι ισχύει:

$$2A\vec{\Lambda} + 3B\vec{\Lambda} + 2M\vec{B} = A\vec{K} + A\vec{M} + B\vec{K}$$

, όπου A και B είναι σημεία του επιπέδου.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 13

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}| = 4$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -8$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} + 2\vec{\alpha} = \vec{0}$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 14

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1$, $(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \cdot \vec{\beta} = 7$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$.

α) Να υπολογίσετε τα $\vec{\alpha}^2$ και $|\vec{\beta}|$.

(Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ στο διάνυσμα $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 15

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 7)$ και $\vec{\beta} = (2, 4)$

α) Να βρεθεί η προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 10)

Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας-Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών

β) Να αναλύσετε το σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες, η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 16

Δίνονται τα διανύσματα $0\vec{A} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, $0\vec{B} = 3\vec{i} + \vec{j}$ και $0\vec{\Gamma} = 5\vec{i} - 5\vec{j}$, όπου \vec{i} και \vec{j} είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων και αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των $A\vec{B}$ και $B\vec{\Gamma}$

(Μονάδες 12)

β) Να εξετάσετε αν τα σημεία A, B και Γ μπορεί να είναι κορυφές τριγώνου.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 17

Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ και E, Z σημεία τέτοια ώστε: $A\vec{E} = \frac{2}{5}A\vec{\Delta}$, $A\vec{Z} = \frac{2}{7}A\vec{\Gamma}$.

α) Να γράψετε τα διανύσματα $E\vec{Z}$ και $Z\vec{B}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $A\vec{B}$ και $A\vec{\Delta}$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία B, Z και E είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 18

Δίνεται τρίγωνο ABΓ και σημεία Δ και E του επιπέδου τέτοια, ώστε $A\vec{\Delta} = 2A\vec{B} + 5A\vec{\Gamma}$ και $A\vec{E} = 5A\vec{B} + 2A\vec{\Gamma}$

α) Να γράψετε το διάνυσμα $\Delta\vec{E}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $A\vec{B}$ και $A\vec{\Gamma}$.

(Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\Delta\vec{E}$ και $B\vec{\Gamma}$ είναι παράλληλα.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 19

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{AB} = (\kappa^2 - 6\kappa + 9, \kappa - 3)$ και $\vec{A\Gamma} = (1, 6)$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma}$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του κ , ώστε τα διανύσματα \vec{AB} και $\vec{A\Gamma}$ να είναι κάθετα.

(Μονάδες 9)

γ) Για $\kappa = 1$ να βρείτε το διάνυσμα $\vec{B\Gamma}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 20

Έστω τα διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ για τα οποία : $2|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 60^\circ$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{a} + \vec{\beta}$ και $\vec{a} - \vec{\beta}$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 21

Σε τρίγωνο ABΓ είναι: $\vec{AB} = (-4, -6)$, $\vec{A\Gamma} = (2, -8)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος \vec{AM} , όπου AM είναι η διάμεσος του τριγώνου ABΓ.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία \hat{A} είναι οξεία.

(Μονάδες 10)

γ) Αν στο τρίγωνο ABΓ επιπλέον ισχύει $A(3, 1)$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του B και Γ.

(Μονάδες 8)

Θ Ε Μ Α 4^ο

ΘΕΜΑ 22

α) Να εξετάσετε πότε ισχύει καθεμιά από τις ισότητες: $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$ και $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| - |\vec{v}|$
(Μονάδες 10)

β) Δίνονται τα διανύσματα \vec{a} , $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\frac{|\vec{a}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{4} = \frac{|\vec{\gamma}|}{7}$.

i) Να αποδείξετε ότι: $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$
(Μονάδες 8)

ii) Να αποδείξετε ότι: $7\vec{a} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$
(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 23

Δίνονται τα διανύσματα \vec{a} , $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$, $(\vec{a}, \hat{\vec{\beta}}) = 60^\circ$ και

$$\vec{\gamma} = \frac{\kappa}{2} \cdot \vec{a} - \vec{\beta}, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}$$

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$
(Μονάδες 3)

β) Αν ισχύει $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \kappa$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $\kappa = -2$
(Μονάδες 6)

ii) να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$
(Μονάδες 8)

iii) να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $3\vec{a} + 2\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ είναι κάθετα.
(Μονάδες 8)

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 2^ο

Η ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Θ Ε Μ Α 2^ο

ΘΕΜΑ 24

Θεωρούμε μια ευθεία (ϵ) και ένα σημείο $A(6, -1)$ εκτός της (ϵ).

Έστω $M(2, 1)$ η προβολή του A στην (ϵ). Να βρείτε:

α) Την εξίσωση της ευθείας (ϵ).

(Μονάδες 13)

β) Το συμμετρικό του A ως προς την (ϵ).

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 25

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, -1)$ και $\vec{b} = (3, 0)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = 4\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{\vec{u}^2}{5}$ και διέρχεται από

το σημείο $A(a, \vec{a} \cdot \vec{b} + 2)$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 26

Θεωρούμε μια ευθεία (ϵ) και ένα σημείο $A(6, -1)$ εκτός της (ϵ).

Έστω $M(2, 1)$ η προβολή του A στην (ϵ). Να βρείτε:

α) Την εξίσωση της ευθείας (ϵ).

(Μονάδες 13)

β) Το συμμετρικό του A ως προς την (ϵ).

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 27

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-5, 4)$, $B(-1, 6)$, $\Gamma(4, 1)$ και σημείο M της πλευράς AB για το

οποίο ισχύει $\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AB}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος \vec{AB} .

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M .

(Μονάδες 9)

γ) Αν το σημείο M έχει συντεταγμένες $\left(-4, \frac{9}{2}\right)$, να υπολογίσετε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Γ, M .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 28

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(3, 1)$, $B(-1, 1)$ και $\Gamma(2, 4)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $A\Gamma$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις του ύψους $B\Delta$ και της διαμέσου AM .

(Μονάδες 18)

ΘΕΜΑ 29

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : x + y + 2 = 0$ και το σημείο $A(5, 1)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η_1 , η οποία διέρχεται από το A και είναι κάθετη προς την ευθεία ε .

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η_2 , η οποία διέρχεται από το A και είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών η_1 και η_2 και την απόστασή του από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 30

Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα AB με μέσο M και $A(1, -2)$, $M(-2, 5)$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B .

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου ε του ευθυγράμμου τμήματος AB , καθώς και τα κοινά σημεία αυτής με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 31

Δίνονται τα σημεία $A(1, -2)$ και $B(2, 3)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία A, B .

(Μονάδες 11)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $OK\Lambda$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων και K, Λ είναι τα σημεία τομής της ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 14)

ΘΕΜΑ 32

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με τρεις κορυφές τα σημεία $A(1, 1), \Gamma(4, 3)$ και $\Delta(2, 3)$.

α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής K των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$, καθώς και τις συντεταγμένες της κορυφής B .

(Μονάδες 16)

ΘΕΜΑ 33

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : (2\lambda - 1)x + y - 5 = 0$, $\varepsilon_2 : (\lambda^2 + 3)x - y - 15 = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ και το σημείο $A(2, -1)$.

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ευθείες τέμνονται.

(Μονάδες 7)

β) Αν οι ευθείες τέμνονται στο σημείο A , να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

γ) Έστω $\lambda = 2$ και B, Γ τα σημεία που οι ε_1 και ε_2 τέμνουν τον άξονα $y'y$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 34

Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon) : y + x = 1$ και το σημείο $A(2, -4)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην (ε) .

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την προβολή του σημείου A πάνω στην ευθεία (ε) .

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 35

Έστω $M(3, 5)$ το μέσο ευθυγράμμου τμήματος AB με $A(1, 1)$.

α) Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του σημείου B .

(Μονάδες 6)

ii) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B .

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου K του άξονα $x'x$ έτσι, ώστε να ισχύει $(KA) = (KB)$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 36

Θεωρούμε την ευθεία (ε_1) που τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $A(3, 0)$ και $B(0, 6)$ αντίστοιχα.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_1) .

(Μονάδες 8)

β) Αν ε_2 είναι η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ε_1 , τότε να βρείτε:

i) την εξίσωση της ευθείας ε_2 ,

(Μονάδες 9)

ii) τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 37

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3x + y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + 2y - 4 = 0$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των ευθειών ε_1 και ε_2

(Μονάδες 8)

β) Αν η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο B και η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Γ , τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων B και Γ .

(Μονάδες 8)

ii) να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα Β και Γ έχει εξίσωση την $3x - 4y - 12 = 0$
(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 38

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : x - 3y + 5 = 0$ και $\varepsilon_2 : 3x + y - 5 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες μεταξύ τους.
(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των ευθειών ε_1 και ε_2
(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α και την αρχή Ο των αξόνων.
(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 39

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 8x + y - 28 = 0$ και $\varepsilon_2 : x - y + 1 = 0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Μ.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ και, στη συνέχεια, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Μ και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$.
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που διέρχονται από το Μ και έχουν συντελεστή διεύθυνσης λ έχουν εξίσωση την: $\lambda x - y - 3\lambda + 4 = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.
(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 40

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : x - 8y + 16 = 0$ και $\varepsilon_2 : 2x + y + 15 = 0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Μ. Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνουν τον άξονα $y'y$ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, τότε:

α) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Μ, Α και Β
(Μονάδες 10)

β) αν Κ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ, να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος \vec{MK}
(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 41

Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1 : x - 2y - 8 = 0$, $\varepsilon_2 : 2x - 4y + 10 = 0$ και το σημείο A της ε_1 που έχει τετμημένη το 4.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία ε_1 .

(Μονάδες 10)

γ) Αν B είναι το σημείο τομής των ευθειών ε και ε_2 , τότε να βρείτε τις συντεταγμένες του B .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 42

Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(5, 6)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B .

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος ε του ευθυγράμμου τμήματος AB έχει εξίσωση την $y = -x + 7$

(Μονάδες 15)

Θ Ε Μ Α 4^ο

ΘΕΜΑ 43

Δίνονται τα σημεία $A(\lambda + 1, \lambda - 1)$, $B(2, 2)$ και $\Gamma(4, 6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την μεσοκάθετο του τμήματος ΒΓ.

(Μονάδες 7)

β) Αν το σημείο Α ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ, να βρείτε την τιμή του λ.

(Μονάδες 8)

γ) Για $\lambda=4$, να βρείτε σημείο Δ ώστε το τετράπλευρο ΑΒΔΓ να είναι ρόμβος.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 44

Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που είναι παράλληλο προς την ευθεία $\varepsilon: y = x$, με $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ και $x_1 < x_2$.

Αν το σημείο $M(3, 5)$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ και το γινόμενο των τετμημένων των σημείων Α και Β ισούται με 5, τότε:

α) να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

(Μονάδες 13)

β) να αποδείξετε ότι $(OAB) = 4$, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 5)

γ) να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(x, y)$ για τα οποία ισχύει $(KAB) = 2(OAB)$ ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις: $x - y - 2 = 0$ και $x - y + 6 = 0$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 45

Δίνονται τα σημεία $A(3, 4), B(5, 7)$ και $\Gamma(2\mu + 1, 3\mu - 2)$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \vec{AB} και $\vec{A\Gamma}$ και, στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ δεν είναι συνευθειακά για κάθε τιμή του μ.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι:

i) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ δεν εξαρτάται από το μ.

(Μονάδες 5)

ii) για κάθε τιμή του μ το σημείο Γ ανήκει σε ευθεία ε, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

(Μονάδες 7)

γ) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά γιατί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ παραμένει σταθερό, ανεξάρτητα από την τιμή του μ ;

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 46

Δίνονται τα σημεία $A\left(1, -\frac{3}{2}\right)$, $B(2, -1)$ και $\Gamma\left(\mu, \frac{\mu-4}{2}\right)$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \vec{AB} και $\vec{B\Gamma}$

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την τιμή του μ έτσι, ώστε $\mu \cdot \vec{B\Gamma} = -\vec{AB}$

(Μονάδες 6)

δ) Για την τιμή του μ που βρήκατε στο ερώτημα γ), να αποδείξετε ότι $(OB\Gamma) = 1$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 47

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: 2\kappa x - (1+\kappa)y + 1 - 3\kappa = 0$ και $\zeta: (1+3\kappa)x + (\kappa-1)y + 2 - 6\kappa = 0$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του κ , ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ) .

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 48

Δίνονται τα διανύσματα \vec{a} και \vec{b} με μέτρα 2, 6 αντίστοιχα και $\varphi \in [0, \pi]$ η μεταξύ τους γωνία.

Επίσης δίνεται η εξίσωση $(\vec{a} \cdot \vec{b} + 12)x + (\vec{a} \cdot \vec{b} - 12)y - 5 = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\varphi \in [0, \pi]$

(Μονάδες 3)

β) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $\psi'\psi$, να αποδείξετε ότι $\vec{b} = 3\vec{a}$
(Μονάδες 7)

γ) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $\chi'\chi$, να αποδείξετε ότι $\vec{b} = -3\vec{a}$
(Μονάδες 7)

δ) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στην διχοτόμο πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων, να αποδείξετε ότι $\vec{b} \perp \vec{a}$
(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 49

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3x + y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + 2y - 4 = 0$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των ευθειών ε_1 και ε_2
(Μονάδες 5)

β) Αν η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Β και η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Γ, τότε:

i) να βρείτε εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Β και Γ
(Μονάδες 5)

ii) να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ
(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(x, y)$ για τα οποία ισχύει $(KB\Gamma) = (AB\Gamma)$ ανήκουν σε δύο παράλληλες ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 50

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2xy - 3\lambda x + 3\lambda y + 2\lambda^2 = 0$, με λ διαφορετικό του 0.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει στο επίπεδο, δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους, καθεμιά από τις οποίες έχει κλίση ίση με 1.
(Μονάδες 12)

β) Αν το εμβαδόν του τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες του ερωτήματος α) είναι ίσο με 2, να βρείτε την τιμή του λ .
(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 51

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει γεωμετρικά δύο ευθείες γραμμές ε_1 και ε_2 οι οποίες είναι παράλληλες μεταξύ τους.

(Μονάδες 7)

β) Αν $\varepsilon_1 : x + y - 2 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + y - 4 = 0$, να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ε των ε_1 και ε_2 .

(Μονάδες 8)

γ) Αν Α είναι σημείο της ευθείας ε_1 με τεταγμένη το 2 και Β σημείο της ευθείας ε_2 με τεταγμένη το 1, τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β

(Μονάδες 2)

ii) να βρείτε τις συντεταγμένες δύο σημείων Γ και Δ της ευθείας ε έτσι, ώστε το τετράπλευρο ΑΓΒΔ να είναι τετράγωνο.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 52

Δίνονται τα διανύσματα $0\vec{A} = (4, 2)$ και $0\vec{B} = (1, 2)$, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $0\vec{A}$ και $0\vec{B} = (1, 2)$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 4)

β) Αν $\Gamma(\alpha, \beta)$ είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β, τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $A\vec{B} = (-3, 4)$ και $A\vec{\Gamma} = (\alpha - 4, \beta + 2)$

(Μονάδες 5)

ii) να αποδείξετε ότι: $4\alpha + 3\beta = 10$

(Μονάδες 6)

iii) αν επιπλέον τα διανύσματα $0\vec{\Gamma}$ και $A\vec{B}$ είναι κάθετα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 53

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : x - 4y - 7 = 0$ και τα σημεία Α(-2, 4) και Β(2, 6)

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου M της ευθείας ε το οποίο ισαπέχει από τα σημεία A και B

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου MAB

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(x, y)$ για τα οποία ισχύει $(KAB) = (MAB)$ ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις: $x - 2y - 5 = 0$ και $x - 2y + 25 = 0$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 54

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 2x - y - 10\lambda + 16 = 0$ και $\varepsilon_2 : 10x + y - 2\lambda - 4 = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται, και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους M

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ το σημείο M ανήκει στην ευθεία $\varepsilon : 8x + y - 6 = 0$

(Μονάδες 7)

γ) Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες και στα σημεία A και B αντίστοιχα, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από την αρχή O των αξόνων και είναι παράλληλη προς την ευθεία AB

(Μονάδες 5)

ii) αν K είναι τυχαίο σημείο της ευθείας ζ , να αποδείξετε ότι $(KAB) = \frac{9}{4}$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 55

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\vec{AB} = (\lambda, \lambda + 1)$, $\vec{A\Gamma} = (3\lambda, \lambda - 1)$, όπου $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq -2$, και M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{AM} = (2\lambda, \lambda)$

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το διάνυσμα \vec{AM} είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{a} = \left(\frac{2}{\lambda}, -\lambda \right)$

(Μονάδες 8)

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β), να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

(Μονάδες 10)