

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ (2)

ΚΥΡΙΑΚΗ, 30 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΠΤΑ (7)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν ισχύουν:

- ♦ οι f, g είναι συνεχείς στο Δ ,
- ♦ $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c$$

(Μονάδες 6)

A2. i. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

(Μονάδες 3)

ii. Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού; (Να κάνετε πρόχειρο σχήμα).

(Μονάδες 6)

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 7 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση «1-1», αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 = x_2, \text{ τότε } f(x_1) = f(x_2).$$

β. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f .

γ. Αν $f(x) = a^x$, $a > 0$, τότε $f'(x) = a^x$.

δ. Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη, τότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

ε. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$$

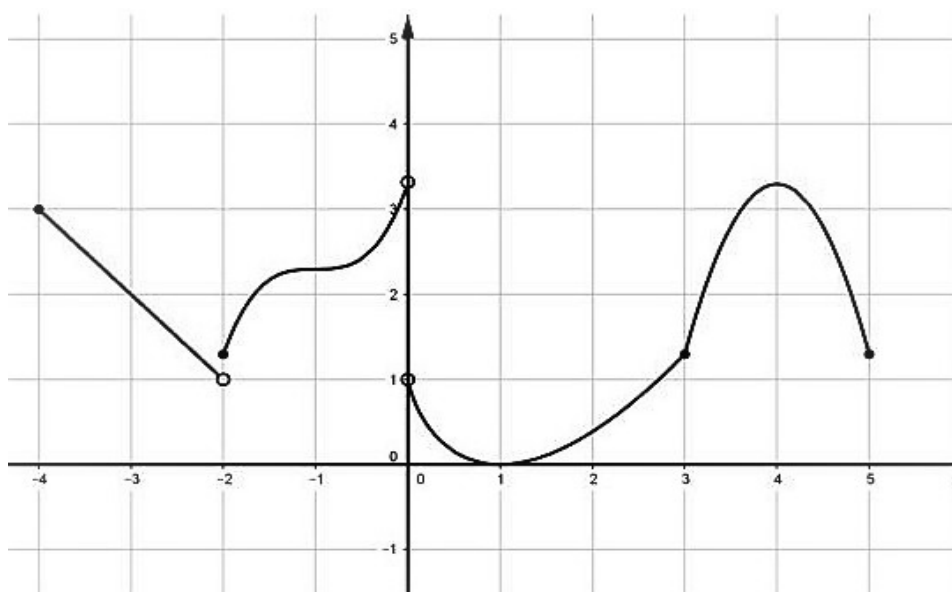
(Μονάδες 5x2= 10)

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [-4, 0) \cup (0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο επόμενο σχήμα:

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 7 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ



B1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια.

(Μονάδες 3)

B2. Να βρείτε το όριο: **i.** $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ και **ii.** $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

(Μονάδες 4)

B3. i. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα $(0, 5]$.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε την παράγωγο της f , όταν $x \in (-4, -2)$.

(Μονάδες 2)

B4. Ποια από τα παρακάτω ολοκληρώματα ορίζονται;

$$I = \int_2^4 f(x) dx, \quad J = \int_{-1}^0 f(x) dx$$

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 7 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

B5. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x+1$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f \circ g$.

(Μονάδες 4)

ii. Να εξηγήσετε πως με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f μπορείτε να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f \circ g$.

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 + x + 1, x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 5)

Γ2. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο, το $A(-1, -1)$.

(Μονάδες 4)

Γ3. Να αποδείξετε ότι:

i. Ισχύει: $|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| \leq |x - y| \leq |f(x) - f(y)|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

ii. Η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

(Μονάδες 2x3= 6)

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f^{-1}(\xi) + 2\xi = 0$$

(Μονάδες 6)

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Γ5. Αν για την παράγουσα F της f' ισχύει:

$$F^2(x) \geq F(x)F(2-x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να βρείτε τον τύπο της F .

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

♦ $f(1) = -1$

♦ $f'(x) + f(x) + 4e^{x-1} = \ln x + \frac{1}{x} + x + 1$ για κάθε $x > 0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \ln x + x - 2e^{x-1}, \quad x > 0$$

(Μονάδες 4)

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 6)

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f'(x) = \int_e^{e^2} \frac{f'(\ln t)}{t} dt$$

έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

(Μονάδες 3)

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)$ με $x > 0$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{e}, x = 1$.

(Μονάδες 5)

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΑΠΟ 7 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 6ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Δ5. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g(x) = -f(x)$, $x > 0$

Αν η ευθεία $x = \lambda$, $\lambda > 0$ τέμνει τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g στα σημεία A_λ , B_λ αντίστοιχα, να βρείτε:

i. Την ελάχιστη τιμή των αποστάσεων $(A_\lambda B_\lambda)$.

(Μονάδες 3)

ii. Τα όρια:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{E(\lambda)}{\lambda^2 + 1} \quad \text{και} \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{E(\lambda)}{\lambda^2 + 1}$$

Όπου $E(\lambda)$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου $OA_\lambda B_\lambda$ και O η αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 4)

ΑΡΧΗ 7ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Ο Δ Η Γ Ι Ε Σ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 1 ώρα μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Επιστημονική επιμέλεια:

Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

Ρουμελιώτης Αντώνης, Καθηγητής Μαθηματικών