

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ (1)
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 24 ΜΑΡΤΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(Μονάδες 7)

A2. i. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 4)

ii. Να δώσετε τον ορισμό της μέσης τιμής ενός συνόλου n παρατηρήσεων.

(Μονάδες 4)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$, όπου $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$$

β) Η σχετική συχνότητα μιας τιμής της μεταβλητής X μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές.

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 6 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

γ) Αν η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε είναι κανονική ή περίπου κανονική, τότε περίπου το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$.

δ) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} , τότε ισχύει :

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

ε) Για δύο ενδεχόμενα A και B του δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$$

(Μονάδες $5 \times 2 = 10$)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$$

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 5)

B2. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(f(x) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}} \right).$$

(Μονάδες 7)

B3. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 7)

B4. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής

παράστασης της f στο σημείο της $A\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$.

(Μονάδες 6)

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 6 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΘΕΜΑ Γ

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν οι μαθητές ενός σχολείου για να μεταβούν από το σπίτι τους στο σχολείο, έχουν ομαδοποιηθεί σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους c , όπως στον παρακάτω πίνακα:

Χρόνοι (σε λεπτά) κλάσεις	Κέντρο κλάσης x_i	Αριθμός μαθητών v_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική συχνότητα $f_i \%$	Αθροιστική σχετική συχνότητα $F_i \%$
[5, ...)		20			
[..., ...)		30			
[..., ...)	30	100			
[..., ...)					
[..., ...)		20			
Σύνολα		$v = \dots$			

Γ1. Να αποδείξετε ότι το κοινό πλάτος των κλάσεων είναι $c=10$.

(Μονάδες 4)

Γ2. i. Αν η μέση τιμή των χρόνων είναι $\bar{x} = 30$, να αποδείξετε ότι $v_4 = 30$.

(Μονάδες 4)

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 6 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ii. Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας συμπληρωμένο **(Μονάδες 3)**.

Να δικαιολογήσετε τις τιμές των τεσσάρων τελευταίων στηλών.

(Μονάδες 2)

Γ3. Να βρείτε την διάμεσο και την διακύμανση των χρόνων.

(Μονάδες 4)

Γ4. i. Πόσοι μαθητές χρειάστηκαν τουλάχιστον 20 λεπτά για να μεταβούν από το σπίτι τους στο σχολείο;

(Μονάδες 4)

ii. Αν επιλέξουμε τυχαία έναν μαθητή, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου A: «ο μαθητής να χρειάστηκε λιγότερο από 25 λεπτά για να πάει στο σχολείο του».

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση:

$$f(x) = x^4 + 12P(B) \cdot x + 6 - 2P(A), x \in \mathbb{R}$$

όπου A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , για τα οποία ισχύει ότι:

$$4P^2(A) + 9P^2(B) = 4P(A) + 6P(B) - 2$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{1}{3}$

(Μονάδες 4)

Δ2. Αν επιπλέον ισχύει $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων : $(A - B) \cup (B - A)$, $A' \cap B'$, $A' \cup B'$.

(Μονάδες 6)

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 6 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Δ3. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 5)

Δ4. Να αποδείξετε ότι ισχύει $x^4 + 4x + 3 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Δ5. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της M με τετμημένη $2P(A)$.

(Μονάδες 5)

ΑΡΧΗ 6ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Ο Δ Η Γ Ι Ε Σ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμο σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 1 ώρα μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Επιστημονική επιμέλεια:

Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

Ρουμελιώτης Αντώνης, Καθηγητής Μαθηματικών