

# **ΛΥΣΕΙΣ**

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ**

**ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ 1**

**ΣΑΒΒΑΤΟ, 10 ΜΑΡΤΙΟΥ 2017**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ**

**ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

## **ΘΕΜΑ Α**

**A1. i.** Να διατυπώσετε το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών και στη συνέχεια να το αποδείξετε.

ii. Να δώσετε ένα παράδειγμα, σχεδιάζοντας ένα πρόχειρο σχήμα, μιας συνάρτησης  $f$  που δεν είναι συνεχής στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  και η οποία **δεν** παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές ανάμεσα στα  $f(\alpha)$ ,  $f(\beta)$ .

**A2.** Να βρείτε το **λάθος** στον επόμενο συλλογισμό . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας .

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+\frac{1}{u^2}} \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = -\int_{-1}^1 \frac{1}{1+u^2} du = -I$$

(θέσαμε  $x = \frac{1}{u}$ , οπότε  $dx = -\frac{1}{u^2} du$ ).

Άρα  $I = -I$ , οπότε  $I = 0$ . Αυτό, όμως, είναι άτοπο, αφού  $I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx > 0$ , επειδή  $\frac{1}{1+x^2} > 0$  για κάθε  $x \in [-1, 1]$ .

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν  $f, g, h$  είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η  $ho(gof)$ , τότε ορίζεται και η  $(hog)of$  και ισχύει  $ho(gof) = (hog)of$ .

**β)** Για κάθε συνάρτηση  $f$  που είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ , το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι  $[f(\alpha), f(\beta)]$  ή  $[f(\beta), f(\alpha)]$ .

**γ)** Αν για κάθε συνάρτηση  $f$  και για ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της που ισχύει:

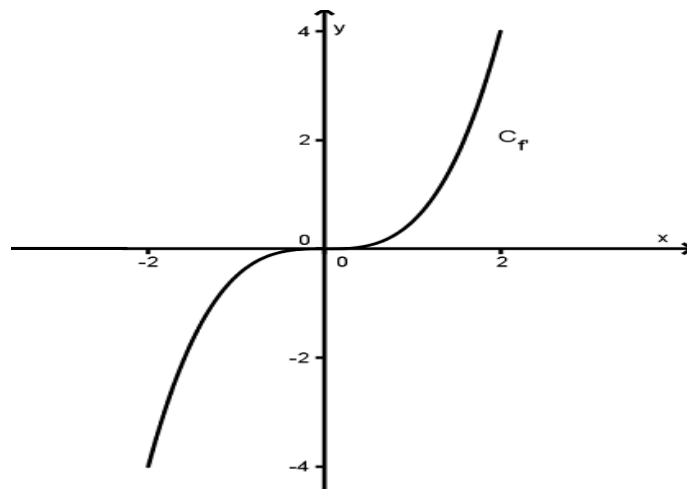
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ τότε η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0.$$

**δ)** Μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$  δεν έχει

ασύμπτωτες.

ε) Για όλες τις συνεχείς στο  $\mathbb{R}$  συναρτήσεις με  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx$  ( $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ), ισχύει  $\beta = \gamma$ .

**A4.** Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου  $f'$  μιας συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $[-2, 2]$ . Επιλέξτε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.



Το σημείο  $A(0, f(0))$  είναι:

1. θέση τοπικού μέγιστου της  $f$
2. θέση τοπικού ελάχιστου της  $f$
3. σημείο καμπής της  $C_f$

### **ΛΥΣΗ**

**A1.**

#### **i. Διατύπωση του Θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών:**

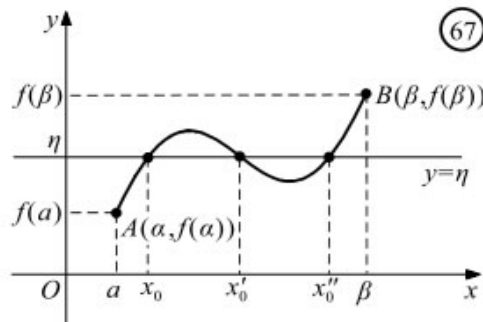
Έστω μια συνάρτηση  $f$ , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$ .

Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$  και  $f(a) \neq f(\beta)$  τότε, για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(a)$  και  $f(\beta)$  υπάρχει ένας, τουλάχιστον  $x_0 \in (a, \beta)$  τέτοιος, ώστε  $f(x_0) = \eta$ .

#### **Απόδειξη του Θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών:**

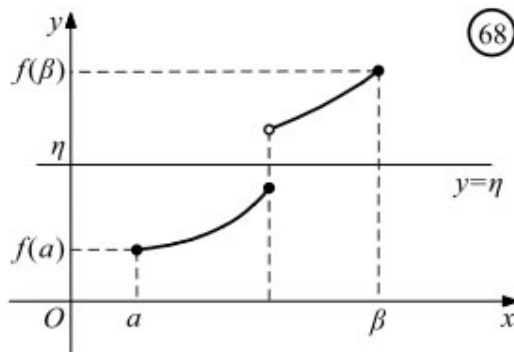
Ας υποθέσουμε ότι  $f(a) < f(\beta)$ . Τότε θα ισχύει  $f(a) < \eta < f(\beta)$  (επόμενο σχήμα).

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) - \eta$ ,  $x \in [a, \beta]$ , παρατηρούμε ότι :



- η g είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$  και
- $g(a) g(\beta) < 0$ , αφού  $g(a) = f(a) - \eta < 0$  και  $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$ . Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει  $x_0 \in (a, \beta)$  τέτοιο, ώστε  $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$ , οπότε  $f(x_0) = \eta$ .

ii. Αν μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής στο διάστημα  $[a, \beta]$ , τότε, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.



**A2.** Το λάθος βρίσκεται στην αντικατάσταση  $x = \frac{1}{u}$ . Η αντικατάσταση  $x = \frac{1}{u}$  δεν είναι σωστή διότι όταν  $x = 0$  δεν υπάρχει αντίστοιχο  $u$ .

**A3.**

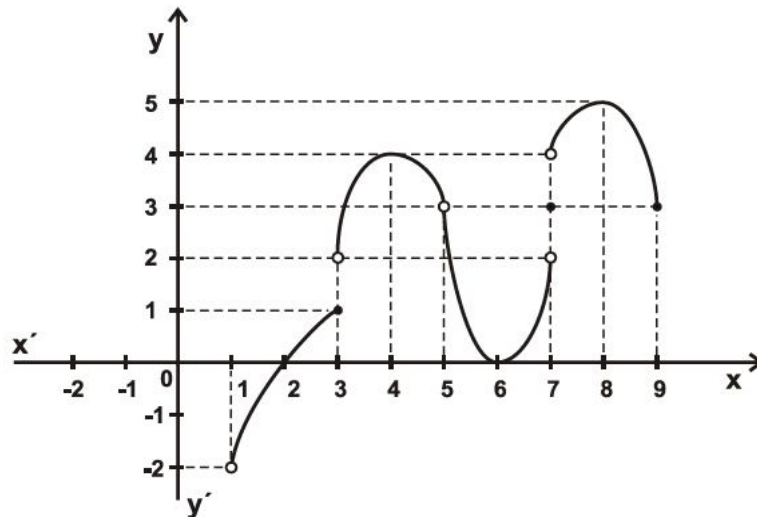
- α. Σωστό.
- β. Λάθος.
- γ. Λάθος.
- δ. Σωστό.
- ε. Λάθος.

**A4.** Το 2 (Το σημείο  $A(0, f(0))$  είναι θέση τοπικού ελάχιστου της  $f$ ) διότι  $f(x) < 0$  για κάθε  $x \in (-2, 0)$  και συνεχής στο  $[-2, 0]$  άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[-2, 0]$ . Ακόμα  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in (0, 2)$  και συνεχής στο  $[0, 2]$  άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα

στο  $[0, 2]$ . Επομένως στο  $x_0 = 0$  έχει τοπικό ελάχιστο ,δηλαδή το σημείο  $A(0, f(0))$  είναι θέση τοπικού ελάχιστου της  $f$ .

## **ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .



**B1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της  $f$ .

**B2.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$       β)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$       γ)  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

δ)  $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$       ε)  $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**B3.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$       β)  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$       γ)  $\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**B4.** Να βρείτε τα σημεία στα οποία η  $f$  δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**B5.** Να βρείτε τα σημεία  $x_0$  του πεδίου ορισμού της  $f$  για τα οποία ισχύει  $f'(x_0) = 0$ .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**ΛΥΣΗ**

**B1.** Το πεδίο ορισμού  $A$  της συνάρτησης  $f$  είναι  $A = (1, 5) \cup (5, 9]$ .

Το σύνολο τιμών  $f(A)$  είναι  $f(A) = (-2, 5]$

**B2.** Έχουμε:

α)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2$

β)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2$  (Δεν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ )

γ)  $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 3 = \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$

δ)  $\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = 4 \neq \lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = 2$  (Δεν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$ )

ε)  $\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9^+} f(x) = 3$

**B3.**

α) Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty, \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0 \text{ και } f(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (1, 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty, \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0 \text{ και } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (2, 3)$$

Δεν υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$ .

β) Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)} = +\infty, \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow 6} f(x) = 0 \text{ και } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (5, 7)$$

γ) θέτουμε  $f(x) = u$  και έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = u_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = 5 = u_0$ .

Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = \lim_{u \rightarrow 5} f(u) = 3$$

**B4.** Η συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής στα σημεία  $x_1 = 3$  και  $x_2 = 7$  αφού:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2 \text{ (Δεν υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{)} \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = 4 \neq \lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = 2 \text{ (Δεν υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 7} f(x) \text{)}$$

$$x_3 = 4$$

**B5.** Τα σημεία στα οποία έχουμε  $f'(x) = 0$  είναι  $x_4 = 6$ , αφού από την παρατήρηση του

$$x_5 = 8$$

δοσμένου σχήματος σε αυτά δέχεται οριζόντια εφαπτομένη (παράλληλη με τον άξονα  $x'x$ ) οπότε (και επειδή στα σημεία αυτά είναι συνεχής) θα έχουμε  $f'(x_3) = f'(x_4) = f'(x_5) = 0$ .

**ή εναλλακτικά :** Η  $f$  παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία  $x_3, x_4, x_5$  στα οποία είναι παραγωγίσιμη και επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, θα είναι  $f'(x_3) = f'(x_4) = f'(x_5) = 0$ .

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = e^x + x^2 + x, x \in \mathbb{R}$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός  $\alpha \in (-1, 0)$  τέτοιος, ώστε να ισχύει:  $e^\alpha + 2\alpha + 1 = 0$ .

**Γ2.** Να δείξετε ότι:  $f(x) \geq \alpha^2 - \alpha - 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , όπου  $\alpha$  ο αριθμός του ερωτήματος Γ1.

**Γ3.** Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης  $f(x) = \frac{2017}{2016}$ .

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(x^2 + 1) + f(x^2 + 2) < f(x^2) + f(x^2 + 3), \text{ για κάθε } x > 0$$

**Γ5.** Έστω ένα σημείο  $M(x(t), y(t))$ , όπου  $t$  ο χρόνος, το οποίο διατρέχει τη γραφική παράσταση της  $f$  με  $x'(t) \neq 0, x(t) \leq 0$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή  $t_0$ , με  $x(t_0) \in (-1, 0)$ , ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του  $M$ , ως προς το χρόνο, να μηδενίζεται.

## **ΛΥΣΗ**

**Γ1.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = e^x + 2x + 1, x \in \mathbb{R}$ .

Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για την  $g$  στο  $[-1, 0]$

- ♦ Η  $g$  είναι συνεχής στο  $[-1, 0]$  (ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων στο  $[-1, 0]$ ).
- ♦  $g(0) = 2 > 0$

$$\diamond \quad g(-1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$$

Άρα υπάρχει  $a \in (-1, 0)$  τέτοιο, ώστε  $g(a) = 0 \Leftrightarrow e^a + 2a + 1 = 0$ .

Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο  $\mathbb{R}$ ), με  $g'(x) = e^x + 2 > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και επειδή η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $x \in \mathbb{R}$ , άρα και «1-1», δηλαδή η  $g$  έχει μοναδική ρίζα την  $x = a$ .

**Γ2.** Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο  $\mathbb{R}$ ) με  $f'(x) = e^x + 2x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Άρα  $f'(x) = g(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και η  $g$  έχει μοναδική ρίζα την  $x = a$ . Έχουμε:

$$x < a \Rightarrow g(x) < g(a) \Rightarrow f'(x) < 0$$

$$x > a \Rightarrow g(x) > g(a) \Rightarrow f'(x) > 0$$

Δηλαδή  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in (-\infty, a)$  και επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $(-\infty, a]$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, a]$ . Ακόμα  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (a, +\infty)$  και επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, +\infty)$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[a, +\infty)$ .

Επομένως η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο  $x = a$ , το  $f(a) = e^a + a^2 + a$  (1).

Όμως έχουμε:

$$g(a) = 0 \Leftrightarrow e^a + 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow e^a = -2a - 1 \quad (2)$$

Άρα η (1) δίνει:

$$f(a) = e^a + a^2 + a = -2a - 1 + a^2 + a = a^2 - a - 1$$

Άρα έχουμε:

$$f(x) \geq f(a) \Rightarrow f(x) \geq a^2 - a - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**Γ3.** Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x^2 + x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x^2 + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ x^2 \left( \frac{e^x}{x^2} + 1 + \frac{1}{x} \right) \right] = +\infty.$$

Αν  $\Delta_1 = (-\infty, \alpha]$ ,  $\Delta_2 = [\alpha, +\infty)$  θα έχουμε:

$$\begin{aligned} f(\Delta_1) &= [a^2 - a - 1, +\infty) \\ f(\Delta_2) &= [a^2 - a - 1, +\infty) \end{aligned} \quad (\text{επειδή η } f \text{ γν. φθίνουσα στο } \Delta_1 \text{ και γν. αύξουσα στο } \Delta_2)$$

Είναι:

$$\alpha \in (-1, 0) \Rightarrow -1 < \alpha < 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 < \alpha^2 < 1 \\ 0 < -\alpha < 1 \end{cases} \Rightarrow -1 < \alpha^2 - \alpha - 1 < 1 \text{ και } \frac{2017}{2016} > 1.$$

Επομένως:



- ♦  $\frac{2017}{2016} \in f(\Delta_1)$ , άρα υπάρχει  $\rho_1 \in (-\infty, a)$  τέτοιος, ώστε  $f(\rho_1) = \frac{2017}{2016}$  και είναι μοναδικός αφού η  $f$ , ως γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta_1$ , είναι και «1-1».
  - ♦  $\frac{2017}{2016} \in f(\Delta_2)$ , άρα υπάρχει  $\rho_2 \in (a, +\infty)$  τέτοιος, ώστε  $f(\rho_2) = \frac{2017}{2016}$  και είναι μοναδικός αφού η  $f$ , ως γνησίως αύξουσα στο  $\Delta_2$ , είναι και «1-1».
- Επομένως η  $f$  έχει δύο ακριβώς ρίζες, τις  $\rho_1, \rho_2$ .

**Γ4.** Η σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε γράφεται διαδοχικά:

$$\begin{aligned} f(x^2+1)+f(x^2+2) < f(x^2)+f(x^2+3) &\Leftrightarrow f(x^2+1)-f(x^2) < f(x^2+3)-f(x^2+2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{f(x^2+1)-f(x^2)}{(x^2+1)-x^2} < \frac{f(x^2+3)-f(x^2+2)}{(x^2+3)-(x^2+2)} &(1) \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για την συνάρτηση  $f$  στα διαστήματα  $[x^2, x^2+1]$  και  $[x^2+2, x^2+3]$ ,  $x \in \mathbb{R}$ :

- ♦ Η  $f$  παραγωγίσιμη στα διαστήματα  $[x^2, x^2+1]$  και  $[x^2+2, x^2+3]$ ,  $x \in \mathbb{R}$  (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο  $\mathbb{R}$ ). Άρα η  $f$  είναι και συνεχής στα διαστήματα αυτά. Επομένως υπάρχουν αντίστοιχα:

$$\xi_1 \in (x^2, x^2+1), \xi_2 \in (x^2+2, x^2+3) \text{ με:}$$

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x^2+1)-f(x^2)}{(x^2+1)-x^2} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(x^2+3)-f(x^2+2)}{(x^2+3)-(x^2+2)}$$

Έτσι η προς απόδειξη σχέση (1) γίνεται  $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$ , η οποία είναι αληθής αφού:

$$\begin{aligned} \xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2), \text{ επειδή η } f' \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R} \text{ διότι} \\ f''(x) = e^x + 2 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ (} f' \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \text{)}. \end{aligned}$$

**Γ5.** Έχουμε ότι  $y(t) = e^{x(t)} + x^2(t) + x(t)$ ,  $t \geq 0$  (2). Τα μέλη της σχέσης (2) είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις για κάθε  $t \geq 0$  (ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων για κάθε  $t \geq 0$ ). Επομένως έχουμε:

$$y'(t) = e^{x(t)} \cdot x'(t) + 2x(t) \cdot x'(t) + x'(t) \Leftrightarrow y'(t) = x'(t)(e^{x(t)} + 2x(t) + 1) \quad (3)$$

Αν  $t = t_0$  είναι η χρονική στιγμή που το σημείο Μ διέρχεται από το  $(a, f(a))$ , τότε  $x(t_0) = a \in (-1, 0)$ .

Η σχέση (3) για  $t = t_0$  γίνεται:

$$y'(t_0) = x'(t_0)(e^{x(t_0)} + 2x(t_0) + 1) \quad (4) \text{ με } x'(t) \neq 0$$

Ισχύει ακόμα ότι  $e^{x(t_0)} + 2x(t_0) + 1 = e^a + 2a + 1 = 0$  (5). Η σχέση (4), λόγω της σχέσης (5) γίνεται  $y'(t_0) = x'(t_0) \cdot 0 = 0$ .

### **ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

$$f'(x) = x\eta\mu x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ και } f(0) = 0$$

**Δ1. i.** Να δείξετε ότι:

$$f(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

**ii.** Να δείξετε ότι:

$$f(x) = \eta\mu x > x\sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

**Δ2.** Έστω επίσης η συνάρτηση:

$$g(x) = |x\epsilon\phi x - x^2|, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Να μελετήσετε τη  $g$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Δ3. i.** Αν  $\alpha > 0$ , να δείξετε ότι το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης  $g(x) = \alpha$  είναι μηδέν.

**ii.** Έστω  $x_1, x_2, x_3$  οι θετικές ρίζες των εξισώσεων

$$g(x) = 1, \quad g(x) = 2, \quad g(x) = 3 \text{ αντίστοιχα.}$$

Να δείξετε ότι υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  με  $\xi_1 < \xi_2$  τέτοια, ώστε:

$$(x_2 - x_1)g'(\xi_1) + (x_3 - x_2)g'(\xi_2) = 2$$

**Δ4.**

**i.** Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln[\eta\mu x - f(x)] - \ln x + x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x}$$

**ii.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $-f'$  και την ευθεία  $x = \frac{\pi}{2}$ .

**ΛΥΣΗ**

**Δ1. i.** Έχουμε διαδοχικά:

$$f'(x) = x \cdot \eta\mu x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x - f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - x \cdot \eta\mu x \Leftrightarrow (\eta\mu x - f(x))' = (x\sigma\upsilon\nu x)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + c, \text{ όπου } c \in \mathbb{R} \text{ σταθερά}$$

για  $x=0$  έχουμε  $f(0) = 0 + c \Leftrightarrow 0 = c \Leftrightarrow c = 0$

άρα:

$$f(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x$$

**ii.**  $f(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  με

$f'(x) = x\eta\mu x > 0$ ,  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  και η  $f$  είναι συνεχής στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , επομένως η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  και ισχύει:

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(0) < f(x) \Leftrightarrow 0 < \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x > x\sigma\upsilon\nu x$$

**Δ2.**  $g(x) = |x\epsilon\varphi x - x^2| = |x| \cdot |\epsilon\varphi x - x|$

Από το ερώτημα (Δ1 ii) ισχύει:

$$\eta\mu x > x\sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \epsilon\varphi x > x.$$

Έχουμε:

♦ αν  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  τότε  $-x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  και ισχύει:

$$\epsilon\varphi(-x) > -x \Leftrightarrow -\epsilon\varphi x > -x \Leftrightarrow \epsilon\varphi x < x$$

για  $x=0 \Rightarrow g(0) = 0$

Άρα  $g(x) = x\epsilon\varphi x - x^2$ ,  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ) με:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x\epsilon\varphi x - x^2)' = \epsilon\varphi x - 2x + \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = (\epsilon\varphi x - x) + \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - x = \\ &= (\epsilon\varphi x - x) + x \left( \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \right) = (\epsilon\varphi x - x) + x \cdot \epsilon\varphi^2 x \end{aligned}$$

♦ αν  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  τότε  $\epsilon\varphi x - x > 0$  και  $x \cdot \epsilon\varphi^2 x > 0$  άρα  $g'(x) > 0$

- ♦ αν  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  τότε  $\varepsilon\varphi x - x < 0$  και  $x \cdot \varepsilon\varphi^2 x < 0$  άρα  $g'(x) < 0$
- ♦ για  $x = 0 \Rightarrow g'(0) = 0$

Άρα η  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$  και γνησίως αύξουσα στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

Η  $g$  παρουσιάζει για  $x=0$  ολικό ελάχιστο το  $g(0)=0$ .

**2<sup>ος</sup> τρόπος:**

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x\varepsilon\varphi x - x^2)' = \varepsilon\varphi x - 2x + \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + x - 2x\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot (\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x) + x\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \end{aligned}$$

- ♦  $g'(0) = 0$
- ♦ αν  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  τότε  $\sigma\upsilon\nu x > 0$ ,  $\eta\mu x > x\sigma\upsilon\nu x$  και  $x \cdot \eta\mu^2 x > 0$  άρα  $g'(x) > 0$

Άρα η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

- ♦ έστω  $x_1, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$  με  $x_1 < x_2$  τότε:

$$-x_1 > -x_2 \Rightarrow g(-x_1) > g(-x_2) \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Άρα η  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

Η  $g$  παρουσιάζει για  $x=0$  ολικό ελάχιστο το  $g(0)=0$ .

**Δ3. i.**  $g(x) = a$ , όπου  $a > 0$

- ♦  $g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = [0, +\infty)$  και  $a \in [0, +\infty)$ , άρα υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(γιατί η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ) τέτοιο, ώστε  $g(x_0) = a$

- ♦  $-x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  και  $g(-x_0) = (-x_0)\varepsilon\varphi(-x_0) - (-x_0)^2 = g(x_0) = a$

Το  $-x_0$  είναι μοναδικό (γιατί η  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ )

Άρα το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης  $g(x) = a$ , όταν  $a > 0$  είναι:  $-x_0 + x_0 = 0$ .

**ii.** Επειδή  $x_1, x_2, x_3$  οι θετικές ρίζες των εξισώσεων

$g(x) = 1$ ,  $g(x) = 2$ ,  $g(x) = 3$  αντίστοιχα, έχουμε:

$$g(x_1) = 1, g(x_2) = 2, g(x_3) = 3$$

και είναι:

$$1 < 2 < 3 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2) < g(x_3) \Leftrightarrow x_1 < x_2 < x_3$$

από την εφαρμογή του Θ.Μ.Τ του Διαφορικού Λογισμού για την  $g$  στα  $[x_1, x_2]$ ,  $[x_2, x_3]$  (αφού πληρούνται οι προϋποθέσεις διότι  $g$  παραγωγίσιμη στο  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , επομένως και στα  $[x_1, x_2]$ ,  $[x_2, x_3]$ , άρα και συνεχής σε αυτά) έχουμε:

$$(x_2 - x_1) \cdot g'(\xi_1) = g(x_2) - g(x_1) = 2 - 1 = 1, \xi_1 \in (x_1, x_2)$$

$$(x_3 - x_2) \cdot g'(\xi_2) = g(x_3) - g(x_2) = 3 - 2 = 1, \xi_2 \in (x_2, x_3)$$

Προσθέτοντας τις προηγούμενες σχέσεις κατά μέλη προκύπτει:

$$(x_2 - x_1) \cdot g'(\xi_1) + (x_3 - x_2) \cdot g'(\xi_2) = 2$$

**Δ4. i.** Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln[\eta\mu x - f(x)] - \ln x + x^2}{\eta\mu^2 x - \chi\sigma\nu\nu x + x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sigma\nu\nu x) + x^2}{\eta\mu^2 x - \chi\sigma\nu\nu x + x} \stackrel{D.L.P}{=} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\varepsilon\varphi x + 2x}{2\eta\mu\chi\sigma\nu\nu x - \sigma\nu\nu x + \chi\eta\mu x + 1} &\stackrel{D.L.P}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{\sigma\nu\nu^2 x} + 2}{2\sigma\nu\nu^2 x - 2\eta\mu^2 x + 2\eta\mu x + \chi\sigma\nu\nu x} = \\ &= \frac{-\frac{1}{\sigma\nu\nu^2 \cdot 0} + 2}{2\sigma\nu\nu^2 \cdot 0 - 2\eta\mu^2 \cdot 0 + 2\eta\mu \cdot 0 + 0\sigma\nu\nu \cdot 0} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**2<sup>ος</sup> τρόπος:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln[\eta\mu x - f(x)] - \ln x + x^2}{\eta\mu^2 x - \chi\sigma\nu\nu x + x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sigma\nu\nu x) + x^2}{\eta\mu^2 x - \chi\sigma\nu\nu x + x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\ln(\sigma\nu\nu x)}{x^2} + 1}{\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 - \frac{\sigma\nu\nu x - 1}{x}} = l$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sigma\nu\nu x)}{x^2} \stackrel{D.L.H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\varepsilon\varphi x}{2x} \stackrel{D.L.H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2\sigma\nu\nu^2 x} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 = l^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\nu\nu x - 1}{x} \stackrel{D.L.H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\eta\mu x}{1} = 0$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln[\eta\mu x - f(x)] - \ln x + x^2}{\eta\mu^2 x - \chi\sigma\nu\nu x + x} = \frac{-\frac{1}{2} + 1}{1 - 0} = \frac{1}{2}$$

ii.

Για  $0 < x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \eta\mu x - \chi\sigma\nu\nu x > 0$  (I) (από το ερώτημα Δ1 ii) και  $\chi\eta\mu x > 0$  (II) για κάθε

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Άρα με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$\eta\mu x - \chi\sigma\nu\nu x + \chi\eta\mu x > 0 \text{ (III), για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f, -f'$  τέμνονται μόνο στο σημείο  $O(0,0)$  (αφού  $f(0) = f'(0) = 0$ ).

Το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $-f'$  και την ευθεία  $x = \frac{\pi}{2}$  είναι (λόγω της σχέσης (III) έχουμε

$$|\eta\mu x - \chi\sigma\nu\nu x + \chi\eta\mu x| = \eta\mu x - \chi\sigma\nu\nu x + \chi\eta\mu x \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]):$$

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x) - f'(x)| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\eta\mu x - \chi\sigma\nu\nu x + \chi\eta\mu x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta\mu x - \chi\sigma\nu\nu x + \chi\eta\mu x) dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \chi\sigma\nu\nu x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \chi\eta\mu x dx = I_1 - I_2 + I_3 \quad (1) \end{aligned}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x dx = [-\sigma\nu\nu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \chi\sigma\nu\nu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\eta\mu x)' dx = [\chi\eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x dx = \frac{\pi}{2} + [\sigma\nu\nu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \chi\eta\mu x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sigma\nu\nu x)' dx = -[\chi\sigma\nu\nu x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\nu\nu x dx = [\eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\text{Άρα: } E(\Omega) = 1 - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + 1 = 3 - \frac{\pi}{2} \text{ τ.μ.}$$

**Εναλλακτικά για το μοναδικό σημείο τομής των  $f, -f'$  έχουμε:**

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f, -f'$  τέμνονται μόνο στο σημείο  $O(0,0)$  αφού :

$$f(x) = -f'(x) \Leftrightarrow \eta\mu x - \chi\sigma\nu\nu x = -\chi\eta\mu x \Leftrightarrow \eta\mu x - \chi\sigma\nu\nu x + \chi\eta\mu x = 0 \quad (1)$$

Προφανώς για  $x = 0$  η (1) επαληθεύεται, δηλαδή οι  $f, -f'$  τέμνονται στο  $O(0,0)$ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $K(x) = \eta\mu x - \chi\sigma\upsilon\nu x + \chi\eta\mu x$ ,  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ) με  $K'(x) = \chi\eta\mu x + \eta\mu x + \chi\sigma\upsilon\nu x > 0$  για κάθε  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  και επειδή η  $K$  είναι συνεχής στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  θα είναι γνησίως αύξουσα στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , άρα και «1-1» και επομένως η  $x = 0$  είναι η μοναδική ρίζα της (1). Άρα οι  $f$ ,  $-f'$  τέμνονται μόνο στο σημείο  $O(0,0)$ .

Επιστημονική επιμέλεια:

Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

Ρουμελιώτης Αντώνης, Καθηγητής Μαθηματικών