<u>ΛΥΣΕΙΣ</u>

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ 1

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 24 ΜΑΡΤΙΟΥ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

Α2. i. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

ii. Να δώσετε τον ορισμό της μέσης τιμής ενός συνόλου ν παρατηρήσεων.

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l_2$, όπου $l_1, l_2\in R$, τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=l_1\cdot l_2$$

β) Η σχετική συχνότητα μιας τιμής της μεταβλητής Χ μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές.

γ) Αν η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε είναι κανονική ή περίπου κανονική, τότε περίπου το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-s,\ \bar{x}-s)$.

δ) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο R, τότε ισχύει :

$$\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x) \quad \text{για κάθε} \quad x\in R$$

ε) Για δύο ενδεχόμενα Α και Β του δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

ΛΥΣΗ

Α1. Θεωρία, απόδειξη σελίδα 151 σχολικού βιβλίου.

Α2. i. Ορισμός, σελίδα 13,σχολικό βιβλίο ii. Ορισμός, σελίδα 85 ,σχολικό βιβλίο.

Α3.

α. Σωστό.

β. Λάθος.

γ. Λάθος.

δ. Σωστό.

ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$$

Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Β2. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\left(f(x)\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}\right).$$

Β3. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Β4. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$.

ΛΥΣΗ

Β1. Πρέπει $x\geq 0$ και $\sqrt{x}+1\neq 0$ (που ισχύει για κάθε $x\geq 0$), άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=[0,+\infty)$

Β2. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\left(f(x)\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\right).\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}$$

Β3. Η είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,\ +\infty)$ και συνεχής στο $[0,\ +\infty)$ με:

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)}=\sqrt{x}-1$$

$$f'(x)=\left(\sqrt{x}-1\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ x>0$$

Άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x>0$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $[0,\ +\infty)$.

Β4. Έχουμε:

$$f'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}}=1$$

Έστω ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ με τον άξονα $x'x$. Έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\omega = f'\left(\frac{1}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{4} \text{ (διότι } 0 \le \omega < \pi \text{)}$$

ΘΕΜΑ Γ

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν οι μαθητές ενός σχολείου για να μεταβούν από το σπίτι τους στο σχολείο, έχουν ομαδοποιηθεί σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους c, όπως στον παρακάτω πίνακα:

Χρόνοι (σε λεπτά) κλάσεις	**Κέντρο κλάσης x_i**	**Αριθμός μαθητών ν_i**	**Αθροιστική Συχνότητα N_i**	**Σχετική συχνότητα f_i %**	**Αθροιστική σχετική συχνότητα F_i %**
$[5, ...)$		20			
$[..., ...)$		30			
$[..., ...)$	30	100			
$[..., ...)$					
$[..., ...)$		20			
Σύνολα		$\nu = ...$			

Γ1. Να αποδείξετε ότι το κοινό πλάτος των κλάσεων είναι $c=10$.

Γ2. i. Αν η μέση τιμή των χρόνων είναι $\bar{x} = 30$, να αποδείξετε ότι $\nu_4 = 30$.

ii. Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας συμπληρωμένο.
Να δικαιολογήσετε τις τιμές των τεσσάρων τελευταίων στηλών.

Γ3. Να βρείτε την διάμεσο και την διακύμανση των χρόνων.

Γ4. i. Πόσοι μαθητές χρειάστηκαν τουλάχιστον 20 λεπτά για να μεταβούν από το σπίτι τους στο σχολείο;

ii. Αν επιλέξουμε τυχαία έναν μαθητή, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Α: «ο μαθητής να χρειάστηκε λιγότερο από 25 λεπτά για να πάει στο σχολείο του».

ΛΥΣΗ

Γ1. Επειδή το κοινό πλάτος των κλάσεων είναι c, τα άκρα των τριών πρώτων κλάσεων είναι:

1η κλάση: $[5,\ 5+c)$

2η κλάση: $[5+c,\ 5+2c)$

3η κλάση: $[5+2c,\ 5+3c)$

Αφού το κέντρο της τρίτης κλάσης είναι 30 έχουμε:

$$\frac{5+2c+\ 5+3c}{2}=30\Leftrightarrow\frac{10+5c}{2}=30\Leftrightarrow 5c=50\Rightarrow c=10$$

Γ2. α)

Κέντρο κλάσης x_i	Αριθμός μαθητών ν_i	$x_i\ \nu_i$
10	20	200
20	30	600
30	100	3000
40	ν_4	$40\ \nu_4$
50	20	1000
	$\nu=170+\nu_4$	$4800+40\ \nu_4$

Επειδή $\bar{x}=30$ έχουμε:

$$\frac{4800+40\nu_4}{170+\nu_4}=30\Leftrightarrow 4800+40\nu_4=30(170+\nu_4)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4800+40\nu_4=5100+30\nu_4\Leftrightarrow 10\nu_4=300\Leftrightarrow \nu_4=30$$

β) $\nu=170+\nu_4=170+30=200$

$N_1=\nu_1=20,\ N_2=\nu_1+\nu_2=20+30=50,\ N_3=\nu_1+\nu_2+\nu_3=20+30+100=150$

$N_4=N_3+\nu_4=150+30=180,\ N_5=\nu=200$

$$f_i\%=\frac{\nu_i}{\nu}\cdot 100\ (i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

Επομένως οι σχετικές συχνότητες % είναι:

$$f_1\%=\frac{\nu_1}{\nu}=\frac{20}{2}=10,\ f_2\%=\frac{\nu_2}{\nu}=\frac{30}{2}=15,\ f_3\%=\frac{\nu_3}{\nu}=\frac{100}{2}=50,\ f_4\%=\frac{\nu_4}{\nu}=\frac{30}{2}=15,\ f_5\%=\frac{\nu_5}{\nu}=\frac{20}{2}=10$$

Ακόμα οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες είναι:

$F_1\% = f_1\% = 10,\ F_2\% = f_1\% + f_2\% = 10 + 15 = 25,\ F_3\% = F_2\% + f_3\% = 25 + 50 = 75$

$F_4\% = F_3\% + f_4\% = 75 + 15 = 90$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο επόμενος.

Χρόνοι (σε λεπτά) κλάσεις	Κέντρο κλάσης x_i	Αριθμός μαθητών ν_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική συχνότητα $f_i\,\%$	Αθροιστική σχετική συχνότητα $F_i\,\%$
$[5,\ 15)$	10	20	20	10	10
$[15,\ 25)$	20	30	50	15	25
$[25,\ 35)$	30	100	150	50	75
$[35,\ 45)$	40	30	180	15	90
$[45,\ 55)$	50	20	200	10	100
Σύνολα		ν=200		100	

Γ3. Επειδή οι 100 παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα στην κλάση $[25,\ 35)$ προκύπτει ότι στο διάστημα $[25,\ 30)$ βρίσκονται $\frac{100}{2} = 50$ παρατηρήσεις , επομένως κάτω από την τιμή 30 βρίσκονται 20+30+50=100 παρατηρήσεις, δηλαδή το 50% του συνόλου των παρατηρήσεων, άρα η διάμεσος είναι δ=30.

Εναλλακτικά:

Κατασκευάζουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις % ($F_i\%$).

Διακύμανση s^2 **:**

Κέντρο κλάσης x_i	Αριθμός μαθητών ν_i	$(x_i-\bar{x})^2\cdot \nu_i$
10	20	8000
20	30	3000
30	100	0
40	30	3000
50	20	8000
	200	22000

Άρα :

$$s^2=\frac{22000}{200}=110$$

Γ4.α) Το πλήθος των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 20 λεπτά για να μεταβούν από το σπίτι τους στο σχολείο είναι:

$$\frac{30}{2}+100+30+20=165$$

β) Επειδή το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν χρόνο λιγότερο από 25 λεπτά για να πάνε στο σχολείο τους είναι 25% προκύπτει ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου A είναι:

$$P(A)=\frac{25}{100}=0,25.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση:

$$f(x)=x^4+12P(B)\cdot x+6-2P(A),\ x\in R$$

όπου A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, για τα οποία ισχύει ότι:

$$4P^2(A)+9P^2(B)=4P(A)+6P(B)-2$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $P(A)=\frac{1}{2}$ και $P(B)=\frac{1}{3}$

Δ2. Αν επιπλέον ισχύει $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων : $(A-B)\cup(B-A),\ A'\cap B',\ A'\cup B'$.

Δ3. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ4. Να αποδείξετε ότι ισχύει $x^4+4x+3\geq 0$, για κάθε $x\in R$.

Δ5. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της M με τετμημένη $2P(A)$.

ΛΥΣΗ

Δ1. $4P^2(A)+9P^2(B)=4P(A)+6P(B)-2 \Leftrightarrow 4P^2(A)+9P^2(B)-4P(A)-6P(B)+2=0 \Leftrightarrow$

$4P^2(A)-4P(A)+1+9P^2(B)-6P(B)+1=0 \Leftrightarrow (2P(A)-1)^2+(3P(B)-1)^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2P(A)-1=0$ και $3P(B)-1=0$

Άρα $P(A)=\dfrac{1}{2}$ και $P(B)=\dfrac{1}{3}$.

Δ2.

- Επειδή τα ενδεχόμενα $A-B$ και $B-A$ είναι ξένα μεταξύ τους έχουμε:
  $P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P(A-B)+P(B-A)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-2\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$
- Έχουμε διαδοχικά:
  $$P(A'\cap B')=P(A'-B)=P(A')-P(A'\cap B)=1-P(A)-P(B-A)=$$
  $$=1-P(A)-[P(B)-P(A\cap B)]=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=$$
  $$=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$
- Ακόμα:
  $$P(A'\cup B')=P(A')+P(B')-P(A'\cap B')=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

Εναλλακτικά:

- $P\left[A'\cap B'\right]=P\left[(A\cup B)'\right]=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$
- $P\left[(A\cap B)'\right]=P(A'\cup B')=1-P(A\cap B)=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$

Σημείωση:

Στην περίπωση αυτή θα πρέπει να αποδειχθούν οι τύποι

$$P\left[A'\cap B'\right]=P\left[(A\cup B)'\right] \text{ και } P\left[(A\cap B)'\right]=P(A'\cup B')$$

με τη χρήση διαγραμμάτων Venn (γνωστοί ως τύποι του De Morgan).

Δ3. $f(x)=x^4+12P(B)\cdot x+6-2P(A)=x^4+4\cdot x+5$

$f(x)=x^4+4\cdot x+5$, $f'(x)=4\cdot x^3+4$

$f^{'}\left(x\right)=4\cdot x^3+4=0 \Leftrightarrow \ x^3=-1 \Leftrightarrow x=-1$

πίνακας προσήμου της $f^{'}$

x	-00 -1	+00
$f^{'}(x)$	-	+
$f(x)$	γν.φθίνουσα	γν.αύξουσα

$f^{'}(0)=4>0$

<u>Μονοτονία:</u> η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,-1\right]$

και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[-1,+\infty\right)$

<u>Ακρότατα:</u>

Η συνάρτηση f παρουσιάζει για $x=-1$ τοπικό (ολικό) ελάχιστο το $f\left(-1\right)=1-4+5=2$

Δ4. Επειδή η συνάρτηση f παρουσιάζει για $x=-1$ ολικό ελάχιστο το $f\left(-1\right)=2$ ισχύει:

$$f\left(x\right)\geq f\left(-1\right) \Leftrightarrow \ f\left(x\right)\geq 2 \Leftrightarrow \ x^4+4\cdot x+5\geq 2 \Leftrightarrow \ x^4+4x+3\geq 0$$

για κάθε $x\in R$.

Δ5. $2P\left(\mathrm{A}\right)=1$ και $f\left(1\right)=10,\ f^{'}\left(1\right)=8$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της M με τετμημένη $2P\left(\mathrm{A}\right)=1$ είναι $y=8\cdot x+\beta$. Επειδή το σημείο $\mathrm{M}\left(1,10\right)$ ανήκει στην ευθεία $y=8x+\beta$ έχουμε $10=8\cdot 1+\beta \Leftrightarrow \beta=2$ άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y=8\cdot x+2$

Επιστημονική επιμέλεια:

Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

Ρουμελιώτης Αντώνης , Καθηγητής Μαθηματικών