

# **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup>**

### **ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ**

**Συνοπτική Θεωρία**

**Όλες οι αποδείξεις**

**Ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου**

**Ασκήσεις από την Τράπεζα Θεμάτων του Υπουργείου και προτεινόμενες**

**Διαγωνίσματα**

### **Πείραμα Τύχης**

Πειράματα των οποίων δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, μολονότι επαναλαμβάνονται (φαινομενικά τουλάχιστον) κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Ένα τέτοιο πείραμα ονομάζεται **πείραμα τύχης**. Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια τον αριθμό των τροχαίων ατυχημάτων που συμβαίνουν σε μια εβδομάδα σε ένα σημείο μιας εθνικής οδού, αφού ο αριθμός αυτός εξαρτάται από πολλούς απρόβλεπτους παράγοντες.

### **Δειγματικός Χώρος**

Όλα τα αποτελέσματα που μπορούν να εμφανιστούν σε ένα πείραμα τύχης λέγονται δυνατά αποτελέσματα ή δυνατές περιπτώσεις του πειράματος. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων λέγεται **δειγματικός χώρος** και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα  $\Omega$ . Αν δηλαδή  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$  είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι το σύνολο  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ .

### **Ενδεχόμενα**

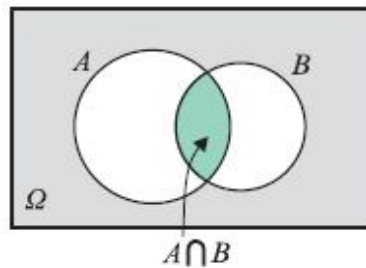
Το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης λέγεται **ενδεχόμενο** ή γεγονός.

Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  ενός πειράματος θεωρείται ότι είναι ενδεχόμενο, το οποίο μάλιστα πραγματοποιείται πάντοτε, αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στο  $\Omega$ . Γι' αυτό το  $\Omega$  λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο**. Δεχόμαστε ακόμα ως ενδεχόμενο και το κενό σύνολο  $\emptyset$  που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης.

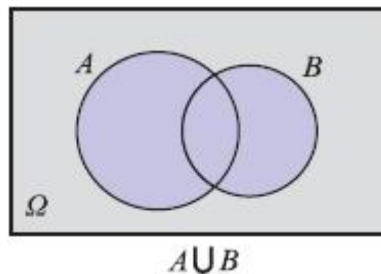
Γι' αυτό λέμε ότι το  $\emptyset$  είναι το **αδύνατο ενδεχόμενο**.

Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου  $A$  θα το συμβολίζουμε με  $N(A)$

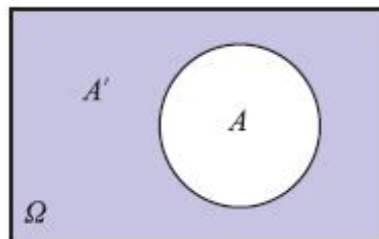
- Το ενδεχόμενο  $A \cap B$ , που διαβάζεται “ $A$  τομή  $B$ ” ή “ $A$  και  $B$ ” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα  $A$  και  $B$ .



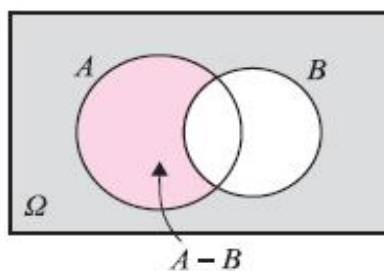
- Το ενδεχόμενο  $A \cup B$ , που διαβάζεται “ $A$  ένωση  $B$ ” ή “ $A$  ή  $B$ ” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα  $A, B$ .



- Το ενδεχόμενο  $A'$ , που διαβάζεται “όχι  $A$ ” ή “συμπληρωματικό του  $A$ ” και πραγματοποιείται, όταν δεν πραγματοποιείται το  $A$ . Το  $A'$  λέγεται και “αντίθετο του  $A$ ”.



- Το ενδεχόμενο  $A - B$ , που διαβάζεται “διαφορά του  $B$  από το  $A$ ” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το  $A$  αλλά όχι το  $B$ . Είναι εύκολο να δούμε ότι  $A - B = A \cap B'$ .



Στον παρακάτω πίνακα τα  $A$  και  $B$  συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος και το  $\omega$  ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού. Στην αριστερή στήλη του πίνακα αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα  $A$  και  $B$  διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα, και στη δεξιά στήλη αναγράφονται οι ίδιες σχέσεις αλλά διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.

Το ενδεχόμενο $A$ πραγματοποιείται	$\omega \in A$
Το ενδεχόμενο $A$ δεν πραγματοποιείται	$\omega \in A' \text{ (ή } \omega \notin A)$
Ένα τουλάχιστον από τα $A$ και $B$ πραγματοποιείται	$\omega \in A \cup B$
Πραγματοποιούνται αμφότερα τα $A$ και $B$	$\omega \in A \cap B$
Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα $A$ και $B$	$\omega \in (A \cup B)'$
Πραγματοποιείται μόνο το $A$	$\omega \in A - B \text{ (ή } \omega \in A \cap B')$
Η πραγματοποίηση του $A$ συνεπάγεται την πραγματοποίηση του $B$	$A \subseteq B$

### Κλασικός Ορισμός Πιθανότητας

Σε πειράματα που τα απλά ενδεχόμενα είναι **ισοπίθανα** ισχύει ότι:

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει άμεσα ότι:

- $P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$
- $P(\emptyset) = \frac{0}{N(\Omega)} = 0$

3. Για κάθε ενδεχόμενο  $A$  ισχύει  $0 \leq P(A) \leq 1$ , αφού το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου είναι ίσο ή μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου  $[N(A) \leq N(\Omega)]$ .

### Αξιοματικός Ορισμός Πιθανότητας

Υπάρχουν όμως πολλά πειράματα τύχης, των οποίων ο δειγματικός χώρος **δεν αποτελείται από ισοπίθانا απλά ενδεχόμενα**. Τότε έχουμε τον επόμενο αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας.

Έστω  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο  $\{\omega_i\}$  αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με  $P(\omega_i)$ , έτσι ώστε να ισχύουν:

- $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$
- $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_n) = 1$

Τον αριθμό  $P(\omega_i)$  ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου  $\{\omega_i\}$ . Ως πιθανότητα  $P(A)$  ενός ενδεχομένου  $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \neq \emptyset$  ορίζουμε το άθροισμα  $P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + \dots + P(\alpha_k)$ , ενώ ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου  $\emptyset$  ορίζουμε τον αριθμό  $P(\emptyset) = 0$ .

Ισχύουν οι επόμενοι κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων:

1. Για οποιαδήποτε **ασυμβίβαστα** μεταξύ τους ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  ισχύει (Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **απλός προσθετικός νόμος**):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

2. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα  $A$  και  $A'$  ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

**3.** Για δύο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει (Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **προσθετικός νόμος**):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**4.**  $A \subseteq B$ , τότε  $P(A) \leq P(B)$

## ΟΛΕΣ ΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

Εδώ παρατίθενται όλες οι αποδείξεις των προτάσεων και των ιδιοτήτων του 1<sup>ου</sup> κεφαλαίου που περιέχονται στην εξεταστέα ύλη του μαθήματος: «Άλγεβρα» της Α' Λυκείου και θα αποτελέσουν το 2<sup>ο</sup> μέρος του 1<sup>ου</sup> θέματος (το Α2) στις γραπτές προαγωγικές εξετάσεις. Οι αποδείξεις έγιναν σύμφωνα με το περιεχόμενο του σχολικού βιβλίου.

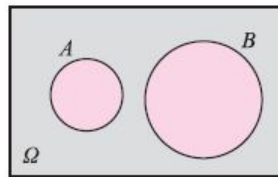
**1.** Εστω  $\Omega$  ένας δειγματικός χώρος, με απλά ενδεχόμενα ισοπίθανα. Αν τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  του  $\Omega$  είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους, να αποδείξετε ότι :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ (απλός προσθετικός νόμος) .}$$

**Απόδειξη:**  
(Σχήμα 1)

Αν  $N(A)=\kappa$  και  $N(B)=\lambda$ , τότε το  $A \cup B$  έχει  $\kappa+\lambda$  στοιχεία, γιατί αλλιώς τα  $A$  και  $B$  δε θα ήταν ασυμβίβαστα. Δηλαδή, έχουμε  $N(A \cup B) = N(A) + N(B) = \kappa + \lambda = N(A) + N(B)$ .

Επομένως: 
$$P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A) + N(B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} = P(A) + P(B)$$



$A \cup B$   
Σχήμα 1

**2.** Εστω  $\Omega$  ένας δειγματικός χώρος, με απλά ενδεχόμενα ισοπίθανα. Αν τα  $A$  και  $B$  είναι δύο ενδεχόμενα του  $\Omega$ , να αποδείξετε ότι:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

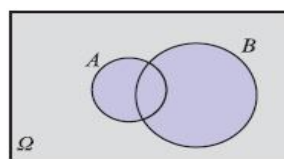
**Απόδειξη:**  
(Σχήμα 2)

Για δυο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  έχουμε:  $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$ , (1) αφού στο άθροισμα  $N(A) + N(B)$  το πλήθος των στοιχείων του  $A \cap B$  υπολογίζεται δυο φορές.

Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με  $N(\Omega)$  έχουμε:

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A) + N(B) - N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



$A \cup B$

Σχήμα 2

3. Έστω  $\Omega$  ένας δειγματικός χώρος, με απλά ενδεχόμενα ισοπίθανα. Αν  $A$  και  $A'$  είναι δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα του  $\Omega$ , να αποδείξετε ότι:  $P(A') = 1 - P(A)$

**Απόδειξη:**  
(Σχήμα 3)

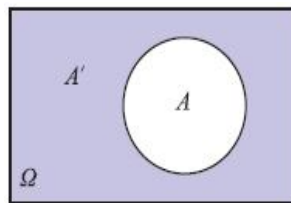
Επειδή  $A \cap A' = \emptyset$ , δηλαδή τα  $A$  και  $A'$  είναι ασυμβίβαστα, έχουμε διαδοχικά, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

$$P(\Omega) = P(A) + P(A')$$

$$1 = P(A) + P(A')$$

Οπότε,  $P(A') = 1 - P(A)$



Σχήμα 3

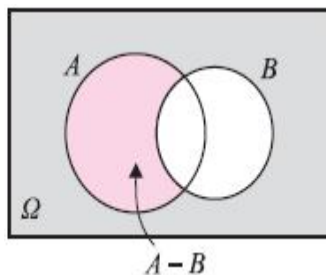
4. Έστω  $\Omega$  ένας δειγματικός χώρος, με απλά ενδεχόμενα ισοπίθανα. Αν τα  $A$  και  $B$  είναι δύο ενδεχόμενα του  $\Omega$ , να αποδείξετε ότι:  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

**Απόδειξη**  
(Σχήμα 4)

Επειδή τα ενδεχόμενα  $A - B$  και  $A \cap B$  είναι ασυμβίβαστα και  $(A - B) \cup (A \cap B) = A$ , έχουμε:

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) .$$

Άρα ,  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$



Σχήμα 4



5. Εστω  $\Omega$  ένας δειγματικός χώρος, με απλά ενδεχόμενα ισοπίθανα. Αν τα  $A$  και  $B$  είναι δύο ενδεχόμενα του  $\Omega$  με  $A \subseteq B$ , να αποδείξετε ότι:  $P(A) \leq P(B)$ .

**Απόδειξη:**

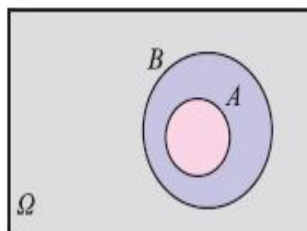
(Σχήμα 5)

Επειδή  $A \subseteq B$  έχουμε διαδοχικά:

$$N(A) \leq N(B)$$

$$\frac{N(A)}{N(\Omega)} \leq \frac{N(B)}{N(\Omega)}$$

$$P(A) \leq P(B)$$



Σχήμα 5

### ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

#### A. Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

Στις παρακάτω προτάσεις να γράψετε δίπλα στην κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Πείραμα τύχης είναι ένα πείραμα του οποίου το αποτέλεσμα δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε, μολονότι επαναλαμβάνεται κάτω από τις ίδιες συνθήκες.
2. Δυνατά αποτελέσματα (ή δυνατές περιπτώσεις) ενός πειράματος τύχης λέγονται όλα τα αποτελέσματα που μπορούν να εμφανιστούν.
3. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων σε ένα πείραμα τύχης λέγεται δειγματικός χώρος του πειράματος.
4. Ενδεχόμενο ή γεγονός λέγεται το σύνολο που έχει ως στοιχεία του ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης.
5. Τα απλά ενδεχόμενα είναι μονοσύνολα, υποσύνολα του δειγματικού χώρου.
6. Βέβαιο ενδεχόμενο είναι ο ίδιος ο δειγματικός χώρος.

7. Αδύνατο ενδεχόμενο είναι το κενό σύνολο.

Στις ερωτήσεις 8-13 τα  $A$  και  $B$  θεωρούνται ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης και το  $\omega$  ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού.

8. Η λεκτική ερμηνεία του  $\omega \in A'$  είναι: «Το ενδεχόμενο  $A$  πραγματοποιείται» .

9. Η λεκτική ερμηνεία του  $\omega \in A \cup B$  είναι: «Πραγματοποιούνται αμφότερα τα  $A$  και  $B$ » .

10. Η λεκτική ερμηνεία του  $\omega \in A \cap B$  είναι: «Ένα τουλάχιστον από τα  $A$  και  $B$  πραγματοποιείται».

11. Η λεκτική ερμηνεία του  $\omega \in A - B$  είναι: «Πραγματοποιείται μόνο το  $A$ » .

12. Η λεκτική ερμηνεία του  $\omega \in (A \cup B)'$  είναι: «Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα  $A$  και  $B$ »

13. Η διατύπωση στην κοινή γλώσσα της έκφρασης: «Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα  $A$  ή  $B$ » σημαίνει στη γλώσσα των συνόλων:  $\omega \in (A - B) \cup (B - A)$  .

14. Ασυμβίβαστα μεταξύ τους λέγονται δύο ενδεχόμενα, όταν η τομή τους είναι το κενό σύνολο.

15. Για κάθε ενδεχόμενο  $A$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει  $0 \leq P(A) < 1$  .

16. Η πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  είναι ίση με  $0$ .

17. Αν  $\Omega$  ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, τότε  $P(\Omega)=1$ .

18. Δύο ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα είναι πάντα συμπληρωματικά .

19. Αν  $P(A)+P(B)=1$ , τότε τα  $A$  και  $B$  είναι πάντα συμπληρωματικά .

20. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα  $A$  και  $A'$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει  $P(A)+P(A')=1$  .

21. Αν  $A$  είναι ένα ενδεχόμενο ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , τότε ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου  $A$  τον αριθμό:  $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$ , όπου  $N(A)$  και  $N(\Omega)$  το πλήθος των ευνοϊκών και

δυνατών περιπτώσεων αντίστοιχα.

22. Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει η σχέση:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  .

23. Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει η σχέση:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  .

24. Η σχέση  $A \subseteq B$  σημαίνει στην κοινή γλώσσα: «Η πραγματοποίηση του  $A$  συνεπάγεται την πραγματοποίηση του  $B$ » .

## B. Ερωτήσεις Πολλαπλής επιλογής

Στις παρακάτω προτάσεις η σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση είναι **μόνο μία**. Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση της κάθε ερώτησης.

1. Δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  λέγονται ασυμβίβαστα, όταν:

- A.  $A \cup B = \Omega$       B.  $A \cup B = \emptyset$       Γ.  $A \cap B = \emptyset$       Δ.  $A - B = \emptyset$

2. Αδύνατο ενδεχόμενο ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  (με  $0 \in \Omega$ ) είναι το:

- A.  $\Omega$       B.  $\emptyset$       Γ.  $\{0\}$       Δ. τίποτα από τα προηγούμενα

3. Για την πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου K ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει :

- A.  $P(K) < 0$       B.  $0 < P(K) < 1$       Γ.  $P(K) > 1$       Δ.  $0 \leq P(K) \leq 1$

4. Έστω ένα πείραμα τύχης με ισοπίθανα αποτελέσματα και  $N(A)$ ,  $N(\Omega)$  το πλήθος των ευνοϊκών και δυνατών περιπτώσεων αντίστοιχα ,τότε ορίζουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου A ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  τον αριθμό:

- A.  $\frac{N(\Omega)}{N(A)}$       B.  $N(\Omega) \cdot N(A)$       Γ.  $N(\Omega) - N(A)$       Δ.  $\frac{N(A)}{N(\Omega)}$

5. Αν A και B ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης και  $\omega$  ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού, τότε η λεκτική ερμηνεία του  $\omega \in A \cap B'$  είναι:

- A. Το A δεν πραγματοποιείται .  
B. Πραγματοποιείται μόνο το A .  
Γ. Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A και B .  
Δ. Πραγματοποιούνται αμφότερα τα A και B

6. Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου η πιθανότητα του ενδεχομένου  $A - B$  είναι :

- A.  $P(A) - P(A \cap B)$       B.  $P(A) + P(A \cap B)$       Γ.  $P(A) - P(A \cup B)$       Δ.  $P(A) + P(A \cup B)$

7. Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου η πιθανότητα του ενδεχομένου  $A \cup B$  είναι :

- A.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$       B.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$   
Γ.  $P(A \cup B) = P(B) - P(A)$       Δ.  $P(A \cup B) = P(A) - P(B)$

8. Αν A και B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  με  $B \subseteq A$ , τότε:

- A.  $P(A) = P(B)$       B.  $P(A) > P(B)$       Γ.  $P(B) > P(A)$       Δ. Τίποτα από τα προηγούμενα

### Γ. Ερωτήσεις Αντιστοίχισης

Στις παρακάτω ερωτήσεις να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης A με ένα μόνο στοιχείο της στήλης B, ώστε να προκύπτουν ισότητες, ισοδύναμες ή αληθείς σχέσεις ή προτάσεις. Στη στήλη B υπάρχει ένα επιπλέον στοιχείο.

1. Τα A και B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ .

<b>ΣΤΗΛΗ A</b>	<b>ΣΤΗΛΗ B</b>
1. $P(A')$	α. $P(B) - P(A \cap B)$
2. $P(B - A)$	β. 0
3. $P(\Omega)$	γ. $1 - P(A)$
	δ. 1

2. Στη στήλη A αναγράφονται σχέσεις διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού και στην στήλη B αναγράφονται οι ίδιες σχέσεις αλλά διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα.

<b>ΣΤΗΛΗ A</b>	<b>ΣΤΗΛΗ B</b>
1. $\omega \in (A \cup B)'$	α. Πραγματοποιείται το A και όχι το B
2. $\omega \in B - A$	β. Πραγματοποιείται μόνο το B
3. $\omega \in A \cap B$	γ. Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B
	δ. Πραγματοποιούνται αμφότερα τα A και B

3. Τα A και B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ .

<b>ΣΤΗΛΗ A</b>	<b>ΣΤΗΛΗ B</b>
1. $P(\emptyset)$	α. 0
2. $P(A \cap B')$	β. 1
3. $P(A \cap B)'$	γ. $P(A) - P(A \cap B)$
	δ. $1 - P(A \cap B)$

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**  
**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup> : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ**

**ΕΠΙΠΕΔΟ Α**

**ΘΕΜΑ 1**

Δίνονται δύο ενδεχόμενα  $A, B$  ενός δειγματικού χώρου και οι πιθανότητες:

$$P(A) = \frac{3}{4}, \quad P(A - B) = \frac{5}{8} \quad \text{και} \quad P(B) = \frac{1}{4}$$

**α)** Να υπολογίσετε την  $P(A \cap B)$

(Μονάδες 9)

**β)**

**i)** Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων το ενδεχόμενο: « $A$  ή  $B$ » .

(Μονάδες 7)

**ii)** Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης του παραπάνω ενδεχομένου.

(Μονάδες 9)

**ΘΕΜΑ 2**

Το 70% των κατοίκων μιας πόλης έχει αυτοκίνητο, το 40% έχει μηχανάκι και το 20% έχει και αυτοκίνητο και μηχανάκι. Επιλέγουμε τυχαία έναν κάτοικο αυτής της πόλης. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

$A$ : ο κάτοικος να έχει αυτοκίνητο

$M$ : ο κάτοικος να έχει μηχανάκι.

**α)** να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

**i)**  $A \cup M$       **ii)**  $A - M$       **iii)**  $M'$

(Μονάδες 9)

**β)** Να βρείτε την πιθανότητα ο κάτοικος που επιλέχθηκε :

**i)** Να μην έχει μηχανάκι.

(Μονάδες 7)

**ii)** Να μην έχει ούτε μηχανάκι ούτε αυτοκίνητο.

(Μονάδες 9)

**ΘΕΜΑ 3**

Δίνεται το σύνολο  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  και τα υποσύνολά του  $A = \{1, 2, 4, 5\}$  και  $B = \{2, 4, 6\}$ .

**α)** Να παραστήσετε στο ίδιο διάγραμμα Venn, με βασικό σύνολο το  $\Omega$ , τα σύνολα  $A$  και  $B$ . Κατόπιν, να προσδιορίσετε τα σύνολα  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A'$  και  $B'$ .

(Μονάδες 13)

**β)** Επιλέγουμε τυχαία ένα στοιχείο του  $\Omega$ . Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

(i) Να μην πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο  $A$ .

(Μονάδες 4)

(ii) Να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$ .

(Μονάδες 4)

(iii) Να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα  $A$ ,  $B$ .

(Μονάδες 4)

#### ΘΕΜΑ 4

Ένα τηλεοπτικό παιχνίδι παίζεται με ζεύγη αντιπάλων των δυο φύλων. Στο παιχνίδι συμμετέχουν 3 άντρες: ο Δημήτρης ( $\Delta$ ), ο Κώστας ( $K$ ), ο Μιχάλης ( $M$ ) και 2 γυναίκες: η Ειρήνη ( $E$ ) και η Ζωή ( $Z$ ). Επιλέγονται στην τύχη ένας άντρας και μια γυναίκα για να διαγωνιστούν και καταγράφονται τα ονόματά τους.

**α)** Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος.

(Μονάδες 10)

**β)** Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων

$A$  : Να διαγωνίστηκαν ο Κώστας ή ο Μιχάλης .

$B$  : Να διαγωνίστηκε η Ζωή.

$\Gamma$ : Να μη διαγωνίστηκε ούτε ο Κώστας ούτε ο Δημήτρης.

(Μονάδες 15)

#### ΘΕΜΑ 5

Από τους μαθητές ενός Λυκείου, το 25% συμμετέχει στη θεατρική ομάδα, το 30% συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου και το 15% των μαθητών συμμετέχει και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Αν ονομάσουμε τα ενδεχόμενα:

$A$ : «ο μαθητής να συμμετέχει στη θεατρική ομάδα» και

$B$ : «ο μαθητής να συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου»,

**α)** να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

**i)**  $A \cup B$       **ii)**  $A \cap B$       **iii)**  $B - A$       **iv)**  $A'$

(Μονάδες 12)

**β)** να υπολογίσετε τις πιθανότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων:

**i)** ο μαθητής που επιλέχθηκε να συμμετέχει μόνο στην ομάδα ποδοσφαίρου

**ii)** ο μαθητής που επιλέχθηκε να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα.

(Μονάδες 13)

### ΘΕΜΑ 6

Ένα Λύκειο έχει 400 μαθητές από τους οποίους οι 200 είναι μαθητές της Α΄ τάξης. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή, η πιθανότητα να είναι μαθητής της Γ΄ τάξης είναι 20%.

Να βρείτε:

α) Το πλήθος των μαθητών της Γ΄ τάξης

(Μονάδες 10)

β) Το πλήθος των μαθητών της Β΄ τάξης.

(Μονάδες 5)

γ) Την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέξαμε να είναι της Β΄ τάξης.

(Μονάδες 10)

### ΘΕΜΑ 7

Δίνεται ο πίνακας:

	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους εννέα διψήφιους αριθμούς του παραπάνω πίνακα. Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης των παρακάτω ενδεχομένων:

A: ο διψήφιος να είναι άρτιος

(Μονάδες 7)

B: ο διψήφιος να είναι άρτιος και πολλαπλάσιο του 3

(Μονάδες 9)

Γ: ο διψήφιος να είναι άρτιος ή πολλαπλάσιο του 3

(Μονάδες 9)

### ΘΕΜΑ 8

Ένα κουτί περιέχει άσπρες, μαύρες, κόκκινες και πράσινες μπάλες. Οι άσπρες είναι 5, οι μαύρες είναι 9, ενώ οι κόκκινες και οι πράσινες μαζί είναι 16. Επιλέγουμε μια μπάλα στην τύχη. Δίνονται τα παρακάτω ενδεχόμενα:

A: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΑΣΠΡΗ

K: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΚΟΚΚΙΝΗ

Π: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΠΡΑΣΙΝΗ

**α)** Χρησιμοποιώντας τα A, K και Π να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων τα ενδεχόμενα:

i) Η μπάλα που επιλέγουμε δεν είναι άσπρη,

ii) Η μπάλα που επιλέγουμε είναι κόκκινη ή πράσινη.

(Μονάδες 13)

**β)** Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης καθενός από τα δύο ενδεχόμενα του ερωτήματος (α).

(Μονάδες 12)

### ΘΕΜΑ 9

Από τους σπουδαστές ενός Ωδείου, το 50% μαθαίνει πιάνο, το 40% μαθαίνει κιθάρα, ενώ το 10% των σπουδαστών μαθαίνει και τα δύο αυτά όργανα. Επιλέγουμε τυχαία ένα σπουδαστή του Ωδείου. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A: ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει πιάνο

B: ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει κιθάρα

Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου:

**α)** Ο σπουδαστής αυτός να μαθαίνει ένα τουλάχιστον από τα δύο παραπάνω όργανα.

(Μονάδες 12)

**β)** Ο σπουδαστής αυτός να μην μαθαίνει κανένα από τα δύο παραπάνω όργανα.

(Μονάδες 13)

### ΘΕΜΑ 10

Από τους 180 μαθητές ενός λυκείου, 20 μαθητές συμμετέχουν στη θεατρική ομάδα, 30 συμμετέχουν στην ομάδα στίβου, ενώ 10 συμμετέχουν και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή του λυκείου. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A : ο μαθητής συμμετέχει στη θεατρική ομάδα

B : ο μαθητής συμμετέχει στην ομάδα στίβου

**α)** Να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

i)  $A \cup B$

ii)  $B - A$

iii)  $A'$

(Μονάδες 9)

**β)** Να βρείτε τη πιθανότητα ο μαθητής που επιλέχθηκε:

i) Να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα.

(Μονάδες 7)



ii) Να συμμετέχει μόνο στην ομάδα στίβου.

(Μονάδες 9)

## **ΕΠΙΠΕΔΟ Β**

### **ΘΕΜΑ 1**

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα διαδοχικές φορές μέχρι να φέρουμε δύο ίδιες όψεις του νομίσματος.

**α)** Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος .

(Μονάδες 10)

**β)** Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

A: Ο αριθμός των Κ («κεφαλή») να υπερβαίνει τον αριθμό των Γ («γράμματα»)

B: Να εμφανιστούν διαδοχικά δύο ίδιες όψεις του νομίσματος .

Γ: Να μην εμφανιστεί πρώτα Κ («κεφαλή») .

(Μονάδες 15)

### **ΘΕΜΑ 2**

Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια.

**α)** Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος με τη βοήθεια ενός πίνακα «διπλής εισόδου» .

(Μονάδες 10)

**β)** Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

A: Η ένδειξη του 1ου ζαριού να είναι μεγαλύτερη από την ένδειξη του 2ου ζαριού.

B: Το άθροισμα των ενδείξεων να είναι πρώτος αριθμός.

Γ: Να φέρουμε ως αποτέλεσμα δύο διαδοχικούς αριθμούς (με οποιαδήποτε σειρά) .

(Μονάδες 15)

### **ΘΕΜΑ 3**

Ένα κουτί περιέχει τρεις μπάλες, μια άσπρη, μια μαύρη και μια κόκκινη. Παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Στη συνέχεια παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα και καταγράφουμε το χρώμα της χωρίς να την τοποθετήσουμε ξανά μέσα στο κουτί. Τέλος παίρνουμε και μια τρίτη μπάλα και καταγράφουμε το χρώμα της.

**α)** Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος .

(Μονάδες 10)

**β)** Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Λ: Η πρώτη μπάλα να είναι κόκκινη .

Σ: Η δεύτερη μπάλα να μην είναι μαύρη .

T: Να εμφανιστούν δύο διαδοχικές μπάλες του ίδιου χρώματος .

(Μονάδες 15)

#### ΘΕΜΑ 4

Έστω  $A$  και  $B$  δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , τα οποία

ικανοποιούν τις σχέσεις:  $\frac{P(A) - P(B)}{P(A \cap B)} = \frac{1}{2}$  (1) και  $P(A - B) = \frac{1}{6}$  (2).

**α)** Να αποδείξετε ότι:  $2P(B) - P(A) = \frac{1}{6}$

(Μονάδες 12)

**β)** Αν επιπλέον ισχύει ότι:  $P(A) + 3P(B) = \frac{13}{12}$ , να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i) Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$

ii) Να πραγματοποιηθεί το  $B$  και όχι το  $A$

(Μονάδες 13)

#### ΘΕΜΑ 5

Έστω  $A$  και  $B$  ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  τα οποία ικανοποιούν τη σχέση:  $P(A - B) + P(B - A) = P(A \cup B)$  (1).

**α)** Να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους.

(Μονάδες 13)

**β)** Αν επιπλέον  $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ ,

i) Να αποδείξετε ότι το ενδεχόμενο  $A \cup B$  είναι βέβαιο .

ii) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες  $P(A - B)$  και  $P(B - A)$

(Μονάδες 12)

#### ΘΕΜΑ 6

Σε ένα έλεγχο της τροχαίας σχετικά με τα ατυχήματα που γίνονται στην εθνική οδό προέκυψε ότι, από τα 400 οχήματα που ενεπλάκησαν σε ατύχημα τα 100 ήταν ανασφάλιστα και 100 δεν είχαν περάσει ΚΤΕΟ. Ακόμα, διαπιστώθηκε ότι τα 80 από τα οχήματα που ενεπλάκησαν σε ατύχημα ήταν και ανασφάλιστα και δεν είχαν περάσει ΚΤΕΟ. Επιλέγουμε στην τύχη ένα όχημα. Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

**α)** Το επιλεγμένο όχημα να ήταν ανασφάλιστο ή να μην είχε περάσει ΚΤΕΟ .

(Μονάδες 7)

**β)** Το επιλεγμένο όχημα να ήταν μόνο ανασφάλιστο ή μόνο να μην είχε περάσει ΚΤΕΟ .

(Μονάδες 10)

**γ)** Το επιλεγμένο όχημα να ήταν ασφαλισμένο και να είχε περάσει ΚΤΕΟ .

(Μονάδες 8)

### ΘΕΜΑ 7

Ένας μεγάλος δήμος της χώρας αποφάσισε να διεξάγει μια δειγματοληπτική έρευνα στην περιοχή ευθύνης του σε σχέση με κάποια δημογραφικά στοιχεία των κατοίκων. Για το σχεδιασμό αξιόπιστου και αντιπροσωπευτικού δείγματος από τον πληθυσμό της περιοχής του η υπηρεσία του δήμου έλαβε υπόψιν της τα παρακάτω δημογραφικά στοιχεία, που προέκυψαν από την τελευταία απογραφή.

- Η πιθανότητα ένας κάτοικος να είναι ηλικίας πάνω από 35 ετών είναι τα  $\frac{2}{3}$  της πιθανότητας να είναι άνεργος .
- Η πιθανότητα ένας κάτοικος να είναι ηλικίας πάνω από 35 ετών ή να εργάζεται είναι  $\frac{11}{15}$
- Η πιθανότητα ένας κάτοικος να εργάζεται αλλά να μην είναι πάνω από 35 ετών είναι τα  $\frac{16}{5}$  της πιθανότητας να είναι ηλικίας πάνω από 35 ετών και να εργάζεται .

Αν επιλέξουμε τυχαία ένα κάτοικο της περιοχής του δήμου, να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

A: Να είναι ηλικίας πάνω από 35 ετών .

(Μονάδες 9)

B: Να εργάζεται .

(Μονάδες 9)

Γ: Να μην εργάζεται και να μην είναι πάνω από 35 ετών.

(Μονάδες 7)

## ΕΠΙΠΕΔΟ Γ

### ΘΕΜΑ 1

Σε ένα τμήμα της Α΄ Λυκείου κάποιοι μαθητές παρακολουθούν μαθήματα Αγγλικών και κάποιοι Γαλλικών. Η πιθανότητα ένας μαθητής να μην παρακολουθεί Γαλλικά είναι 0,8. Η πιθανότητα ένας μαθητής να παρακολουθεί Αγγλικά είναι τετραπλάσια από την πιθανότητα να παρακολουθεί Γαλλικά. Τέλος, η πιθανότητα ένας μαθητής να παρακολουθεί μαθήματα τουλάχιστον μιας από τις δύο γλώσσες είναι 0,9.

**α)** Επιλέγουμε ένα μαθητή στην τύχη.

**i)** Ποια είναι η πιθανότητα αυτός να παρακολουθεί μαθήματα και των δύο γλωσσών;  
(Μονάδες 9)

**ii)** Ποια είναι η πιθανότητα αυτός να παρακολουθεί μαθήματα μόνο μιας από τις δύο γλώσσες;  
(Μονάδες 9)

**β)** Αν 14 μαθητές παρακολουθούν μόνο Αγγλικά, πόσοι είναι οι μαθητές του τμήματος;  
(Μονάδες 7)

### ΘΕΜΑ 2

Η εξέταση σε ένα διαγωνισμό των Μαθηματικών περιλάμβανε δύο θέματα στα οποία έπρεπε να απαντήσουν οι εξεταζόμενοι. Για να βαθμολογηθούν με άριστα έπρεπε να απαντήσουν και στα δύο θέματα, ενώ για να περάσουν την εξέταση έπρεπε να απαντήσουν σε ένα τουλάχιστον από τα δύο θέματα. Στο διαγωνισμό εξετάστηκαν 100 μαθητές. Στο πρώτο θέμα απάντησαν σωστά 60 μαθητές. Στο δεύτερο θέμα απάντησαν σωστά 50 μαθητές, ενώ και στα δύο θέματα απάντησαν σωστά 30 μαθητές. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή.

**α)** Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων (ορίζοντας τα κατάλληλα ενδεχόμενα) τα παραπάνω δεδομένα.

(Μονάδες 13)

**β)** Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής:

**i)** Να απάντησε σωστά μόνο στο δεύτερο θέμα.

**ii)** Να βαθμολογηθεί με άριστα.

**iii)** Να μην απάντησε σωστά σε κανένα θέμα.

**iv)** Να πέρασε την εξέταση.

(Μονάδες 12)

### ΘΕΜΑ 3

Οι δράστες μιας κλοπής διέφυγαν μ' ένα αυτοκίνητο και μετά από την κατάθεση διαφόρων μαρτύρων έγινε γνωστό ότι ο τετραψήφιος αριθμός της πινακίδας του αυτοκινήτου είχε

πρώτο και τέταρτο ψηφίο 2 . Το δεύτερο ψηφίο ήταν 6 ή 8 ή 9 και το τρίτο ψηφίο του ήταν 4 ή 7.

**α)** Με χρήση δένδροδιαγράμματος, να προσδιορίσετε το σύνολο των δυνατών αριθμών της πινακίδας του αυτοκινήτου.

(Μονάδες 13)

**β)** Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων

A: Το τρίτο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι το 7.

B: Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι 6 ή 8.

Γ: Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας δεν είναι ούτε 8 ούτε 9.

(Μονάδες 12)

#### ΘΕΜΑ 4

Σε μια ομάδα που αποτελείται από 7 άνδρες και 13 γυναίκες, 4 από τους άνδρες και 2 από τις γυναίκες παίζουν σκάκι. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα άτομα αυτά.

**α)** Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων το ενδεχόμενο το άτομο που επιλέχθηκε:

**i)** να είναι άνδρας ή να παίζει σκάκι.

(Μονάδες 6)

**ii)** να μην είναι άνδρας και να παίζει σκάκι.

(Μονάδες 6)

**β)** Να υπολογίσετε την πιθανότητα το άτομο που επιλέχθηκε να είναι γυναίκα και να παίζει σκάκι.

(Μονάδες 13)

#### ΘΕΜΑ 5

Από μια έρευνα μεταξύ μαθητών ενός Λυκείου της χώρας, προέκυψε ότι το 80% των μαθητών πίνει γάλα ή τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι στο σπίτι το πρωί. Επιλέγουμε ένα μαθητή στην τύχη και ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A: ο μαθητής πίνει γάλα

B: ο μαθητής τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι

Αν από το σύνολο των μαθητών το 60% πίνει γάλα και το 45% τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι,

**α)** Να ορίσετε με χρήση της γλώσσας των συνόλων τα ενδεχόμενα:

**i)** ο μαθητής ούτε να πίνει γάλα ούτε να τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι

**ii)** ο μαθητής να πίνει γάλα και να τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι

**iii)** ο μαθητής να πίνει μόνο γάλα.

(Μονάδες 12)

**β)** Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης των ενδεχομένων του α) ερωτήματος.

(Μονάδες 13)

### ΘΕΜΑ 6

Μια ημέρα, στο τμήμα Α1 ενός Λυκείου, το  $\frac{1}{4}$  των μαθητών δεν έχει διαβάσει ούτε Άλγεβρα

ούτε Γεωμετρία, ενώ το  $\frac{1}{3}$  των μαθητών έχει διαβάσει και τα δύο αυτά μαθήματα. Η

καθηγήτρια των μαθηματικών επιλέγει τυχαία ένα μαθητή για να τον εξετάσει. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A: ο μαθητής να έχει διαβάσει Άλγεβρα

Γ: ο μαθητής να έχει διαβάσει Γεωμετρία

**α)** Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων τα δεδομένα του προβλήματος.

(Μονάδες 9)

**β)** Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής:

**(i)** να έχει διαβάσει ένα τουλάχιστον από τα δύο μαθήματα

**(ii)** να έχει διαβάσει ένα μόνο από τα δυο μαθήματα.

(Μονάδες 8)

**γ)** Αν γνωρίζουμε επιπλέον ότι οι μισοί από τους μαθητές έχουν διαβάσει Γεωμετρία, να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής:

**i)** να έχει διαβάσει Γεωμετρία

**ii)** να έχει διαβάσει Άλγεβρα

(Μονάδες 8)

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ**  
**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup>: ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ**

**Διαγώνισμα 1**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Δύο ενδεχόμενα  $A, B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  λέγονται ασυμβίβαστα μεταξύ τους, όταν  $A \cap B = \emptyset$

**Μονάδες 2**

**β)** Ενδεχόμενο ή γεγονός λέγεται το σύνολο που έχει ως στοιχεία του ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης.

**Μονάδες 2**

**γ)** Έστω  $A$  και  $B$  ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης και το  $\omega$  ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού. Η λεκτική ερμηνεία του  $\omega \in A \cup B$  είναι: «Πραγματοποιούνται αμφότερα τα  $A$  και  $B$ ».

**Μονάδες 2**

**δ)** Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα  $A, B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει η σχέση:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

**Μονάδες 2**

**ε)** Για κάθε ενδεχόμενο  $A$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει  $0 \leq P(A) < 1$

**Μονάδες 2**

**A2.** Έστω  $\Omega$  ένας δειγματικός χώρος, με απλά ενδεχόμενα ισοπίθανα. Αν τα  $A$  και  $B$  είναι δύο ενδεχόμενα του  $\Omega$ , να αποδείξετε ότι:  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

**Μονάδες 15**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται το σύνολο  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  και τα υποσύνολά του  $A = \{1, 2, 4, 5\}$  και  $B = \{2, 4, 6\}$ .

**α)** Να παραστήσετε στο ίδιο διάγραμμα Venn, με βασικό σύνολο το  $\Omega$ , τα σύνολα  $A$  και  $B$ .

Κατόπιν, να προσδιορίσετε τα σύνολα  $A \cup B, A \cap B, A'$  και  $B'$ .

**Μονάδες 13**

**β)** Επιλέγουμε τυχαία ένα στοιχείο του  $\Omega$ . Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

(i) Να μην πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A.

**Μονάδες 4**

(ii) Να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα A και B.

**Μονάδες 4**

(iii) Να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A, B.

**Μονάδες 4**

### **ΘΕΜΑ Γ**

Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια.

**α)** Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος με τη βοήθεια ενός πίνακα «διπλής εισόδου» .

**Μονάδες 10**

**β)** Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

A: Η ένδειξη του 1ου ζαριού να είναι μεγαλύτερη από την ένδειξη του 2ου ζαριού.

B: Το άθροισμα των ενδείξεων να είναι πρώτος αριθμός.

Γ: Να φέρουμε ως αποτέλεσμα δύο διαδοχικούς αριθμούς .

**Μονάδες 15**

### **ΘΕΜΑ Δ**

Από μια έρευνα μεταξύ μαθητών ενός Λυκείου της χώρας, προέκυψε ότι το 80% των μαθητών πίνει γάλα ή τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι στο σπίτι το πρωί. Επιλέγουμε ένα μαθητή στην τύχη και ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A: ο μαθητής να πίνει γάλα

B: ο μαθητής να τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι

Αν από το σύνολο των μαθητών το 60% πίνει γάλα και το 45% τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι,

**α)** Να ορίσετε με χρήση της γλώσσας των συνόλων τα ενδεχόμενα:

i) ο μαθητής ούτε να πίνει γάλα ούτε να τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι

ii) ο μαθητής να πίνει γάλα και να τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι

iii) ο μαθητής να πίνει μόνο γάλα.

**Μονάδες 12**

**β)** Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης των ενδεχομένων του α) ερωτήματος.

**Μονάδες 13**



**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν (τις  $\alpha, \beta, \gamma$ ), γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Έστω  $A$  και  $B$  ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης και το  $\omega$  ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού, τότε η λεκτική ερμηνεία του  $\omega \in A$  είναι: «Το ενδεχόμενο  $A$  πραγματοποιείται»

**Μονάδες 2**

**β)** Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα  $A$  και  $A'$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει:  
 $P(A) + P(A') = 1$

**Μονάδες 2**

**γ)** Τα απλά ενδεχόμενα είναι μονοσύνολα, υποσύνολα του δειγματικού χώρου.

**Μονάδες 2**

Στις παρακάτω προτάσεις ( $\delta$  και  $\epsilon$ ) η σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση είναι **μόνο μία**. Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση της κάθε ερώτησης.

**δ)** Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου η πιθανότητα του ενδεχομένου  $A \cup B$  είναι :

**A.**  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

**B.**  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

**Γ.**  $P(A \cup B) = P(B) - P(A)$

**Δ.**  $P(A \cup B) = P(A) - P(B)$

**Μονάδες 2**

**ε)** Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου η πιθανότητα του ενδεχομένου  $A-B$  είναι :

**A.**  $P(A) - P(A \cap B)$

**B.**  $P(A) + P(A \cap B)$

**Γ.**  $P(A) - P(A \cup B)$

**Δ.**  $P(A) + P(A \cup B)$

**Μονάδες 2**

**A2.** Έστω  $\Omega$  ένας δειγματικός χώρος, με απλά ενδεχόμενα ισοπίθανα. Αν  $A$  και  $A'$  είναι δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα του  $\Omega$ , να αποδείξετε ότι:  $P(A') = 1 - P(A)$

**Μονάδες 15**

## **ΘΕΜΑ Β**

Ένα κουτί περιέχει άσπρες, μαύρες, κόκκινες και πράσινες μπάλες. Οι άσπρες είναι 5, οι μαύρες είναι 9, ενώ οι κόκκινες και οι πράσινες μαζί είναι 16. Επιλέγουμε μια μπάλα στην τύχη. Δίνονται τα παρακάτω ενδεχόμενα:

A: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΑΣΠΡΗ

K: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΚΟΚΚΙΝΗ

Π: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΠΡΑΣΙΝΗ

**α)** Χρησιμοποιώντας τα A, K και Π να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων τα ενδεχόμενα:

i) Η μπάλα που επιλέγουμε δεν είναι άσπρη,

ii) Η μπάλα που επιλέγουμε είναι κόκκινη ή πράσινη.

**Μονάδες 13**

**β)** Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης καθενός από τα δύο ενδεχόμενα του ερωτήματος (α).

**Μονάδες 12**

## **ΘΕΜΑ Γ**

Σε ένα έλεγχο της τροχαίας σχετικά με τα ατυχήματα που γίνονται στην εθνική οδό προέκυψε ότι από τα 400 οχήματα που ενεπλάκησαν σε ατύχημα τα 100 ήταν ανασφάλιστα ενώ άλλα 100 δεν είχαν περάσει ΚΤΕΟ. Ακόμα, διαπιστώθηκε ότι τα 80 από τα οχήματα που ενεπλάκησαν σε ατύχημα ήταν και ανασφάλιστα και δεν είχαν περάσει ΚΤΕΟ. Επιλέγουμε στην τύχη ένα όχημα. Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

**α)** Το επιλεγμένο όχημα να ήταν ανασφάλιστο ή να μην είχε περάσει ΚΤΕΟ .

**Μονάδες 7**

**β)** Το επιλεγμένο όχημα να ήταν μόνο ανασφάλιστο ή μόνο να μην είχε περάσει ΚΤΕΟ .

**Μονάδες 10**

**γ)** Το επιλεγμένο όχημα να ήταν ασφαλισμένο και να είχε περάσει ΚΤΕΟ .

**Μονάδες 8**

## **ΘΕΜΑ Δ**

Οι δράστες μιας κλοπής διέφυγαν με ένα αυτοκίνητο και μετά από την κατάθεση διαφόρων μαρτύρων έγινε γνωστό ότι ο τετραψήφιος αριθμός της πινακίδας του αυτοκινήτου είχε πρώτο και τέταρτο ψηφίο το 2 . Το δεύτερο ψηφίο ήταν 6 ή 8 ή 9 και το τρίτο ψηφίο του ήταν 4 ή 7.

**α)** Με χρήση δένδροδιαγράμματος, να προσδιορίσετε το σύνολο των δυνατών αριθμών της πινακίδας του αυτοκινήτου.

**Μονάδες 13**

**β)** Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

A: Το τρίτο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι το 7.

B: Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι 6 ή 8.

Γ: Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας δεν είναι ούτε 8 ούτε 9.

**Μονάδες 12**