

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 3^ο : Ε ξ ι σ ώ σ ε ι ς

3.1 Εξισώσεις 1^{ου} Βαθμού

3.2 Η εξίσωση $x^ν = α$

3.3 Εξισώσεις 2^{ου} Βαθμού

Εξεταστέα ύλη για το κεφάλαιο είναι:

Παράγραφος 3.1

Παράγραφος 3.2

Παράγραφος 3.3

ΘΕΜΑ Α

Θέμα Α.1. Ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου

Α.1.1. Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

Στις παρακάτω προτάσεις να γράψετε δίπλα στην κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Η εξίσωση $ax + \beta = 0$ έχει ακριβώς μια λύση, όταν $a \neq 0$
2. Η εξίσωση $ax + \beta = 0$ είναι αδύνατη, όταν $a = 0$
3. Η εξίσωση $ax + \beta = 0$ είναι ταυτότητα, όταν $a = \beta = 0$
4. Η εξίσωση $(\lambda - 2)x = \lambda^2 - 4$ είναι ταυτότητα, αν $\lambda = 2$
5. Η εξίσωση $(\lambda^2 - 4)x = \lambda - 2$ είναι αδύνατη, αν $\lambda = -2$
6. Η εξίσωση $x^v = a$, με $a > 0$ και v περιττό φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση την $\sqrt[v]{a}$
7. Η εξίσωση $x^v = a$, με $a > 0$ και v άρτιο φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς δύο λύσεις τις $\sqrt[v]{a}$ και $-\sqrt[v]{a}$
8. Η εξίσωση $x^v = a$, με $a < 0$ και v περιττό φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση την $-\sqrt[v]{|a|}$
9. Η εξίσωση $x^v = a$, με $a < 0$ και v άρτιο φυσικό αριθμό, είναι ταυτότητα.
10. Αν v είναι περιττός φυσικός αριθμός, τότε η εξίσωση $x^v = a^v$ έχει δύο λύσεις, τις $x_1 = a$ και $x_2 = -a$
11. Αν v είναι άρτιος φυσικός αριθμός, τότε η εξίσωση $x^v = a^v$ έχει δύο λύσεις, τις $x_1 = a$ και $x_2 = -a$
12. Η εξίσωση $x^{2v} = 1$ έχει ακριβώς μία λύση, την $x = 1$
13. Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού για κάθε $a \in \mathbb{R}$
14. Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού.
15. Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ και $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma > 0$ έχει δύο άνισες ρίζες.
16. Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ και $\Delta = 0$ έχει διπλή ρίζα την $x = -\frac{\beta}{2a}$
17. Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ και $\Delta < 0$ είναι αδύνατη.
18. Αν η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($a \neq 0$) έχει δύο ρίζες και $S = 0$, τότε οι ρίζες είναι αντίθετες.

- 19.** Αν η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($a \neq 0$) έχει δύο ρίζες και $P = 1$, τότε οι ρίζες είναι αντίστροφες.
- 20.** Αν η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($a \neq 0$) έχει δύο ρίζες και ισχύουν $S < 0$ και $P > 0$, τότε οι ρίζες είναι θετικές.
- 21.** Η εξίσωση $|a|x^2 + \beta x - |\gamma| = 0$ ($a \neq 0$) έχει δύο άνισες ρίζες.

A.1.2. Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

Στις παρακάτω προτάσεις η σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση είναι **μόνο μία**. Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση της κάθε ερώτησης.

- 1.** Η εξίσωση $ax + \beta = 0$, με $a = 0$ είναι αδύνατη, όταν:
- A. $\beta \neq 0$ B. $\beta = 0$ Γ. $\beta > 0$ Δ. $\beta < 0$
- 2.** Η εξίσωση $ax + \beta = 0$, με $a = 0$ είναι ταυτότητα, όταν:
- A. $\beta \neq 0$ B. $\beta = 0$ Γ. $\beta > 0$ Δ. $\beta < 0$
- 3.** Η εξίσωση $x^v = a$, με $a < 0$ και v άρτιο φυσικό αριθμό έχει:
- A. ακριβώς μία λύση B. καμία λύση Γ. δύο λύσεις Δ. τίποτα από τα προηγούμενα
- 4.** Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $a \neq 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο \mathbb{R} , όταν:
- A. $\Delta < 0$ B. $\Delta = 0$ Γ. $\Delta \geq 0$ Δ. $\Delta > 0$
- 5.** Η εξίσωση $a^2x^2 - \beta x - \gamma^2 = 0$, με $a \neq 0$ έχει:
- A. καμία ρίζα B. δύο άνισες ρίζες Γ. μία διπλή ρίζα Δ. τίποτα από τα προηγούμενα
- 6.** Αν S και P το άθροισμα και το γινόμενο αντίστοιχα των ριζών x_1, x_2 της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$, τότε οι ρίζες είναι αρνητικές αν
- A. $S < 0$ και $P > 0$ B. $S < 0$ και $P < 0$ Γ. $S > 0$ και $P < 0$ Δ. $S > 0$ και $P > 0$
- 7.** Αν S και P το άθροισμα και το γινόμενο αντίστοιχα δύο πραγματικών αριθμών x_1, x_2 , τότε η εξίσωση που έχει ρίζες τις x_1 και x_2 είναι η:
- A. $x^2 + Sx + P = 0$ B. $x^2 - Sx - P = 0$ Γ. $x^2 + Sx - P = 0$ Δ. $x^2 - Sx + P = 0$
- 8.** Η εξίσωση $(x-1)(x+2) = 0$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:
- A. $x^2 + x - 2 = 0$ B. $x^2 - x + 2 = 0$ Γ. $x^2 - x - 2 = 0$ Δ. $x^2 + x + 2 = 0$

A.1.3. Ερωτήσεις Αντιστοίχισης

Στις παρακάτω ερωτήσεις να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα μόνο στοιχείο της στήλης Β, ώστε να προκύπτουν ισότητες, αληθείς ή ισοδύναμες σχέσεις ή προτάσεις. Στην στήλη Β υπάρχει ένα επιπλέον στοιχείο.

1. Θεωρούμε την εξίσωση : $\alpha x + \beta = 0$ (1), με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ΣΤΗΛΗ Α (Η (1))	ΣΤΗΛΗ Β (Αν...)
1. Έχει μία ακριβώς λύση	α. $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$
2. Είναι αδύνατη	β. $\alpha = \beta = 0$
3. Είναι ταυτότητα	γ. $\alpha \neq 0$
	δ. Για όλες τις τιμές των α, β

2. Θεωρούμε την εξίσωση: $x^v = a$ ($a \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{N} - \{0\}$)

ΣΤΗΛΗ Α (Αν...)	ΣΤΗΛΗ Β (Τότε η εξίσωση έχει...)
1. $a > 0$ και v περιττός	Α Ακριβώς μια λύση την $\sqrt[v]{a}$
2. $a > 0$ και v άρτιος	β. Αδύνατη
3. $a < 0$ και v περιττός	γ. Ακριβώς δύο λύσεις τις $\sqrt[v]{a}$ και $-\sqrt[v]{a}$
	δ. Ακριβώς μια λύση την $-\sqrt[v]{ a }$

3. Θεωρούμε την εξίσωση : $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ (1) με $a \neq 0, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$.

ΣΤΗΛΗ Α (εξίσωση (1) έχει...)	ΣΤΗΛΗ Β (Αν είναι...)
1. Δύο ρίζες	α. $\Delta < 0$
2. Μία διπλή ρίζα	β. $\Delta = 0$
3. Είναι αδύνατη στο \mathbb{R}	γ. $\beta \neq 0$
	δ. $\Delta > 0$

4. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($a \neq 0, \Delta > 0$) και $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$.

ΣΤΗΛΗ Α (Αν...)	ΣΤΗΛΗ Β (Τότε S ή $P = \dots$)
1. $S = x_1 + x_2$	α. $-\frac{\gamma}{2a}$
2. $P = x_1 \cdot x_2$	β. $-\frac{\beta}{a}$
	γ. $\frac{\gamma}{a}$

5. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($a \neq 0$ και $\Delta > 0$) και $S = x_1 + x_2, P = x_1 \cdot x_2$

ΣΤΗΛΗ Α (Αν...)	ΣΤΗΛΗ Β (Τότε...)
1. $P < 0$	α. x_1, x_2 ομόσημες
2. $S = 0$	β. x_1, x_2 ετερόσημες
3. $P > 0$ και $S < 0$	γ. x_1, x_2 αρνητικές
	δ. x_1, x_2 αντίθετες

Θέμα Α2-Αποδείξεις προτάσεων και ιδιοτήτων

Εδώ παρατίθενται όλες οι αποδείξεις των προτάσεων και των ιδιοτήτων που βρίσκονται στην εξεταστέα ύλη του μαθήματος: «Άλγεβρα» της Α' Λυκείου και θα αποτελέσουν το 2^ο μέρος του 1^{ου} θέματος (το Α2). Οι αποδείξεις έγιναν σύμφωνα με το περιεχόμενο του σχολικού βιβλίου.

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $ax + \beta = 0$ με $a \neq 0$ έχει ακριβώς μία λύση, την $x = -\frac{\beta}{a}$.

Απόδειξη

Έχουμε: $ax + \beta = 0 \Leftrightarrow ax + \beta - \beta = -\beta \Leftrightarrow ax = -\beta$.

Αν $a \neq 0$, τότε: $ax = -\beta \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{a}$. Επομένως, αν $a \neq 0$ η εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση,

την $x = -\frac{\beta}{a}$

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $ax + \beta = 0$ με $a = 0$ και $\beta \neq 0$ είναι αδύνατη.

Απόδειξη

Έχουμε: $ax + \beta = 0 \Leftrightarrow ax + \beta - \beta = -\beta \Leftrightarrow ax = -\beta$.

Αν $a = 0$, τότε η εξίσωση γίνεται: $0x = -\beta$ και αφού $\beta \neq 0$ η εξίσωση δεν έχει λύση και γι' αυτό λέμε ότι είναι αδύνατη.

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $ax + \beta = 0$ με $a = 0$ και $\beta = 0$ είναι ταυτότητα.

Απόδειξη

Έχουμε: $ax + \beta = 0 \Leftrightarrow ax + \beta - \beta = -\beta \Leftrightarrow ax = -\beta$. Αν $a = \beta = 0$, τότε η εξίσωση γίνεται: $0x = 0$ και αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό, δηλαδή είναι ταυτότητα.

4. Θεωρούμε την εξίσωση: $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($a \neq 0$) και τη διακρίνουσα της $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$.

Να αποδείξετε ότι, αν $\Delta > 0$, η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες, τις $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Απόδειξη:

Για την επίλυση της εξίσωσης θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο της «συμπλήρωσης του τετραγώνου» .

Έχουμε:

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \quad [\text{αφού } \alpha \neq 0]$$

$$x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x = -\frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{\beta}{2\alpha}x = -\frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{\beta}{2\alpha}x + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} = -\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$$

Αν θέσουμε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, τότε η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2} .$$

Αν $\Delta > 0$, τότε έχουμε: $x + \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ ή $x + \frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, δηλαδή $x = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ ή $x = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

5. Θεωρούμε την εξίσωση: $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($\alpha \neq 0$) και τη διακρίνουσα της

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$. Να αποδείξετε ότι αν $\Delta = 0$ η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα την, $x = -\frac{\beta}{\alpha}$.

Απόδειξη

Εφαρμόζοντας όπως στην προηγούμενη απόδειξη τη μέθοδο της «συμπλήρωσης του

τετραγώνου» έχουμε: $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2}$.

Αν $\Delta = 0$, τότε η εξίσωση γράφεται:

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right) \cdot \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\beta}{2\alpha} = 0 \text{ ή } x + \frac{\beta}{2\alpha} = 0$$

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} \text{ ή } x = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η εξίσωση έχει διπλή ρίζα την $-\frac{\beta}{2\alpha}$.

6. Θεωρούμε την εξίσωση: $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($a \neq 0$) και τη διακρίνουσα της $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$. Να αποδείξετε ότι αν $\Delta < 0$ η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Απόδειξη

Εφαρμόζοντας όπως στην προηγούμενη απόδειξη τη μέθοδο της «συμπλήρωσης του τετραγώνου» έχουμε:

$$\left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Αν $\Delta < 0$, τότε η τελευταία εξίσωση, άρα και η ισοδύναμή της η αρχική, δεν έχει πραγματικές ρίζες, δηλαδή είναι αδύνατη στο \mathbb{R} .

7. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($a \neq 0$), να αποδείξετε ότι το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών είναι αντίστοιχα: $S = -\frac{\beta}{a}$ και $P = \frac{\gamma}{a}$.

Απόδειξη:

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2a}$ και $x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2a}$. Τώρα έχουμε:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta} - \beta - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\beta}{2a} = -\frac{\beta}{a}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-\beta)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{\beta^2 - (\beta^2 - 4a\gamma)}{4a^2} = \frac{4a\gamma}{4a^2} = \frac{\gamma}{a}$$

ΘΕΜΑ Β

Από την Τράπεζα θεμάτων του Υπουργείου ΠΑΙ.Θ.(Ι.Ε.Π.). Περιέχει 27 θέματα αυτής της κατηγορίας.

ΘΕΜΑ Β1

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ

(Μονάδες 13)

β) Για $\lambda=2$ να λύσετε την εξίσωση (1)

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β2

Δίνεται η εξίσωση: $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq 0$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό 2

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \neq 0$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β3

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 5x - 1$

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, x_1 και x_2

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: $x_1 + x_2$, $x_1 x_2$ και $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

(Μονάδες 9)

γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β4

α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = 3$

(Μονάδες 12)

β) Αν a, β με $a < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $ax^2 + \beta x + 3 = 0$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β5

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Β6

Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1), \lambda \in \mathbb{R}$$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.

(Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Β7

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = \sqrt{3}$.

(Μονάδες 10)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Β8

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 9)x = \lambda^2 - 3\lambda$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ , να γράψετε τρεις εξισώσεις.

(Μονάδες 6)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή του, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β9

Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + \lambda - 2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 10)

β) Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει δυο ρίζες x_1, x_2 , να προσδιορίσετε το λ , ώστε να

ισχύει: $x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Β10

Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha + 3)x = a^2 - 9$, με παράμετρο $a \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) όταν $a = 1$

(Μονάδες 5)

ii) όταν $a = -3$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του a , για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β11

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση $\Pi = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x}$ έχει νόημα πραγματικού

αριθμού.

(Μονάδες 10)

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x} = 0.$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Β12

Δίνεται ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 20\text{cm}$ και εμβαδό $E = 24\text{cm}^2$.

α) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ως ρίζες τα μήκη των πλευρών αυτού του ορθογωνίου.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β13

Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί a και β , τέτοιοι ώστε: $a + \beta = 12$ και $a^2 + \beta^2 = 272$.

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(a + \beta)^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι: $a\beta = -64$.

(Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς a, β .

(Μονάδες 10)

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς a, β .

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Β14

Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{3 - \sqrt{7}}$, $B = \frac{1}{3 + \sqrt{7}}$

α) Να δείξετε ότι: $A + B = 3$ και $A \cdot B = \frac{1}{2}$

(Μονάδες 12)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A, B

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β15

Έστω a, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $a \cdot \beta = 4$ και $a^2\beta + a\beta^2 = 20$

α) Να αποδείξετε ότι: $a + \beta = 5$.

(Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς a, β και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Β16

Έστω a, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $a + \beta = -1$ και

$$a^3\beta + 2a^2\beta^2 + a\beta^3 = -12$$

α) Να αποδείξετε ότι: $a \cdot \beta = -12$.

(Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς a, β και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Β17

Δίνεται το τριώνυμο $-x^2 + (\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = (\sqrt{3} + 1)^2$

(Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β18

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $-2x^2 + 10x = 12$.

(Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x - 2} = 0$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β19

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - κx - 2$, με $κ \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta > 0$ για κάθε $κ \in \mathbb{R}$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου.

(Μονάδες 13)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 2 = 0$ (1),

i) Να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών της (1)

ii) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες ρ_1 και ρ_2 , όπου $\rho_1 = 2x_1$ και $\rho_2 = 2x_2$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β20

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 1)x = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = 1$ και για $\lambda = -1$.

(Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β21

Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2}$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$.

(Μονάδες 10)

β) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση K .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Β22

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha + \beta = 2$ και $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -30$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -15$.

(Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Β23

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{1+x}{x-1}$ και $B = \frac{2}{x^2-x}$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι για να ορίζονται ταυτόχρονα οι παραστάσεις A, B πρέπει: $x \neq 1$ και $x \neq 0$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $A = B$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β24

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 + 5 = 0$$

ΘΕΜΑ Β25

Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{5+\sqrt{5}}$, $B = \frac{1}{5-\sqrt{5}}$

α) Να δείξετε ότι:

i) $A + B = \frac{1}{2}$

(Μονάδες 8)

ii) $A \cdot B = \frac{1}{20}$

(Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Β26

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq -2$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες:

α) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες .

(Μονάδες 13)

β) Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2 .

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β27

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

(Μονάδες 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να βρείτε το λ ώστε $x_1 x_2 = -3$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Γ

Με την εισήγηση των διδασκόντων. Περιλαμβάνονται 18 θέματα αυτής της κατηγορίας .

ΘΕΜΑ Γ1

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\frac{t-1}{2} - \frac{t-2}{3} = \frac{t-3}{4}$ (1)

(Μονάδες 9)

β) $\frac{|x-3|-1}{2} - \frac{|x-3|-2}{3} = \frac{|x-3|-3}{4}$ (2)

(Μονάδες 7)

γ) $\frac{|\sqrt[3]{x^2-1+8}|-1}{2} - \frac{|\sqrt[3]{x^2-1+8}|-2}{3} = \frac{|\sqrt[3]{x^2-1+8}|-3}{4}$ (3)

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Γ2

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $y^2 - 3y - 4 = 0$ (1)

(Μονάδες 4)

β) $x^2(x-3) - 3x(x-3) = 4(x-3)$ (2)

(Μονάδες 7)

γ) $(x-5)^2 - 3(5-x) - 4 = 0$ (3)

(Μονάδες 7)

δ) $(x-5)^2 - (5-x)(x+1) = 0$ (4)

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ3

Να λύσετε την εξίσωση $(\lambda^2 - 9) \cdot x = |\lambda - 3|$ (1), όταν:

α) $\lambda = 3$

(Μονάδες 6)

β) $\lambda = -3$

(Μονάδες 6)

γ) $\lambda \neq 3$ και $\lambda \neq -3$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Γ4

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = 9\lambda^2 - 12\lambda + 4$, $B = 4 - 9\lambda^2$ και η εξίσωση: $B \cdot x = A$ (1).

Για ποια $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) :

α) Είναι ταυτότητα; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας .

(Μονάδες 7)

β) Είναι αδύνατη; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας .

(Μονάδες 8)

γ) Έχει μοναδική λύση; Στην περίπτωση αυτή να βρείτε τη λύση της .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Γ5

Δίνονται οι εξισώσεις:

$$\sqrt{3}x^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{5})x + \sqrt{5} = 0 \quad (1) \quad , \quad \sqrt{5}x^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{5})x + \sqrt{3} = 0 \quad (2)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (2) έχει επίσης δύο άνισες πραγματικές ρίζες, οι οποίες είναι αντίστροφες των ριζών της εξίσωσης (1) .

(Μονάδες 8)

γ) Να γενικεύσετε το παράδειγμα των εξισώσεων (1) και (2), κατασκευάζοντας μια εξίσωση που έχει ρίζες τις αντίστροφες των ριζών της εξίσωσης :
 $\sqrt{a}x^2 - (\sqrt{a} + \sqrt{\beta})x + \sqrt{\beta} = 0$, με $a, \beta > 0$ και $a \neq \beta$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας .

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ6

Δίνεται η παράσταση: $K = (a + \beta)^2 x^2 - 2(a^2 - \beta^2)x + (a - \beta)^2$ (1)

α) Πότε η εξίσωση (1) είναι 2^{ου} βαθμού;

(Μονάδες 8)

β) Αν η εξίσωση (1) είναι 2^{ου} βαθμού, να αποδείξετε ότι έχει μια διπλή ρίζα για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να λυθεί η εξίσωση (1)

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ7

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + 2\mu\nu = 0$ με $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης (1) και να αποδείξετε ότι έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση (1), αν έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες. Πότε η εξίσωση (1) έχει ίσες ρίζες; Στην περίπτωση αυτή να βρείτε την διπλή ρίζα της.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Γ8

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \mu x + \nu = 0$ (1) με $\mu, \nu \in \mathbb{N} - \{0\}$ και $\mu^2 > 4\nu$ (1)

α) Να κατασκευάσετε την εξίσωση που έχει ρίζες τις αντίθετες των ριζών της εξίσωσης (1)

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η (1) δεν έχει ρίζα το 0 και να κατασκευάσετε την εξίσωση που έχει ρίζες τις αντίστροφες των ριζών της εξίσωσης (1)

(Μονάδες 8)

γ) Αν, επιπλέον $\nu = \mu$

i) Να βρείτε τα ν, μ , ώστε οι ρίζες της εξίσωσης (1) να διαφέρουν κατά $\sqrt{5}$.

(Μονάδες 6)

ii) Να βρείτε τα ν, μ , ώστε το τετράγωνο της μίας ρίζας της εξίσωσης (1) να είναι η άλλη της ρίζα.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ9

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $x^2 - 13x + 36 = 0$ (1)

(Μονάδες 7)

β) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ (2)

(Μονάδες 8)

γ) $|x - 2|^2 - 13|x - 2| + 36 = 0$ (3)

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Γ10

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2\kappa x + \lambda = 0$ (1) με τους αριθμούς κ, λ να αποτελούν τις ενδείξεις της ρίψης δύο ζαριών αντίστοιχα.

Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

α) Η εξίσωση (1) να έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 9)

β) Η εξίσωση (1) να έχει δύο ίσες πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 9)

γ) Η εξίσωση (1) να μην έχει πραγματικές ρίζες .

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ11

Δίνεται η εξίσωση: $P(A) \cdot x^2 - 2P(A \cup B) \cdot x + 4P(B) = 0$ (1), όπου A και B ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω .

α) Ποια είναι η συνθήκη για το ενδεχόμενο A , ώστε η εξίσωση (1) να είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού;

(Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την εξίσωση (1), αν είναι 1^{ου} βαθμού .

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 9)

δ) Αν η εξίσωση (1) έχει μια διπλή ρίζα, να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα $A - B$ και $B - A$ είναι ισοπίθανα .

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ12

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - |\kappa - 1|x + \kappa^2 = 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$ (1) (1)

α) Για ποιες τιμές του κ η εξίσωση έχει διπλή ρίζα ;

(Μονάδες 6)

β) Αν $|\kappa - 1| = 2$, να λύσετε την εξίσωση (1)

(Μονάδες 5)

γ) Αν $-1 < \kappa < \frac{1}{3}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες .

(Μονάδες 6)

δ) Για $-1 < \kappa < \frac{1}{3}$, να κατασκευάσετε την εξίσωση που έχει ως ρίζες τις ρίζες της εξίσωσης (1)

αυξημένες κατά 3 .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Γ13

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (|\lambda - 1| - 2)x + (|2\lambda - 2| - 4) = 0$ (1) με $\lambda \in \mathbb{R}$. Επιλέγουμε τυχαία μια

τιμή $\lambda \in \Omega$, όπου $\Omega = \left\{ -10, -9, -3, 0, \frac{1}{2}, 3, \frac{10}{3}, 11 \right\}$ ο δειγματικός χώρος του

πειράματος τύχης, του οποίου τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Έστω A , B και Γ τα ενδεχόμενα του Ω που ορίζονται:

$$A = \{\lambda \in \Omega / \text{η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές και ίσες}\}$$

$$B = \{\lambda \in \Omega / \text{η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές και άνισες}\}$$

$$\Gamma = \{\lambda \in \Omega / \text{η εξίσωση (1) να μην έχει καμία πραγματική ρίζα}\}$$

Να βρείτε:

α) Την πιθανότητα του ενδεχομένου A

(Μονάδες 8)

β) Την πιθανότητα του ενδεχομένου B

(Μονάδες 9)

γ) Την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Γ14

Δίνονται οι εξισώσεις $|2x-1|=3$ (1) και $|3x+3|=2x+2$ (2)

α) Να λύσετε τις εξισώσεις (1) και (2)

(Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε την εξίσωση που έχει ρίζες τις ρίζες της εξίσωσης (1)

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της μορφής $ax^2 + \beta x + 1 = 0$ ($\alpha \neq 0$) που έχει μια διπλή ρίζα την κοινή λύση των εξισώσεων (1) και (2).

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Γ15

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \mu x + 3\nu = 0$ ($\mu, \nu \in \mathbb{Z}$) (1) η οποία έχει δύο ρίζες ρ_1 και ρ_2 , με $\rho_1 \neq \rho_2$.

α) Να αποδείξετε ότι $\mu^2 > 12\nu$ και ότι $S^2 > 4P$, όπου S και P το άθροισμα και το γινόμενο αντίστοιχα των ριζών της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα μ, ν , ώστε οι ρίζες ρ_1 και ρ_2 να πληρούν ταυτόχρονα τις σχέσεις:

$$3\rho_1 + 3\rho_2 = 2\rho_1\rho_2 \quad (2) \quad \text{και} \quad 3 - \rho_1\rho_2 = 5(\rho_1 + \rho_2 - 2) \quad (3)$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Γ16

Δίνεται η εξίσωση: $(2\lambda - 1)x^2 - |4\lambda - 2|x + 4\lambda^2 - 1 = 0$ (1) με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού;

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1) είναι: $\Delta = -8\lambda(2\lambda - 1)^2$

(Μονάδες 8)

γ) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες και για ποιες τιμές του λ είναι αδύνατη;

(Μονάδες 5)

δ) Στην περίπτωση που η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες, να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι αρνητικές.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Γ17

Δίνεται η εξίσωση: $[2P(A) - 1]x^2 - |4P(A') - 2|x - 4[P(A)]^2 + 1 = 0$ (1), όπου A ενδεχόμενο ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \neq \emptyset$

α) Να γράψετε σε μορφή διαστήματος τις τιμές που μπορεί να πάρει η πιθανότητα του ενδεχομένου A , ώστε η εξίσωση (1) να είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες ετερόσημες

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Γ18

Δίνονται οι εξισώσεις: $|x^2 - 6x + 9| = x - 1$ (1) και $ax^2 + \sqrt{\beta}x + \gamma = 0$ (2) με $a \neq 0$ και $\beta > 0$,

καθώς και η παράσταση $A = \frac{|3x - 3|}{x^2 - 2x + 1}$.

i) Να λύσετε την εξίσωση (1)

ii) Να λύσετε την εξίσωση $A = 1$

iii) Αν η εξίσωση (2) έχει ως ρίζες τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη από τις ρίζες που προέκυψαν από τα ερωτήματα α) και β), να αποδείξετε ότι $a < 0$ και $\gamma > 0$

ΘΕΜΑ Δ

Από την Τράπεζα θεμάτων του Υπουργείου ΠΑΙ.Θ.(Ι.Ε.Π). Περιέχει 41 θέματα αυτής της κατηγορίας.

ΘΕΜΑ Δ1

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.
(Μονάδες 10)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):

i) Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$

ii) Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ .

(Μονάδες 5)

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$

ii) να βρείτε το λ

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ2

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + (2\lambda + 3)x + \lambda - 2 = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \neq -2$

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι: $\Delta = 12\lambda + 25$
(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \neq -2$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

γ) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του λ το άθροισμα των ριζών $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο των ριζών $P = x_1 \cdot x_2$.

(Μονάδες 4)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ , ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) να σχύει η σχέση: $(x_1 + x_2 - 1)^2 + (x_1 \cdot x_2 + 3)^2 = 0$

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ3

Δίνεται η εξίσωση $a\beta x^2 - (a^2 + \beta^2)x + a\beta = 0$, όπου a, β δύο θετικοί αριθμοί.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι: $\Delta = (a^2 - \beta^2)^2$
(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών a και β , ώστε η εξίσωση να έχει δυο ρίζες άνισες, τις οποίες να προσδιορίσετε, ως συνάρτηση των a, β

(Μονάδες 10)

γ) Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1 = \frac{a}{\beta}, x_2 = \frac{\beta}{a}$, τότε να αποδείξετε ότι: $(1+x_1)(1+x_2) \geq 4$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ4

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - \lambda)x^2 - (\lambda^2 - 1)x + (\lambda - 1) = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του λ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του λ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2ου βαθμού.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ5

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 1 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$

είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης.

(Μονάδες 5)

γ) Για $\lambda > 2$, να αποδείξετε ότι:

i) Οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.

ii) $x_1 + 4x_2 \geq 4$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Δ6

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση όταν $\lambda = 0$.

(Μονάδες 5)

β) Έστω $\lambda \neq 0$.

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε.

(Μονάδες 10)

ii. Αν $x_1 = -1$ και $x_2 = -1 + \frac{2}{\lambda}$ είναι οι δυο ρίζες της εξίσωσης (1), να προσδιορίσετε τις τιμές

του λ , για τις οποίες ισχύει $|x_1 - x_2| > 1$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ7

Δίνονται οι εξισώσεις $x^2 - 3x + 2 = 0$ (1) και (2) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (2).

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τριώνυμο της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma$ που οι ρίζες του να είναι κάποιες από τις ρίζες της εξίσωσης (2) και επιπλέον, για κάθε αρνητικό αριθμό x , να έχει θετική τιμή.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ8

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ με β, γ πραγματικούς αριθμούς.

Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1 + x_2| = 4$, τότε:

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β .

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\gamma < 4$

(Μονάδες 7)

γ) Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$ (1)

Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (α) ερώτημα, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Δ9

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ , δηλαδή σταθερή.

(Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ .

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ10

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

(Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 x_2$ των ριζών .

(Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

δ) Για κάθε $\lambda > 0$, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ11

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

(Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 x_2$ των ριζών .

(Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνετε τους

αριθμούς και $\frac{x_1 + x_2}{2}$ και 1.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ12

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

(Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 x_2$ των ριζών .

(Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda < 0$, τότε:

i) το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

ii) να αποδείξετε ότι $|x_1 + x_2| \geq 2x_1 x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ13

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 + \lambda x - 36 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ , η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 8)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ .

(i) Να δείξετε ότι ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2 - \lambda x - 36 = 0$

(Μονάδες 7)

(ii) Να δείξετε ότι:

• $\rho \neq 0$ και

• ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης: $-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$

(Μονάδες 4+6=10)

ΘΕΜΑ Δ14

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι: Αν $\gamma < 0$ τότε :

i) $\beta^2 - 4\gamma > 0$

(Μονάδες 3)

ii) η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Δ15

α) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο $\Pi = 34$ cm και διαγώνιο $\delta = 13$ cm

i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = 60$ cm^2

(Μονάδες 5)

ii) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

(Μονάδες 5)

iii) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

(Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 40 cm^2 και διαγώνιο 8 cm.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ16

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x - (\lambda^2 - \lambda) = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = \frac{1}{\sqrt{S-P}}$, όπου S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) αντίστοιχα, έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ .

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Δ17

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ με $\lambda > 0$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda > 0$

(Μονάδες 10)

β) Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε:

i) να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου.

(Μονάδες 4)

ii) να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ και να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 4$ για κάθε $\lambda > 0$.

(Μονάδες 8)

iii) για την τιμή του λ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 4, τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ Δ18

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 6x + \lambda - 7$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 7)

β) i) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος των ριζών και να εκφράσετε συναρτήσει του λ το γινόμενο των ριζών.

(Μονάδες 2)

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε λ με $7 < \lambda < 16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες. Ποιο είναι τότε το πρόσημο των ριζών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ) i) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $x^2 - 6|x| + \lambda = 7$ (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 8)

ii) Έχει η εξίσωση (1) για $\lambda = 3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Δ19

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε μία διτετράγωνη εξίσωση της μορφής $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ η οποία να έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας λύνοντας την εξίσωση που κατασκευάσατε.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Δ20

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι: Αν $\beta < 0$, $\gamma > 0$ και $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Δ21

α) Να λύσετε τις εξισώσεις $3x^2 - 14x + 8 = 0$ (1) και $8x^2 - 14x + 3 = 0$ (2)

(Μονάδες 10)

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \text{ (3) και } \gamma x^2 + \beta x + a = 0 \text{ (4), με } a \cdot \gamma \neq 0 .$$

Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι: Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $a \cdot \gamma \neq 0$, τότε

i) $\rho \neq 0$ και

(Μονάδες 5)

ii) ο $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4).

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ22

Δίνεται η εξίσωση: $ax^2 - 5x + a = 0$ με παράμετρο $a \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $|a| \leq \frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς, που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν $a = 2$.

(Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $2(x + \frac{1}{x})^2 - 5(x + \frac{1}{x}) + 2 = 0$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ23

Δίνεται η εξίσωση $(x - 2)^2 = \lambda(4x - 3)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες,

i) να υπολογίσετε τα $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$

ii) να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3)$ είναι ανεξάρτητη του λ , δηλαδή σταθερή.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ24

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες

ισχύει: $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ25

α) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1)

(Μονάδες 10)

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 7)

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ26

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

(Μονάδες 6)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Δ27

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

(Μονάδες 6)

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες

τιμές του λ ισχύει: $d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)}$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Δ28

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δυο άνισες ρίζες.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ , οι δυο άνισες ρίζες της εξίσωσης ανήκουν στο διάστημα $(-2, 4)$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Δ29

Δίνεται η εξίσωση: $ax^2 - (a^2 - 1)x - a = 0$, με παράμετρο $a \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (a^2 + 1)^2$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $p_1 = a$ και $p_2 = -\frac{1}{a}$

(Μονάδες 10)

γ) Να βρεθούν οι τιμές του a ώστε: $|p_1 - p_2| = 2$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ30

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$ με παράμετρο $\lambda < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 2$

(Μονάδες 4)

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον: $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$, τότε:

i) Να δείξετε ότι: $x_1 - x_2 = 4$

(Μονάδες 7)

ii) Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και την τιμή του λ

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ31

Τα σπίτια τεσσάρων μαθητών, της Άννας, του Βαγγέλη, του Γιώργου και της Δήμητρας βρίσκονται πάνω σε έναν ευθύγραμμο δρόμο, ο οποίος ξεκινάει από το σχολείο τους.

Οι αποστάσεις των τεσσάρων σπιτιών από το σχολείο, s_A , s_B , s_Γ , και s_Δ αντίστοιχα,

ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$s_A < s_B \quad \text{και} \quad |s_\Delta - s_A| = |s_\Delta - s_B|$$

$$s_\Gamma = \frac{s_A + 3s_B}{4}$$

Στον παρακάτω άξονα, το σχολείο βρίσκεται στο σημείο Ο και τα σημεία Α, Β, παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών της Άννας και του Βαγγέλη αντίστοιχα.



α) Να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα τα σημεία Γ και Δ, που παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών του Γιώργου και της Δήμητρας. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον, οι τιμές των αποστάσεων σε Km ικανοποιούν τις σχέσεις

$$s_A + s_B = 1,4 \quad \text{και} \quad s_A \cdot s_B = 0,45 \quad \text{τότε:}$$

i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς s_A, s_B

(Μονάδες 6)

ii) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις s_A, s_B, s_Γ και s_Δ

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ32

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:

i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 x_2)^{24} = 0.$$

(Μονάδες 9)

ii) Για $\lambda = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Δ33

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0, \quad \text{με} \quad \lambda \in (0, 4)$$

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ .

(Μονάδες 6)

ii) το εμβαδόν E του ορθογωνίου.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda \in (0, 4)$.

(Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16;

Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ34

Οι πλευρές ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 2x + \lambda(2 - \lambda) = 0, \text{ με } \lambda \in (0, 2)$$

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου.

(Μονάδες 6)

ii) το εμβαδόν E του ορθογωνίου συναρτήσει του λ .

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $E \leq 1$, για κάθε $\lambda \in (0, 2)$.

(Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1 ;

Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ35

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x, y τέτοια, ώστε: $x + y = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο:

$$E(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x), \quad x \in (0, 10) .$$

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$ για κάθε $x \in (0, 10)$.

(Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του $x \in (0,10)$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$;

Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο ΑΒΓ ;

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Α36

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο $\Pi = 40$ cm. Αν x cm είναι το μήκος του παραλληλογράμμου, τότε :

α) να αποδείξετε ότι $0 < x < 20$.

(Μονάδες 4)

β) να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση:

$$E(x) = 20x - x^2$$

(Μονάδες 8)

γ) να αποδείξετε ότι ισχύει $E(x) \leq 100$, για κάθε $x \in (0, 20)$.

(Μονάδες 6)

δ) να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40cm, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10cm.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Α37

Τέσσερις αθλητές, ο Αργύρης, ο Βασίλης, ο Γιώργος και ο Δημήτρης τερμάτισαν σε έναν αγώνα δρόμου με αντίστοιχους χρόνους (σε λεπτά) $t_A, t_B, t_\Gamma, t_\Delta$, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$t_A < t_B$$

$$t_\Gamma = \frac{t_A + 2t_B}{3} \text{ και}$$

$$|t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta|$$

α) i) Να δείξετε ότι: $t_\Delta = \frac{t_A + t_B}{2}$

(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τη σειρά με την οποία τερμάτισαν οι αθλητές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β) Δίνεται επιπλέον ότι ισχύει: $t_A + t_B = 6$ και $t_A \cdot t_B = 8$

i) Να γράψετε μία εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B

(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τους χρόνους τερματισμού των τεσσάρων αθλητών.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ38

Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά $(d+1)$ cm.

α) Να βρείτε, ως συνάρτηση του d , το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β.

(Μονάδες 6)

β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:

i) Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου

(Μονάδες 12)

ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ39

Μια μπάλα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω, αφού διαγράψει μια τροχιά, μετά από κάποιο χρόνο θα πέσει στο έδαφος. Το ύψος h (σε m) από το έδαφος, στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t (σε sec) κατά την κίνησή της, προσδιορίζεται από τη συνάρτηση: $h(t) = -5t^2 + 10t + 1,05$

α) Να βρείτε τις τιμές $h(0)$, $h(1)$, $h(2)$ και να εξηγήσετε τι παριστάνουν στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε μετά από πόσο χρόνο η μπάλα θα φτάσει στο έδαφος.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το ύψος στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t μπορεί να προσδιοριστεί και από τον τύπο: $h(t) = 5[1,21 - (t-1)^2]$

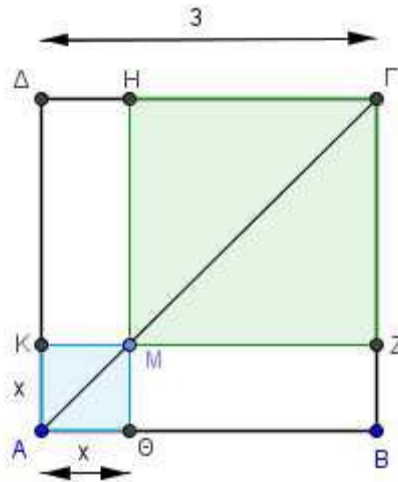
(Μονάδες 5)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει χρονική στιγμή t_1 (σε sec) που το ύψος h της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από 6,25 m

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ40

Στο επόμενο σχήμα το $ABΓΔ$ είναι τετράγωνο πλευράς $AB=3$ και το M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου $ΑΓ$. Έστω E το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος.



α) Να αποδείξετε ότι $E = 2x^2 - 6x + 9$, $x \in (0, 3)$.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $E \geq \frac{9}{2}$ για κάθε $x \in (0, 3)$

(Μονάδες 8)

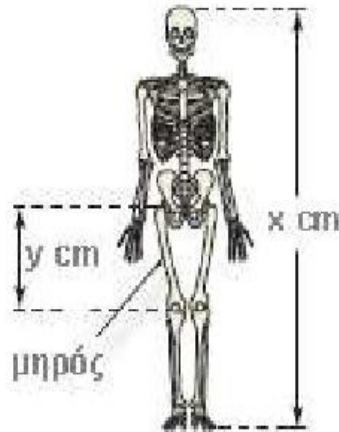
γ) Για ποια θέση του M πάνω στην $ΑΓ$ το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ41

Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του:

Γυναίκα: $y = 0.43x - 26$ Άνδρας: $y = 0,45x - 31$



α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 38,5 cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας.

(Μονάδες 8)

β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου 164 cm . Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 42,8 cm που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους.

(Μονάδες 9)

Ακολουθούν Διαγωνίσματα στο 3^ο Κεφάλαιο, σύμφωνα με τις οδηγίες του Ι.Ε.Π. και την σχετική νομοθεσία για τη δομή, επιλογή και διάρθρωση των θεμάτων .

Διαγώνισμα 1

ΘΕΜΑ Α

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η εξίσωση $(\lambda - 2)x = \lambda^2 - 4$ είναι ταυτότητα, αν $\lambda = 2$

Μονάδες 2

β) Η εξίσωση $x^{2\nu} = 1$ έχει ακριβώς μία λύση, την $x = 1$

Μονάδες 2

γ) Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ και $\Delta = 0$ έχει διπλή ρίζα, την $x = -\frac{\beta}{2a}$

Μονάδες 2

δ) Αν η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($a \neq 0$) έχει δύο ρίζες και ισχύουν: $S < 0$ και $P > 0$, τότε οι ρίζες είναι θετικές.

Μονάδες 2

ε) Η εξίσωση $|a|x^2 + \beta x - |\gamma| = 0$ ($a \neq 0$) έχει δύο άνισες ρίζες

Μονάδες 2

A2. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($a \neq 0$), να αποδείξετε ότι το άθροισμα

S και το γινόμενο P των ριζών είναι αντίστοιχα : $S = -\frac{\beta}{a}$ και $P = \frac{\gamma}{a}$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha + \beta = -1 \text{ και } \alpha^3 \beta + 2\alpha^2 \beta^2 + \alpha \beta^3 = -12$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -12$.

Μονάδες 10

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \mu x + \nu = 0$ (1) με $\mu, \nu \in \mathbb{Z} - \{0\}$ και $\mu^2 > 4\nu$ (1)

α) Να κατασκευάσετε την εξίσωση που έχει ρίζες τις αντίθετες των ριζών της εξίσωσης (1)

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι η (1) δεν έχει ρίζα το 0 και να κατασκευάσετε την εξίσωση που έχει

ρίζες τις αντίστροφες των ριζών της εξίσωσης (1)

Μονάδες 8

γ) Αν, επιπλέον $\nu = \mu$

i) Να βρείτε τα ν, μ , ώστε οι ρίζες της εξίσωσης (1) να διαφέρουν κατά 5.

Μονάδες 6

ii) Να βρείτε τα ν, μ , ώστε το τετράγωνο της μιας ρίζας της εξίσωσης (1) να είναι η άλλη της ρίζα.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

α) Να λύσετε τις εξισώσεις $3x^2 - 14x + 8 = 0$ (1) και $8x^2 - 14x + 3 = 0$ (2)

Μονάδες 10

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής: $ax^2 + bx + \gamma = 0$ (3) και $\gamma x^2 + bx + a = 0$ (4), με $a \cdot \gamma \neq 0$.

Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι: Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $a \cdot \gamma \neq 0$, τότε

i) $\rho \neq 0$ και

Μονάδες 5

ii) ο $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4).

Μονάδες 10

Διαγώνισμα 2

ΘΕΜΑ Α

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν (α, β, γ) γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η εξίσωση $(\lambda^2 - 4)x = \lambda - 2$ είναι αδύνατη, αν $\lambda = -2$

Μονάδες 2

β) Η εξίσωση $x^v = \alpha$, με $\alpha > 0$ και v περιττό φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση την $\sqrt[v]{\alpha}$

Μονάδες 2

γ) Αν η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($\alpha \neq 0$) έχει δύο ρίζες και $S = 0$, τότε οι ρίζες είναι αντίστροφες.

Μονάδες 2

Στις παρακάτω προτάσεις η σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση είναι **μόνο μία**. Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση της κάθε ερώτησης.

δ) Αν S και P το άθροισμα και το γινόμενο αντίστοιχα των ριζών x_1, x_2 της εξίσωσης

$ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, τότε οι ρίζες είναι αρνητικές αν:

A. $S < 0$ και $P > 0$ **B.** $S < 0$ και $P < 0$ **Γ.** $S > 0$ και $P < 0$ **Δ.** $S > 0$ και $P > 0$

Μονάδες 2

ε) Η εξίσωση $a^2x^2 - \beta x - \gamma^2 = 0$, με $\alpha \neq 0$ έχει :

A. καμία ρίζα **B.** δύο άνισες ρίζες **Γ.** μία διπλή ρίζα **Δ.** τίποτα από τα προηγούμενα

Μονάδες 2

A2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $ax + \beta = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει ακριβώς μία λύση, την $x = -\frac{\beta}{\alpha}$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq 2$.

Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες:

α) η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Μονάδες 13

β) το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (|\lambda - 1| - 2)x + (|2\lambda - 2| - 4) = 0$ (1) με $\lambda \in \mathbb{R}$. Επιλέγουμε τυχαία μια τιμή $\lambda \in \Omega$, όπου $\Omega = \left\{-10, -9, -3, 0, \frac{1}{2}, 3, \frac{10}{3}, 11\right\}$ ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης, του οποίου τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Έστω A, B και Γ τα ενδεχόμενα του Ω που ορίζονται:

$$A = \{\lambda \in \Omega / \text{η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές και ίσες}\}$$

$$B = \{\lambda \in \Omega / \text{η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές και άνισες}\}$$

$$\Gamma = \left\{\lambda \in \Omega / \text{η εξίσωση (1) να μην έχει καμία πραγματική ρίζα}\right\}$$

Να βρείτε:

α) Την πιθανότητα του ενδεχομένου A

Μονάδες 8

β) Την πιθανότητα του ενδεχομένου B

Μονάδες 9

γ) Την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

Μονάδες

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 x_2$ των ριζών.

Μονάδες 5

γ) Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 6

δ) Για κάθε $\lambda > 0$, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Μονάδες 6

Ακολουθούν επαναληπτικά διαγωνίσματα που αφορούν στα κεφάλαια 1^ο, 2^ο και 3^ο, σύμφωνα με τις οδηγίες του Ι.Ε.Π. και τη σχετική νομοθεσία για τη δομή, επιλογή και διάρθρωση των θεμάτων στις προαγωγικές εξετάσεις.

Διαγώνισμα 1-Επαναληπτικό

ΘΕΜΑ Α

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα είναι πάντα συμπληρωματικά.

Μονάδες 2

β) Για τους θετικούς αριθμούς a, β και θετικό ακέραιο n ισχύει η ισοδυναμία:

$$a = \beta \Leftrightarrow a^n = \beta^n$$

Μονάδες 2

γ) Για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|a + \beta| = |a| + |\beta|$

Μονάδες 2

δ) Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού για κάθε $a \in \mathbb{R}$

Μονάδες 2

ε) Αν η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($a \neq 0$) έχει δύο άνισες ρίζες x_1, x_2 και $P = x_1 \cdot x_2 = 1$, τότε οι ρίζες είναι αντίστροφες.

Μονάδες 2

A2. Αν $a, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι: $|a \cdot \beta| = |a| \cdot |\beta|$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ο πίνακας:

	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους εννέα διψήφιους αριθμούς του παραπάνω πίνακα. Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης των παρακάτω ενδεχομένων:

A: ο διψήφιος να είναι άρτιος

Μονάδες 7

B: ο διψήφιος να είναι άρτιος και πολλαπλάσιο του 3

Μονάδες 9

Γ: ο διψήφιος να είναι άρτιος ή πολλαπλάσιο του 3

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Έστω οι αριθμοί x, y τέτοιοι, ώστε $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ και $y \in (-2, 0) \cup (0, \frac{1}{3})$.

α) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $A = 2x^2 + 3y + 1$

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $B = \frac{y-1+\sqrt{(3y-1)^2}}{2y}$ είναι ανεξάρτητη του y .

Μονάδες 9

γ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $\Gamma = \sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$ είναι ανεξάρτητη του x .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 6x + \lambda - 7$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 7

β) i) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος των ριζών και να εκφράσετε συναρτήσει του λ το γινόμενο των ριζών.

Μονάδες 2

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε λ με $7 < \lambda < 16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες.

Ποιο είναι τότε το πρόσημο των ριζών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

γ) i) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $x^2 - 6|x| + \lambda = 7$ (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 8

ii) Έχει η εξίσωση (1) για $\lambda = 3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

Διαγώνισμα 2-Επαναληπτικό

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν (α, β, γ) γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν τα A και B θεωρούνται ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης και το ω ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού, τότε η λεκτική ερμηνεία του $\omega \in A - B$ είναι: «Πραγματοποιείται μόνο το A»

Μονάδες 2

β) Αν A ένα ενδεχόμενο ενός δειγματικού χώρου Ω , τότε ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου A τον αριθμό: $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$, όπου N(A) και N(Ω) το πλήθος των ευνοϊκών και δυνατών περιπτώσεων αντίστοιχα.

Μονάδες 2

γ) Για κάθε $\alpha \geq 0$ ισχύει: $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$

Μονάδες 2

Στις παρακάτω ερωτήσεις να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης A με ένα μόνο στοιχείο της στήλης B, ώστε να προκύπτουν ισότητες. Στη στήλη B υπάρχει ένα επιπλέον στοιχείο.

δ)

ΣΤΗΛΗ A	ΣΤΗΛΗ B
1. $P(A')$	$\alpha. P(B) - P(A \cap B)$
2. $P(B - A)$	$\beta. 0$
3. $P(\Omega)$	$\gamma. 1 - P(A)$
	$\delta. 1$

Μονάδες 2

ε)

ΣΤΗΛΗ A ($\alpha, \beta > 0$)	ΣΤΗΛΗ B
1. $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$	$\alpha. \sqrt[\mu]{\alpha^\nu}$
2. $\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}$	$\beta. \sqrt[\nu]{\alpha\beta}$
3. $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$	$\gamma. \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$
	$\delta. \frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$

Μονάδες 2

A2. Θεωρούμε την εξίσωση: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($\alpha \neq 0$) και τη διακρίνουσά της $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.

Να αποδείξετε ότι αν $\Delta > 0$, τότε η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες τις $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η παράσταση: $A = |3x - 6| + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι

i) για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x - 4$

ii) για κάθε $x < 2$, $A = 8 - 3x$.

Μονάδες 12

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$, να αποδείξετε ότι: $\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4$

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση: $P(A) \cdot x^2 - 2P(A \cup B) \cdot x + 4P(B) = 0$ (1), όπου A και B ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω .

α) Ποια είναι η συνθήκη για το ενδεχόμενο A , ώστε η εξίσωση (1) να είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού;

Μονάδες 5

β) Να λύσετε την εξίσωση (1), αν είναι 1^{ου} βαθμού.

Μονάδες 5

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 9

δ) Αν η εξίσωση (1) έχει μια διπλή ρίζα, να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα $A - B$ και $B - A$ είναι ισοπίθανα.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

α) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο $\Pi = 34$ cm και διαγώνιο $\delta = 13$ cm

i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = 60$ cm²

Μονάδες 5

ii) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

Μονάδες 5

iii) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

Μονάδες 5

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 40 cm^2 και διαγώνιο 8 cm .

Μονάδες 10