

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ 3**

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 8 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2016

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ

ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A1.** Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του  $y = f(x)$  ως προς το  $x$  στο σημείο  $x_0$  ;

**(Μονάδες 5)**

**A2.** Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

**(Μονάδες 10)**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  θα λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  (ολικό) ελάχιστο, το  $f(x_0)$ , όταν  $f(x) < f(x_0)$  για κάθε  $x \in A$  .

**β.** Ανάμεσα σε δύο ρίζες μιας πολυωνυμικής συνάρτησης, υπάρχει πάντα τουλάχιστον μια ρίζα της παραγώγου της.

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

γ. Αν η  $f$  είναι συνεχής σε διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha, \beta \in \Delta$ , τότε ισχύει:

$$\int_{\beta}^x f(t)dt = \int_{\alpha}^x f(t)dt + c, c \in \mathbb{R}$$

δ. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$  και  $l$  ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - l) = 0$$

ε. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή είναι θετική για κάθε  $x \in \Delta$ .

(Μονάδες 5x2=10)

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \ln(3e^x + 1) - 2$ .

**B1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

(Μονάδες 5)

**B2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.

(Μονάδες 5)

**B3.** Να ορίσετε την  $f^{-1}$ .

(Μονάδες 8)

**B4.** Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x) < f^{-1}(\ln 5 - 2) - 2.$$

(Μονάδες 7)

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται συνάρτηση  $f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1$ .

**Γ1.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**(Μονάδες 5)**

**Γ2. i.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της και να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = 0.$$

**(Μονάδες 5)**

**ii.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**(Μονάδες 5)**

**Γ3.** Αν για τους αριθμούς  $a, \beta \in \mathbb{R}$  με  $2a + \beta > 0$  και  $a + 2\beta - 1 > 0$ ,

ισχύει:

$$e^{2a+\beta-1} - \ln(2a + \beta) + e^{a+2\beta-2} - \ln(a + 2\beta - 1) \leq 2$$

να υπολογίσετε τους  $a, \beta$ .

**(Μονάδες 5)**

**Γ4.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη

γραφική παράσταση της  $f$ , τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  και την

ευθεία  $x=1$ .

**(Μονάδες 5)**

## ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$  στο  $(1, +\infty)$  με  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x > 1$  που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1+x \ln x}{x \ln x}, \text{ για κάθε } x > 1 \text{ με } f(e) = e^e$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = e^x \cdot \ln x$ ,  $x > 1$  καθώς και ότι οι συναρτήσεις  $g(x) = e^x$ ,  $h(x) = \ln x$  δεν έχουν κοινό σημείο στο  $(1, +\infty)$ .

(Μονάδες 4)

**Δ2. i).** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία της και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 4)

**ii).** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = \frac{\lambda}{x}$  με  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $x > 1$ .

(Μονάδες 4)

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο της  $A(e, f(e))$ .

(Μονάδες 4)

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι:

**i.**  $\frac{f(x)}{e^{e-1}} \geq (1+e)x - e^2$ , για κάθε  $x > 1$

(Μονάδες 3)

**ii.**  $\int_2^3 f(x) dx \geq e^{e-1} \cdot \frac{5+5e-2e^2}{2}$

(Μονάδες 3)

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

## ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**Δ5.** Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in (1, +\infty) \text{ με } x_1 < x_2$$

**(Μονάδες 3 )**

### Ο Δ Η Γ Ι Ε Σ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμο σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν . **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια , διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 1 ώρα μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

Επιστημονική επιμέλεια: Συντακτική ομάδα [www.mathp.gr](http://www.mathp.gr)

Συντονιστής: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών