ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΣΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Τετάρτη, 18/05/2016

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής

Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της *f*.

Απάντηση

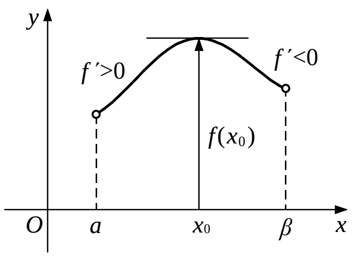
Θεωρία, στη σελίδα 262 του σχολικού βιβλίου.

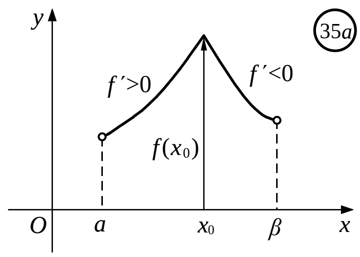
Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε:

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ \ x\in(\alpha,x_0]. \qquad (1)$$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ \ x\in[x_0,\beta). \qquad (2)$$





Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ x\in(\alpha,\beta)\ ,$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Θεωρία, στη σελίδα 141 του σχολικού βιβλίου.

Απάντηση

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

● έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α **και**

● για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$.

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία

Θεωρία, στη σελίδα 246 του σχολικού βιβλίου.

Απάντηση

Διατύπωση:

Αν μια συνάρτηση f είναι:

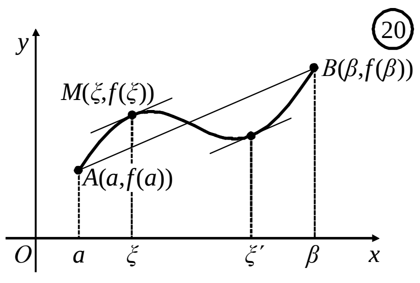
- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Γεωμετρική ερμηνεία:

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB.



Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

Απαντήσεις

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε το $\int_a^\beta f(t)dt = G(a)-G(\beta)$

Λάθος (διότι είναι $\int_a^\beta f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha)$)

β) Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Σωστό (πρόταση στη σελίδα 166 του σχολικού βιβλίου).

γ) Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(a,x_0)\cup(x_0,\beta)$, είναι σταθερή στο $(a,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

Λάθος. (Η αντίστοιχη πρόταση δεν ισχύει γενικά σε ένωση διαστημάτων)

δ) Μια συνάρτηση f είναι «1-1», αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της , η εξίσωση $y=f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

Σωστό (γνωστή πρόταση –σχόλιο στο σχολικό βιβλίο).

ε) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μία μέγιστη τιμή Μ και μία ελάχιστη τιμή m.

Σωστό (θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής, σελίδα 195 σχολικό βιβλίο).

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Β1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πηλίκου παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2+1)-x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2},x\in\mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x}{(x^2+1)^2}=0\Leftrightarrow x=0$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{2x}{(x^2+1)^2}>0\Leftrightarrow x>0$$

$$f'(x)<0\Leftrightarrow\frac{2x}{(x^2+1)^2}<0\Leftrightarrow x<0$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0, η συνάρτηση f θα είναι:

- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,+\infty\right)$.
- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,0\right]$.
- Έχει ακρότατο (ολικό ελάχιστο) στο 0, το $f(0)=0$.

Ο πίνακας μεταβολών (μονοτονίας-ακροτάτων) της συνάρτησης f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	0 $+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$\downarrow$	$\uparrow$

Ολ. ελάχιστο

Β2. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πηλίκου παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f''(x)=\frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3},\ x\in\mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3}=0\Leftrightarrow 1-3x^2=0\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f''(x)>0\Leftrightarrow\frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3}>0\Leftrightarrow 1-3x^2>0\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f''(x)<0\Leftrightarrow\frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3}<0\Leftrightarrow 1-3x^2<0\Leftrightarrow\left(x>\frac{\sqrt{3}}{3}\ \acute{\eta}\ x<-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι:

- Κοίλη στα διαστήματα $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\ +\infty\right)$.
- Κυρτή στο διάστημα $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

Έχει σημεία καμπής τα $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$ και $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$.

Ο πίνακας μεταβολών (κυρτότητας και Σημείων Καμπής) της f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ $+\infty$
$f''(x)$	-	+	-
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

B3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε **δεν** έχει **κατακόρυφη** ασύμπτωτη ($\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$).

<u>Πλάγιες-οριζόντιες:</u> $y = \lambda x + \beta$ $(\lambda, \beta \in \mathbb{R})$ με:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^3+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - \lambda x \right] = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

Επομένως η C_f **έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο** $+\infty$ την $y=1$.

Ακόμα:

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^3+x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\beta = \lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - \lambda x \right] = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

Επομένως η C_f **έχει οριζοντια ασύμπτωτη στο** $-\infty$ την $y=1$.

<u>Παρατηρήσεις:</u>

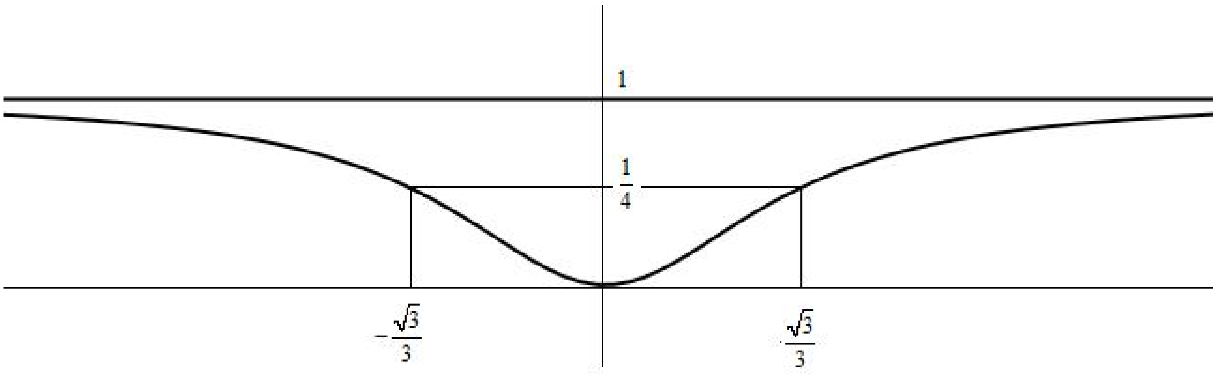
1.Μπορούμε να παρατηρήσουμε (και να αποδείξουμε) ότι η συνάρτηση f είναι άρτια ($f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$) και άρα θα έχει την ίδια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$**,** αποφεύγοντας έτσι να ξαναβρούμε τα παραπάνω όρια στο $-\infty$.

2. Μπορούμε επίσης να βρούμε την οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$ **και να δικαολογήσουμε** ότι μια συνάρτηση f δεν μπορεί να έχει ταυτόχρονα και πλάγια και οριζόντια στο $-\infty$ και στο $+\infty$ αντίστοιχα (άρα δεν θα έχει πλάγια ασύμπτωτη).

Β4. Συνοπτικά ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ $+\infty$
$f''(x)$	-	+	+	-
f'	-	-	+	+
$f(x)$	$\downarrow \cap$	$\downarrow \cup$	$\uparrow \cup$	$\uparrow \cap$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f (αφού λάβουμε και υπόψη μας ότι είναι άρτια και θετική) είναι η επόμενη:



<u>Σημείωση:</u> Για την σωστή παρουσίαση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι αυτή είναι άρτια και θετική ($f(-x)=f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο στο $x=0$, δηλαδή να διέρχεται από το Ο(0,0).

ΘΕΜΑ 3^{o}

Γ1. Η εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0$ έχει προφανή ρίζα το $x_0=0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}-x^2-1, x\in\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x)=e^{x^2}\cdot 2x-2x=2x\cdot\left(e^{x^2}-1\right),\ x\in\mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x\cdot\left(e^{x^2}-1\right)=0 \Leftrightarrow x=0$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow 2x\cdot\left(e^{x^2}-1\right)>0 \Leftrightarrow x>0$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow 2x\cdot\left(e^{x^2}-1\right)<0 \Leftrightarrow x<0$$

$$x^2>0 \Leftrightarrow e^{x^2}>e^0 \Leftrightarrow e^{x^2}>1 \Leftrightarrow e^{x^2}-1>0, x\in\mathbb{R}$$

Ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$\downarrow$	$\uparrow$

Επομένως, η συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο στο 0 το $f(0)=0$ και άρα:

$f(x)\geq f(0) \Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\geq 0$ (η ισότητα ισχύει μόνο στο $x=0$, αφού στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ είναι γνησίως μονότονη άρα και «1-1»)

2^ος^ Τρόπος

Από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου (εφαρμογή 2/ii στη σελίδα 266) γνωρίζουμε ότι:

$\ln x \leq x-1$, για κάθε $x>0$ (η ισότητα ισχύει για $x=1$)

Θέτοντας όπου x το $e^{x^2}>0$ (για κάθε $x\in\mathbb{R}$) έχουμε:

$$\ln e^{x^2}\leq e^{x^2}-1 \Leftrightarrow x^2\leq e^{x^2}-1 \Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\geq 0 \text{, για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

(η ισότητα ισχύει για $e^{x^2}=1 \Leftrightarrow e^{x^2}=e^0 \Leftrightarrow x=0$).

3^ος^ Τρόπος

Μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x-x-1,\ x\in\mathbb{R}$, να μελετήσουμε την μονοτονία και τα ακρότατά της και να πάρουμε $g(x)\geq g(0) \Leftrightarrow g(x)\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έπειτα να πάρουμε $g(x^2)\geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ2. Έχουμε ισοδύναμα:

$$f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2 \Leftrightarrow |f(x)|=\left|e^{x^2}-x^2-1\right| \Leftrightarrow |f(x)|=e^{x^2}-x^2-1, x\in\mathbb{R}$$

(Επειδή, από το προηγούμενο ερώτημα: $f(x)\geq f(0) \Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$).

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ και δεν έχει ρίζες σε αυτά, διότι αν υποθέσουμε ότι έχει μία ρίζα $\rho\in(-\infty,0)$ ή $\rho\in(0,+\infty)$, τότε θα είναι από το θεώρημα του Fermat (που πληρούνται οι προϋποθέσεις του) ότι $f(\rho)=0$. Οπότε έχουμε:

$$\left|f(\rho)\right|=0\Leftrightarrow e^{\rho^2}-\rho^2-1=0\Leftrightarrow \rho=0$$

άτοπο.

Επομένως η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

Άρα έχουμε τις περιπτώσεις:

$$\begin{aligned}
&x>0,\ f(x)>0\Rightarrow f(x)=e^{x^2}-x^2-1\\
&x>0,\ f(x)<0\Rightarrow f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)\\
&x<0,\ f(x)<0\Rightarrow f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)\\
&x<0,\ f(x)>0\Rightarrow f(x)=e^{x^2}-x^2-1
\end{aligned}$$

Επειδή οι ζητούμενες συναρτήσεις πρέπει να είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ (και στο 0 με $f(0)=0$) θα έχουμε:

- $f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$ ή
- $f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right),\ x\in\mathbb{R}$ ή
- $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & x\geq 0\\ -\left(e^{x^2}-x^2-1\right), & x<0\end{cases}$ ή
- $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & x<0\\ -\left(e^{x^2}-x^2-1\right), & x\geq 0\end{cases}$

Γ3. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x)=e^{x^2}\cdot 2x-2x=2x\cdot\left(e^{x^2}-1\right),x\in\mathbb{R}$$

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f''(x)=4x^2e^{x^2}+2\left(e^{x^2}-1\right)>0\text{, για κάθε } x\in(-\infty,0) \text{ και για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

$$(\text{αφού } x^2e^{x^2} \geq 0 \text{ και } e^{x^2} - 1 > 0)$$

Επειδή η f' είναι συνεχής στο 0 (αφού είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων) η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$, δηλαδή σε όλο το $\mathbb{R}$.

Γ4. Προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $x = 0$ (την επαληθεύει).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x+3) - f(x), x \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως διαφορά και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$g'(x) = f'(x+3) - f'(x) > 0, x \in \mathbb{R}$$

αφού $x + 3 > x \Rightarrow f'(x+3) > f'(x)$ (η f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, διότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$)

Έχουμε διαδοχικά για $x > 0$:

$$|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow g(|\eta\mu x|) < g(x) \Leftrightarrow f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) < f(x+3) - f(x)$$

Επομένως **μοναδική λύση** της δοθείσας εξίσωσης είναι η $x = 0$

2ος Τρόπος

Προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $x = 0$ (την επαληθεύει).

Εξετάζουμε τις επόμενες περιπτώσεις ($x > 0$):

1η περίπτωση) Αν $|\eta\mu x| + 3 > x$, τότε προκύπτει η διάταξη $|\eta\mu x| < x < |\eta\mu x| + 3 < x + 3$

- Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[x, |\eta\mu x|]$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[x, |\eta\mu x|]$ (επομένως και συνεχής στο $[x, |\eta\mu x|]$).

Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi_1 \in (|\eta\mu x|, x)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(|\eta\mu x|)}{x - |\eta\mu x|} \quad \text{(I)}$$

- Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[|\eta\mu x| + 3, x + 3]$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[|\eta\mu x| + 3, x + 3]$ (επομένως και συνεχής στο $[|\eta\mu x| + 3, x + 3]$).

Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi_2 \in (|\eta\mu x| + 3, x + 3)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_2)=\frac{f(x+3)-f(|\eta\mu x|+3)}{(x+3)-(|\eta\mu x|+3)}=\frac{f(x+3)-f(|\eta\mu x|+3)}{x-|\eta\mu x|} \quad \text{(II)}$$

Τώρα έχουμε διαδοχικά από τις σχέσεις (I) και (II) και αφού η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα:

$$\xi_1<\xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Rightarrow \frac{f(x)-f(|\eta\mu x|)}{x-|\eta\mu x|}<\frac{f(x+3)-f(|\eta\mu x|+3)}{x-|\eta\mu x|}$$

Επειδή $|\eta\mu x|<x \Leftrightarrow x-|\eta\mu x|>0$ έχουμε:

$$f(x)-f(|\eta\mu x|)<f(x+3)-f(|\eta\mu x|+3)\Leftrightarrow f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)<f(x+3)-f(x)$$

Επομένως, η δοθείσα εξίσωση δεν έχει άλλη ρίζα εκτός από την $x=0$.

2η περίπτωση) Αν $|\eta\mu x|+3<x$, τότε προκύπτει η διάταξη $|\eta\mu x|<|\eta\mu x|+3<x<x+3$.

- Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[|\eta\mu x|,\ |\eta\mu x|+3\right]$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[|\eta\mu x|,\ |\eta\mu x|+3\right]$ (επομένως και συνεχής στο $\left[|\eta\mu x|,\ |\eta\mu x|+3\right]$). Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi_3\in\left(|\eta\mu x|,\ |\eta\mu x|+3\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_3)=\frac{f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)}{(|\eta\mu x|+3)-|\eta\mu x|}=\frac{f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)}{3} \quad \text{(III)}$$

- Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[x,\ x+3]$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[x,\ x+3]$ (επομένως και συνεχής στο $[x,\ x+3]$). Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi_4\in(x,\ x+3)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_4)=\frac{f(x+3)-f(x)}{(x+3)-x}=\frac{f(x+3)-f(x)}{3} \quad \text{(IV)}$$

Τώρα έχουμε διαδοχικά από τις σχέσεις (III) και (IV) και αφού η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα:

$$\xi_3<\xi_4\Rightarrow f'(\xi_3)<f'(\xi_4)\Rightarrow\frac{f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)}{3}<\frac{f(x+3)-f(x)}{3}\Rightarrow f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)<f(x+3)-f(x)$$

Επομένως, η δοθείσα εξίσωση δεν έχει άλλη ρίζα εκτός από την $x=0$.

<u>Σημείωση:</u> Ακόμα και αν $|\eta\mu x|+3=x$, τα παραπάνω θεωρήματα και τα συμπεράσματα εφαρμόζονται χωρίς βλάβη της γενικότητας.

3ος Τρόπος (πρόταση Α. Συγκελάκη-mathematica.gr)

Θα δείξουμε ότι η $x=0$ είναι μοναδική λύση της εξίσωσης.

Υποθέτουμε λοιπόν, αντίθετα, ότι υπάρχει $x_0>0$ που να είναι λύση της εξίσωσης. Ισχύει $|\eta\mu x_0|<x_0$(από τη γνωστή ανισότητα $|\eta\mu x|\le|x|$ με την ισότητα μόνο για $x=0$) καθώς επίσης $|\eta\mu x_0|<|\eta\mu x_0|+3$ και $x_0<x_0+3$.

Διακρίνουμε τις επόμενες περιπτώσεις:

1η περίπτωση) Αν $|\eta\mu x_0|+3<x_0$, τότε $|\eta\mu x_0|<|\eta\mu x_0|+3<x_0<x_0+3$ και επειδή ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ σε κάθε ένα από τα διαστήματα

$[|\eta\mu x_0|,|\eta\mu x_0|+3]$, $[x_0,x_0+3]$ άρα υπάρχουν

$\xi_1\in(|\eta\mu x_0|,|\eta\mu x_0|+3)$, $\xi_2\in(x_0,x_0+3)$ αντίστοιχα τέτοια, ώστε η δοθείσα εξίσωση να γράφεται:

$3f'(\xi_1)=3f'(\xi_2)$ απ΄όπου $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$ και αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα (ως κυρτή) άρα είναι και $1-1$ κι έτσι παίρνουμε $\xi_1=\xi_2$, πράγμα άτοπο αφού τα ξ_1,ξ_2 ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα.

1η περίπτωση) Αν $x_0\le|\eta\mu x_0|+3$, τότε $|\eta\mu x_0|<x_0\le|\eta\mu x_0|+3<x_0+3$.

Γράφουμε την εξίσωση στη μορφή:

$$f(x_0)-f\left(|\eta\mu x_0|\right)=f(x_0+3)-f\left(|\eta\mu x_0|+3\right)$$

Επειδή ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ σε κάθε ένα από τα διαστήματα

$[|\eta\mu x_0|,x_0]$, $[|\eta\mu x_0|+3,x_0+3]$ άρα υπάρχουν

$\xi_1\in(|\eta\mu x_0|,x_0)$, $\xi_2\in(|\eta\mu x_0|+3,x_0+3)$ αντίστοιχα τέτοια, ώστε η εξίσωση να γράφεται:

$(x_0-|\eta\mu x_0|)f'(\xi_1)=(x_0-|\eta\mu x_0|)f'(\xi_2)$

και επειδή $x_0-|\eta\mu x_0|\neq0$ άρα $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$ και αφού η f'είναι γνησίως αύξουσα (ως κυρτή) άρα είναι και $1-1$, κι έτσι παίρνουμε $\xi_1=\xi_2$, πράγμα άτοπο αφού τα ξ_1,ξ_2 ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα.

Επομένως σε κάθε περίπτωση η δοθείσα εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=0$.

4ος Τρόπος

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(t)=f(t+3)-f(t),\ t\ge0$

Επομένως αρκεί να λύσουμε την εξίσωση:

$$h\left(|\eta\mu x|\right)=h(x),\ x\ge0$$

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ (ως αποτέλεσμα διαφοράς και σύνθεσης παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0,+\infty)$) με:

$$h'(t) = f'(t+3) - f'(t),\ t \geq 0$$

Επειδή η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα (αφού η f είναι κυρτή) έχουμε διαδοχικά:

$$t+3 > t \Rightarrow f'(t+3) > f'(t) \Rightarrow f'(t+3) - f'(t) > 0 \Rightarrow h'(t) > 0,\ t \geq 0$$

Επομένως η συνάρτηση h είναιγνησίως αύξουσα στο $\left[0, +\infty\right)$ και άρα είναι «1-1» στο $\left[0, +\infty\right)$. Άρα η δοθείσα εξίσωση για $x \geq 0$ γράφεται ισοδύναμα:

$$h\left(|\eta\mu x|\right) = h(x) \Leftrightarrow |\eta\mu x| = x \Leftrightarrow |\eta\mu x| = |x| \Leftrightarrow x = 0,$$

Αφού στην ανισοισότητα $|\eta\mu x| \leq |x|$ το $=$ ισχύει **μόνο** για $x = 0$ (πρόταση σελίδας 171, σχολικό βιβλίο).

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$\int_0^{\pi} \left(f(x) + f''(x) \right) \cdot \eta\mu x dx = \pi \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx + \int_0^{\pi} f''(x)\eta\mu x dx = \pi \Leftrightarrow$$
$$\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx + \left[f'(x)\eta\mu x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx = \pi \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx - \left[f(x)\sigma\upsilon\nu x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx = \pi$$
$$\Leftrightarrow f(\pi) + f(0) = \pi \quad (1)$$

Τώρα θέτουμε $g(x) = \dfrac{f(x)}{\eta\mu x} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot \eta\mu x$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$.

Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left(g(x) \cdot \eta\mu x \right) = \lim_{x\to 0} g(x) \cdot \lim_{x\to 0} \eta\mu x = 1 \cdot 0 = 0$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0 (αφού είναι παραγωγίσιμη στο 0) θα είναι:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$$

Από τη σχέση (1) έχουμε $f(\pi) = \pi$.

Ακόμα:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) \cdot \eta\mu x}{x} = \lim_{x\to 0} \left[g(x) \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right] = \lim_{x\to 0} g(x) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

Επομένως, η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1$.

Δ2. α) Έστω οτι η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και το $x_0 = 0$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$, σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat θα έχουμε ότι $f'(x_0) = 0$.

Παραγωγίζοντας τη δοσμένη σχέση (αφού τα μέλη της είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων) έχουμε:

$$e^{f(x)} \cdot f'(x) + 1 = f'\left(f(x)\right) \cdot f'(x) + e^x, x \in \mathbb{R}$$

Για $x = x_0$ η τελευταία σχέση γίνεται:

$$e^{f(x_0)} \cdot f'(x_0) + 1 = f'\left(f(x_0)\right) \cdot f'(x_0) + e^{x_0} \Leftrightarrow e^{x_0} = 1 \Leftrightarrow e^{x_0} = e^0 \Leftrightarrow x_0 = 0,$$

Δηλαδή $f'\left(x_0\right) = f'\left(0\right) = 0$, άτοπο αφού $f'\left(0\right) = 1$.

Επομένως η συνάρτηση f **δεν** παρουσιάζει ακρότατο στο $\mathbb{R}$.

β) Από το ερώτημα Δ2 (α) έχουμε ότι $f'\left(x\right) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (δηλαδή η συνάρτηση f' δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$ και είναι επίσης συνεχής (αφού f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$). Επομένως διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και αφού $f'\left(0\right) = 1 > 0$ (Δ1 ερώτημα) θα είναι $f'\left(x\right) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f\left(\mathbb{R}\right) = \mathbb{R}$ θα είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Έχουμε: $\begin{matrix} -1 \leq \eta\mu x \leq 1 \\ -1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1 \end{matrix}$.

Προσθέτοντας τις ποηγούμενες σχέσεις κατά μέλη και διαιρώντας με $f(x) > 0$ (αφού $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, άρα $f(x) > 0$ «κοντά» στο 0) έχουμε:

$$-2 \leq \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \leq 2 \Rightarrow \frac{-2}{f(x)} \leq \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)}$$

Τώρα έχουμε:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2}{f(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{f(x)} = 0$ και, από το κριτήριο της παρεμβολής, παίρνουμε ότι:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$$

Δ4. Για ευκολία θέτουμε $\mathrm{I} = \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx$. Θα δείξουμε ότι $0 < \mathrm{I} < \pi^2$

Θέτουμε Aαλλαγή μεταβλητής στο ολοκλήρωμα):

$$u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx \Rightarrow du=\frac{1}{e^u}dx \Rightarrow e^u du = dx$$
$$u=\ln x \Rightarrow x=e^u$$
$$x=1 \Leftrightarrow u=0$$
$$x=e^{\pi} \Leftrightarrow u=\pi$$

Οπότε :

$$\mathrm{I}=\int_1^{e^{\pi}}\frac{f(\ln x)}{x}dx=\int_0^{\pi}\frac{f(u)}{e^u}e^u du=\int_0^{\pi}f(u)du$$

Έχουμε, αφού η συνάρτηση :

$$0\le x\le \pi \Rightarrow f(0)\le f(x)\le f(\pi)\Rightarrow 0\le f(x)\le \pi$$

Η ισότητα στην προηγούμενη σχέση δεν ισχύει παντού και άρα:

$$\int_0^{\pi}0dx<\int_0^{\pi}f(x)dx<\int_0^{\pi}\pi dx \Rightarrow 0<\int_0^{\pi}f(x)dx<\pi^2 \Leftrightarrow 0<I<\pi^2$$

<u>2ος Τρόπος</u>

Επειδή η συνάρτηση $\ln x$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσες (από το ερώτημα Δ2(β)) έχουμε διαδοχικά:

$$1\le x\le e^{\pi} \Rightarrow \ln 1\le \ln x\le \ln e^{\pi} \Rightarrow 0\le \ln x\le 2 \Rightarrow f(0)\le f(\ln x)\le f(\pi)$$

Διαιρώντας με $x\in\left[1,\ e^{\pi}\right]$(δηλαδή $x>0$) έχουμε:

$$\frac{f(0)}{x}\le\frac{f(\ln x)}{x}\le\frac{f(\pi)}{x}\Leftrightarrow 0\le\frac{f(\ln x)}{x}\le\frac{\pi}{x}$$

Δηλαδή έχουμε τις ανισώσεις:

- $\frac{f(\ln x)}{x}\ge 0$, $x\in\left[1,\ e^{\pi}\right]$ και η συνάρτηση $\frac{f(\ln x)}{x}$ δεν είναι παντού 0 (αφού π.χ για $x=e^{\pi}$ δίνει $\frac{f(\ln e^{\pi})}{\pi}=\frac{\pi}{\pi}=1\neq 0$). Επομένως έχουμε:

$$\int_1^{e^{\pi}}\frac{f(\ln x)}{x}dx>0$$

- $\frac{f(\ln x)}{x}\le\frac{\pi}{x}\Leftrightarrow\frac{f(\ln x)}{x}-\frac{\pi}{x}\le 0$, $x\in\left[1,\ e^{\pi}\right]$ και η συνάρτηση $\frac{f(\ln x)}{x}-\frac{\pi}{x}$ δεν είναι παντού 0 (αφού π.χ για $x=1$ δίνει $\frac{f(\ln 1)}{1}-\frac{\pi}{1}=f(0)-\pi=-\pi\neq 0$). Επομένως έχουμε:

$$\int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x}dx - \int_1^{e^\pi} \frac{\pi}{x}dx < 0 \Rightarrow \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \int_1^{e^\pi} \frac{\pi}{x}dx \Rightarrow \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi\left[\ln x\right]_1^{e^\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi\left(\ln e^\pi - \ln 1\right) \Rightarrow \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi\left(\pi - 0\right) \Rightarrow \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi^2$$

Άρα:

$$0 < \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi^2$$

3ος Τρόπος

Έστω F μία αρχική της f στο $\left[0,+\infty\right)$ (αυτό εξασφαλίζεται αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[0,+\infty\right)$). Άρα ισχύει ότι η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$, $x \geq 0$. Τότε ισχύει ότι:

$$\frac{f(\ln x)}{x} = \left[F\left(\ln x\right)\right]', x \geq 0$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\mathrm{I} = \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x}dx = \int_1^{e^\pi}\left[F\left(\ln x\right)\right]'dx = \left[F\left(\ln x\right)\right]_1^{e^\pi} = F\left(\ln e^\pi\right) - F\left(\ln 1\right) = F(\pi) - F(0) \quad (*)$$

Εφαρμοζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την F στο διάστημα $\left[0,\pi\right]$ αφού F παραγωγίσιμη στο $\left[0,\pi\right]$ (άρα και συνεχής στο $\left[0,\pi\right]$), υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in \left(0,\ \pi\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$F'\left(\xi\right) = \frac{F(\pi) - F(0)}{\pi} \Rightarrow f(\xi) = \frac{F(\pi) - F(0)}{\pi} \Rightarrow F(\pi) - F(0) = \pi f(\xi) \quad (**)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (*) και (**) έχουμε:

$$0 < \xi < \pi \Rightarrow f(0) < f(\xi) < f(\pi) \Rightarrow 0 < f(\xi) < \pi \Rightarrow 0 < \pi f(\xi) < \pi^2 \Rightarrow 0 < F(\pi) - F(0) < \pi^2 \Rightarrow 0 < \mathrm{I} < \pi^2$$

Επιμέλεια λύσεων : www.mathp.gr

Συντονιστής: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών