

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΣΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Τετάρτη, 18/05/2016

ΘΕΜΑ 1^ο

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (a, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής

Αν $f'(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

Απάντηση

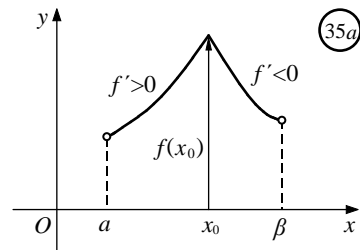
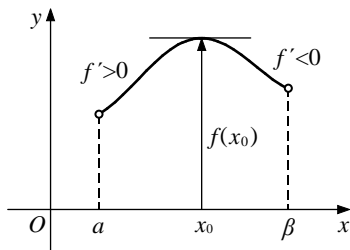
Θεωρία, στη σελίδα 262 του σχολικού βιβλίου.

Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(a, x_0]$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (a, x_0]. \quad (1)$$

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in [x_0, \beta). \quad (2)$$



Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (a, \beta),$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (a, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Θεωρία, στη σελίδα 141 του σχολικού βιβλίου.

Απάντηση

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A **και**
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$.

A3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία

Θεωρία, στη σελίδα 246 του σχολικού βιβλίου.

Απάντηση

Διατύπωση

Αν μια συνάρτηση f είναι:

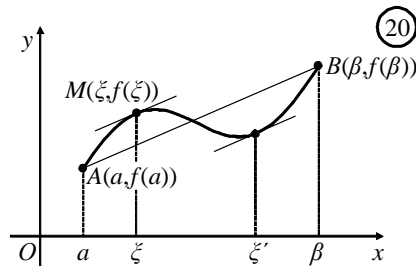
- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$$

Γεωμετρική ερμηνεία

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ένα $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB .



A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

Απαντήσεις

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο

$[a, \beta]$, τότε το $\int_a^\beta f(t)dt = G(a) - G(\beta)$

Λάθος (διότι είναι $\int_a^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(a)$)

β) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Σωστό (πρόταση στη σελίδα 166 του σχολικού βιβλίου).

γ) Κάθε συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, είναι σταθερή στο $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

Λάθος. (Η αντίστοιχη πρόταση δεν ισχύει γενικά σε ένωση διαστημάτων)

δ) Μια συνάρτηση f είναι «1-1», αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $y = f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .

Σωστό (γνωστή πρόταση –σχόλιο στο σχολικό βιβλίο).

ε) Αν η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[a, \beta]$ μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m

Σωστό (θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής, σελίδα 195 σχολικό βιβλίο)

ΘΕΜΑ 2^ο

B1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} (ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο \mathbb{R}) με:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 + 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}, x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(x^2+1)^2} > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(x^2+1)^2} < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0 η συνάρτηση f είναι:

- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$
- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$
- Έχει ακρότατο (ολικό ελάχιστο) στο 0, το $f(0) = 0$

Ο πίνακας μεταβολών-μονοτονίας της συνάρτησης f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	↓		↑

Ολ. ελάχιστο

B2. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} (ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο \mathbb{R}) με:

$$f''(x) = \frac{1-3x^2}{(x^2+1)^3}, x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-3x^2}{(x^2+1)^3} = 0 \Leftrightarrow 1-3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1-3x^2}{(x^2+1)^3} > 0 \Leftrightarrow 1-3x^2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1-3x^2}{(x^2+1)^3} < 0 \Leftrightarrow 1-3x^2 < 0 \Leftrightarrow \left(x > \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή } x < -\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι:

- Κοίλη στα διαστήματα $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

- Κυρτή στο διάστημα $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

Έχει σημεία καμπής τα $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ και $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$

Ο πίνακας μεταβολών-κυρτότητας της f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	+	-	
$f(x)$	\cap	\cap	\cup	

B3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , οπότε **δεν έχει κατακόρυφη** ασύμπτωτη ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$).

Πλάγιες-οριζόντιες: $y = \lambda x + \beta$ ($\lambda, \beta \in \mathbb{R}$) με:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

Επομένως η C_f **έχει οριζοντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = 1$.**

Ακόμα:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^3+x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

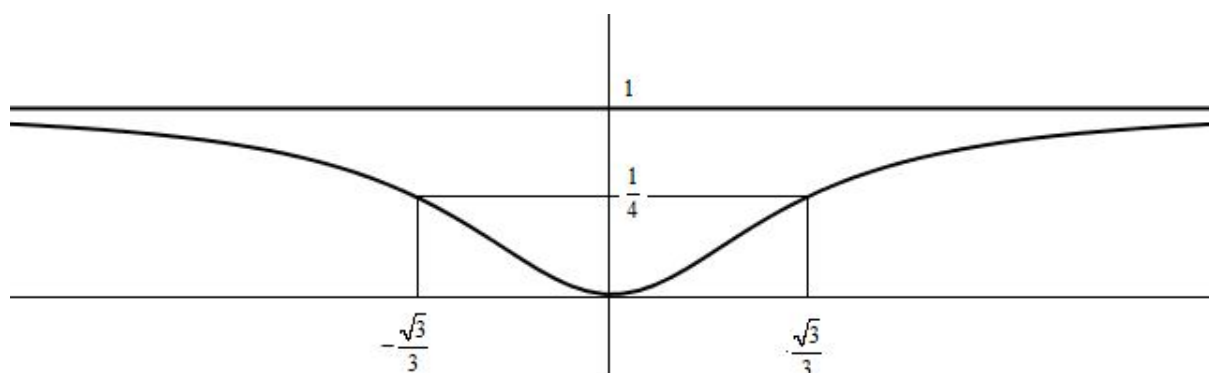
$$\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

Επομένως η C_f **έχει οριζοντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y = 1$**

B4. Συνοπτικά ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	+	+	-	
f'	-	-	+	+	
$f(x)$	$\downarrow \cap$	$\uparrow \cap$	$\uparrow \cup$	$\downarrow \cup$	

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f (αφού λάβουμε και υπόψη μας ότι είναι άρτια) είναι η επόμενη:



Σημείωση: Για την σωστή παρουσίαση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι αυτή είναι άρτια και θετική ($f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο $x = 0$, δηλαδή να διέρχεται από το $O(0,0)$).

ΘΕΜΑ 3^ο

Γ1. Η εξίσωση $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$ έχει προφανή ρίζα το $x_0 = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο \mathbb{R}) με:

$$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x - 2x = 2x \cdot (e^{x^2} - 1), x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot (e^{x^2} - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x \cdot (e^{x^2} - 1) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x \cdot (e^{x^2} - 1) < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

$$x^2 > 0 \Leftrightarrow e^{x^2} > e^0 \Leftrightarrow e^{x^2} > 1 \Leftrightarrow e^{x^2} - 1 > 0, x \in \mathbb{R}$$

Ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	↓		↑

Επομένως η συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο στο 0 το $f(0) = 0$ και άρα:

$f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0$ (η ισότητα ισχύει μόνο στο $x = 0$, αφού στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ είναι γνησίως μονότονη άρα και «1-1»)

2^{ος} Τρόπος

Από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου (εφαρμογή 2/ii στη σελίδα 266 γνωρίζουμε ότι:

$$\ln x \leq x - 1, \text{ για κάθε } x > 0 \text{ (η ισότητα ισχύει για } x = 1)$$

Θέτοντας όπου x το $e^{x^2} > 0$ (για κάθε $x \in \mathbb{R}$) έχουμε:

$$\ln e^{x^2} \leq e^{x^2} - 1 \Leftrightarrow x^2 \leq e^{x^2} - 1 \Leftrightarrow e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{(η ισότητα ισχύει για } e^{x^2} = 1 \Leftrightarrow e^{x^2} = e^0 \Leftrightarrow x = 0).$$

3^{ος} Τρόπος

Μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x - x - 1, x \in \mathbb{R}$, να μελετήσουμε την μονοτονία και τα ακρότατά της και να πάρουμε $g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow g(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να πάρουμε τώρα $g(x^2) \geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ2. Έχουμε ισοδύναμα:

$$f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 \Leftrightarrow |f(x)| = |e^{x^2} - x^2 - 1| \Leftrightarrow |f(x)| = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$$

(Επειδή, από το προηγούμενο ερώτημα: $f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$).

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ και δεν έχει ρίζες σε αυτά διότι αν υποθέσουμε ότι έχει μία ρίζα $\rho \in (-\infty, 0)$ ή $\rho \in (0, +\infty)$, τότε θα είναι από το θεώρημα του Fermat (που πληρούνται οι προϋποθέσεις του) ότι $f(\rho) = 0$. Οπότε έχουμε:

$$|f(\rho)| = 0 \Leftrightarrow e^{\rho^2} - \rho^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \rho = 0$$

άτοπο.

Επομένως η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

Άρα έχουμε τις περιπτώσεις:

$$x > 0, f(x) > 0 \Rightarrow f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$$

$$x > 0, f(x) < 0 \Rightarrow f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$$

$$x < 0, f(x) < 0 \Rightarrow f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$$

$$x < 0, f(x) > 0 \Rightarrow f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$$

Επειδή οι ζητούμενες συναρτήσεις πρέπει να είναι συνεχείς στο \mathbb{R} (και στο 0 με $f(0) = 0$) θα έχουμε:

- $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$ ή
- $f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1), x \in \mathbb{R}$ ή
- $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x \geq 0 \\ -(e^{x^2} - x^2 - 1), & x < 0 \end{cases}$ ή
- $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x < 0 \\ -(e^{x^2} - x^2 - 1), & x \geq 0 \end{cases}$

Γ3. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο \mathbb{R}) με:

$$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x - 2x = 2x \cdot (e^{x^2} - 1), x \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο \mathbb{R}) με

$$f''(x) = 4x^2 e^{x^2} + 2(e^{x^2} - 1) > 0, \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0) \text{ και για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

$$(\text{αφού } x^2 e^{x^2} \geq 0 \text{ και } e^{x^2} - 1 > 0)$$

Επειδή η f' είναι συνεχής στο 0 (αφού είναι συνεχής σε όλο το \mathbb{R} ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων) η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$, δηλαδή σε όλο το \mathbb{R} .

Γ4. Προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $x = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x+3) - f(x), x \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} (ως διαφορά και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο \mathbb{R}) με:

$$g'(x) = f'(x+3) - f'(x) > 0, x \in \mathbb{R}$$

αφού $x+3 > x \Rightarrow f'(x+3) > f'(x)$ (η f' γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , διότι η f είναι κυρτή στο \mathbb{R})

Έχουμε διαδοχικά για $x > 0$:

$$|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow g(|\eta\mu x|) < g(x) \Leftrightarrow f(|\eta\mu x|+3) - f(|\eta\mu x|) < f(x+3) - f(x)$$

Επομένως μοναδική λύση της δοθείσας εξίσωσης είναι η $x = 0$

ΘΕΜΑ 4^ο

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (f(x) + f'(x)) \cdot \eta\mu x dx = \pi &\Leftrightarrow \int_0^\pi f(x) \eta\mu x dx + \int_0^\pi f'(x) \eta\mu x dx = \pi \Leftrightarrow \int_0^\pi f(x) \eta\mu x dx + [f'(x) \eta\mu x]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x) \sigma\upsilon\nu x dx = \pi \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_0^\pi f(x) \eta\mu x dx - [f(x) \sigma\upsilon\nu x]_0^\pi - \int_0^\pi f(x) \eta\mu x dx = \pi \Leftrightarrow f(\pi) + f(0) = \pi \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Τώρα θέτουμε } g(x) = \frac{f(x)}{\eta\mu x} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot \eta\mu x.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1.$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (g(x) \cdot \eta\mu x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu x = 1 \cdot 0 = 0$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0 (αφού είναι παραγωγίσιμη στο 0) θα είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

Ακόμα:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) \cdot \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[g(x) \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1$

Δ2. α) Έστω ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και το $x_0 = 0$ είναι εσωτερικό σημείο του \mathbb{R} , σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat θα έχουμε ότι $f'(x_0) = 0$.

Παραγωγίζοντας τη δοσμένη σχέση (αφού τα μέλη της είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων) έχουμε:

$$e^{f(x)} \cdot f'(x) + 1 = f'(f(x)) \cdot f'(x) + e^x, x \in \mathbb{R}$$

Για $x = x_0$ η τελευταία σχέση γίνεται:

$$e^{f(x_0)} \cdot f'(x_0) + 1 = f'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) + e^{x_0} \Leftrightarrow e^{x_0} = 1 \Leftrightarrow e^{x_0} = e^0 \Leftrightarrow x_0 = 0,$$

Δηλαδή $f'(x_0) = f'(0) = 0$, άτοπο αφού $f'(0) = 1$.

Επομένως η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο \mathbb{R} .

β) Από το ερώτημα Δ2 (α) έχουμε ότι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (δηλαδή η συνάρτηση f' δεν έχει ρίζες στο \mathbb{R} και είναι επίσης συνεχής (αφού f' παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}). Επομένως διατηρεί σταθερό πρόσημο στο \mathbb{R} και αφού $f'(0) = 1 > 0$ (Δ1 ερώτημα) θα είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Δ3. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ θα είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Έχουμε:
$$\begin{aligned} -1 &\leq \eta\mu x \leq 1 \\ -1 &\leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1 \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις ποηγούμενες σχέσεις κατά μέλη και διαιρώντας με $f(x) > 0$ (αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, άρα $f(x) > 0$ «κοντά» στο 0) έχουμε:

$$-2 \leq \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \leq 2 \Rightarrow \frac{-2}{f(x)} \leq \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)}$$

Τώρα έχουμε:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{f(x)} = 0$ και, από το κριτήριο της παρεμβολής, παίρνουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$$

Δ4. Για ευκολία θέτουμε $I = \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx$. Θα δείξουμε ότι $0 < I < \pi^2$

Θέτουμε Ααλλαγή μεταβλητής στο ολοκλήρωμα):

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \Rightarrow du = \frac{1}{e^u} dx \Rightarrow e^u du = dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow x = e^u$$

$$x = 1 \Leftrightarrow u = 0$$

$$x = e^\pi \Leftrightarrow u = \pi$$

Οπότε :

$$I = \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_0^\pi \frac{f(u)}{e^u} e^u du = \int_0^\pi f(u) du$$

Έχουμε, αφού η συνάρτηση :

$$0 \leq x \leq \pi \Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(\pi) \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \pi$$

Η ισότητα στην προηγούμενη σχέση δεν ισχύει παντού και άρα:

$$\int_0^\pi 0 dx < \int_0^\pi f(x) dx < \int_0^\pi \pi dx \Rightarrow 0 < \int_0^\pi f(x) dx < \pi^2 \Leftrightarrow 0 < I < \pi^2$$

2^{ος} Τρόπος

Επειδή η συνάρτηση $\ln x$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσες (από το ερώτημα Δ2(β)) έχουμε διαδοχικά:

$$1 \leq x \leq e^\pi \Rightarrow \ln 1 \leq \ln x \leq \ln e^\pi \Rightarrow 0 \leq \ln x \leq \pi \Rightarrow f(0) \leq f(\ln x) \leq f(\pi)$$

Διαιρώντας με $x \in [1, e^\pi]$ (δηλαδή $x > 0$) έχουμε:

$$\frac{f(0)}{x} \leq \frac{f(\ln x)}{x} \leq \frac{f(\pi)}{x} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{f(\ln x)}{x} \leq \frac{\pi}{x}$$

Δηλαδή έχουμε τις ανισώσεις:

- $\frac{f(\ln x)}{x} \geq 0$, $x \in [1, e^\pi]$ και η συνάρτηση $\frac{f(\ln x)}{x}$ δεν είναι παντού 0 (αφού π.χ για

$x = e^\pi$ δίνει $\frac{f(\ln e^\pi)}{\pi} = \frac{\pi}{\pi} = 1 \neq 0$). Επομένως έχουμε:

$$\int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx > 0$$

- $\frac{f(\ln x)}{x} \leq \frac{\pi}{x} \Leftrightarrow \frac{f(\ln x)}{x} - \frac{\pi}{x} \leq 0$, $x \in [1, e^\pi]$ και η συνάρτηση $\frac{f(\ln x)}{x} - \frac{\pi}{x}$ δεν είναι

παντού 0 (αφού π.χ για $x = 1$ δίνει $\frac{f(\ln 1)}{1} - \frac{\pi}{1} = f(0) - \pi = -\pi \neq 0$). Επομένως

έχουμε:

$$\int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx - \int_1^{e^\pi} \frac{\pi}{x} dx < 0 \Rightarrow \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \int_1^{e^\pi} \frac{\pi}{x} dx \Rightarrow \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi [\ln x]_1^{e^\pi} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi (\ln e^\pi - \ln 1) \Rightarrow \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi (\pi - 0) \Rightarrow \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$$

Άρα:

$$0 < \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$$

Επιμέλεια λύσεων : www.mathp.gr

Συντονιστής: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών