ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Τετάρτη, 18/05/2016

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Θεωρία, στη σελίδα 262 του σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία, στη σελίδα 141 του σχολικού βιβλίου.

Α3. Θεωρία, στη σελίδα 246 του σχολικού βιβλίου.

Α4.

α) Λάθος.
β) Σωστό.
γ) Λάθος.
δ) Σωστό.
ε) Σωστό.

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot\left(x^2+1\right)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2},x\in\mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \Leftrightarrow x=0$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}>0 \Leftrightarrow x>0$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}<0 \Leftrightarrow x<0$$

(η f είναι συνεχής στο 0)

Επομένως η συνάρτηση f είναι:

- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$
- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$
- Έχει ακρότατο (ολικό ελάχιστο) στο 0 , το $f(0)=0$

Ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης f' είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$\downarrow$	$\uparrow$

B2. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f''(x)=\frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3},\ x\in\mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3}=0 \Leftrightarrow 1-3x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3}>0 \Leftrightarrow 1-3x^2>0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f''(x)<0 \Leftrightarrow \frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3}<0 \Leftrightarrow 1-3x^2<0 \Leftrightarrow \left(x>\frac{\sqrt{3}}{3}\ \acute{\eta}\ x<-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

(η f είναι συνεχής στο 0)

Επομένως η συνάρτηση f είναι:

Κοίλη στα διαστήματα $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ +\infty\right)$

Κυρτή στο διάστημα $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$

Έχει σημεία καμπής τα $A\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{1}{4}\right)$ και $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{1}{4}\right)$

Ο πίνακας μεταβολών της f'' είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $+\infty$
$f''(x)$	-	+	-
$f(x)$	$\cap$	$\cap$	$\cup$

Β3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,οπότε **δεν** έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Πλάγιες-οριζόντιες:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right] = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

Επομένως η C_f έχει οριζοντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y=1$

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^3+x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$$

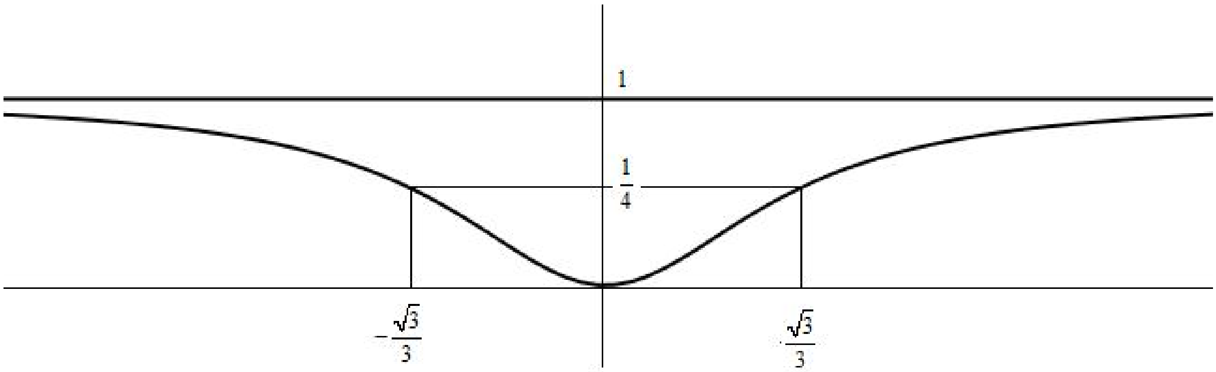
$$\beta = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right] = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

Επομένως η C_f έχει οριζοντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y=1$

Β4. Συνοπτικά ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad$ $+\infty$
$f''(x)$	-	+	+	-
f'	-	-	+	+
$f(x)$	$\downarrow \cap$	$\uparrow \cap$	$\uparrow \cup$	$\downarrow \cup$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f (αφού λάβουμε και υπόψη μας ότι είναι άρτια) είναι η επόμενη:



ΘΕΜΑ 3ο

Γ1. Η εξίσωση $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$ έχει προφανή ρίζα το $x_0 = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x - 2x = 2x \cdot \left(e^{x^2} - 1\right), x \in \mathbb{R}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot \left(e^{x^2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x \cdot \left(e^{x^2} - 1\right) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x \cdot \left(e^{x^2} - 1\right) < 0 \Leftrightarrow x < 0$

$x^2 > 0 \Leftrightarrow e^{x^2} > e^0 \Leftrightarrow e^{x^2} > 1 \Leftrightarrow e^{x^2} - 1 > 0, x \in \mathbb{R}$

Ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	0 $\quad$ $+\infty$

$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$\downarrow$	$\uparrow$

Επομένως η συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο στο 0 το $f(0)=0$ και άρα:

$f(x)\geq f(0) \Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\geq 0$ (η ισότητα ισχύει μόνο στο x=0, αφού στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ είναι γνησίως μονότονη άρα και «1-1»)

Γ2. $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2 \Leftrightarrow |f(x)|=\left|e^{x^2}-x^2-1\right| \Leftrightarrow |f(x)|=e^{x^2}-x^2-1, x\in\mathbb{R}$

(Επειδή, από το προηγούμενο ερώτημα: $f(x)\geq f(0) \Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$).

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ και δεν έχει ρίζες διότι αν υποθέσουμε ότι έχει μία ρίζα $\rho\in(-\infty,0)$ ή $\rho\in(0,+\infty)$ θα είναι $f(\rho)=0$. Έχουμε:

$$|f(\rho)|=0 \Leftrightarrow e^{\rho^2}-\rho^2-1=0 \Leftrightarrow \rho=0$$

άτοπο. Επομένως η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

Άρα:

$x>0, f(x)>0 \Rightarrow f(x)=e^{x^2}-x^2-1$

$x>0, f(x)<0 \Rightarrow f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$

$x<0, f(x)<0 \Rightarrow f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$

$x<0, f(x)>0 \Rightarrow f(x)=e^{x^2}-x^2-1$

Επειδή οι ζητούμενες συναρτήσεις πρέπει να είναι συνεχείς (και στο 0) θα έχουμε:

$f(x)=e^{x^2}-x^2-1, x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$ $x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, x\geq 0 \\ -\left(e^{x^2}-x^2-1\right), x<0 \end{cases}$ ή

$$f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, x<0 \\ -\left(e^{x^2}-x^2-1\right), x\geq 0 \end{cases}$$

Γ3. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με

$$f'(x)=e^{x^2}\cdot 2x-2x=2x\cdot\left(e^{x^2}-1\right), x\in\mathbb{R}$$

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με

$$f''(x) = 4x^2e^{x^2} + 2\left(e^{x^2} - 1\right) > 0, x \in \mathbb{R} \text{ (αφού και } e^{x^2} - 1 > 0\text{)}$$

Επομένως η f είναι κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$.

Γ4. Προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $x = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x+3) - f(x), x \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως διαφορά και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$g'(x) = f'(x+3) - f'(x) > 0, x \in \mathbb{R}$$

αφού $x+3 > x \Rightarrow f'(x+3) > f'(x)$ (η f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$)

Έχουμε διαδοχικά για $x > 0$:

$$|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow g(|\eta\mu x|) < g\left(x\right) \Leftrightarrow f\left(|\eta\mu x| + 3\right) - f\left(|\eta\mu x|\right) < f(x+3) - f(x)$$

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$\int_0^{\pi}\left(f(x) + f''(x)\right)\cdot\eta\mu x dx = \pi \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx + \int_0^{\pi} f''(x)\eta\mu x dx = \pi \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx + \left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx = \pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx - \left[f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx = \pi \Leftrightarrow f(\pi) + f(0) = \pi \ \ (1)$$

Τώρα θέτουμε $g(x) = \dfrac{f(x)}{\eta\mu x} \Leftrightarrow f(x) = g(x)\cdot\eta\mu x$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$.

Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(g(x)\cdot\eta\mu x\right) = \lim_{x\to 0} g(x)\cdot\lim_{x\to 0}\eta\mu x = 1\cdot 0 = 0$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0 (αφού είναι παραγωγίσιμη στο 0) θα είναι:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$$

Ακόμα:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cdot\eta\mu x}{x} = \lim_{x\to 0}\left[g(x)\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right] = \lim_{x\to 0} g(x)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1\cdot 1 = 1$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1$

Δ2. Έστω οτι η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και το $x_0 = 0$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$, σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat θα έχουμε ότι $f'(x_0) = 0$.

Παραγωγίζοντας τη δοσμένη σχέση (αφού τα μέλη της είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων) έχουμε:

$$e^{f(x)} \cdot f'(x) + 1 = f'\left(f(x)\right) \cdot f'(x) + e^x, x \in \mathbb{R}$$

Για $x = x_0$ η τελευταία σχέση γίνεται:

$$e^{f(x_0)} \cdot f'(x_0) + 1 = f'\left(f(x_0)\right) \cdot f'(x_0) + e^{x_0} \Leftrightarrow e^{x_0} = 1 \Leftrightarrow e^{x_0} = e^0 \Leftrightarrow x_0 = 0,$$

Δηλαδή $f'\left(x_0\right) = f'\left(0\right) = 0$ άτοπο αφού $f'\left(0\right) = 1$.

Επομένως η συνάρτηση f **δεν** παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Δ3. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f\left(\mathbb{R}\right) = \mathbb{R}$ θα είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Έχουμε: $\begin{matrix} -1 \le \eta\mu x \le 1 \\ -1 \le \sigma\upsilon\nu x \le 1 \end{matrix}$.

Προσθέτοντας τις σχέσεις κατά μέλη και διαιρώντας με $f(x) > 0$ (αφού $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$) έχουμε:

$$-2 \le \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \le 2 \Rightarrow \frac{-2}{f(x)} \le \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \le \frac{2}{f(x)}$$

Έχουμε:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2}{f(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{f(x)} = 0$ και από το κριτήριο της παρεμβολής θα έχουμε:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$$

Δ4. Για το $\mathrm{I} = \int_1^{e^\pi} \dfrac{f(\ln x)}{x} dx$. Θα δείξουμε ότι $0 < \mathrm{I} < \pi^2$

Θέτουμε:

$$\begin{aligned} & u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \Rightarrow du = \frac{1}{e^u} dx \Rightarrow e^u du = dx \\ & u = \ln x \Rightarrow x = e^u \\ & x = 1 \Leftrightarrow u = 0 \\ & x = e^\pi \Leftrightarrow u = \pi \end{aligned}$$

Άρα:

$$\mathrm{I} = \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_0^\pi \frac{f(u)}{e^u} e^u du = \int_0^\pi f(u) du$$

Έχουμε :

$$0 \le x \le \pi \Rightarrow f(0) \le f(x) \le f(\pi) \Rightarrow 0 \le f(x) \le \pi$$

Η ισότητα στην προηγούμενη σχέση δεν ισχύει παντού και άρα:

$$\int_0^{\pi} 0dx < \int_0^{\pi} f(x)dx < \int_0^{\pi} \pi dx \Rightarrow 0 < \int_0^{\pi} f(x)dx < \pi^2 \Leftrightarrow 0 < I < \pi^2$$

Επιμέλεια λύσεων : www.mathp.gr

Συντονιστής: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών