

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΣΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Παρασκευή, 20/05/2016

ΘΕΜΑ 1^ο

A1. Θεωρία , σχολικό βιβλίο σελίδα 151

A2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελίδα 87

A3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελίδα 14

A4.

α) Σωστό.

β) Λάθος.

γ) Σωστό.

δ) Σωστό

ε) Λάθος.

ΘΕΜΑ 2^ο

B1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} (ως πολυωνυμική) με:

$$f'(x) = x^2 - 5x + 6, x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f'(x) = x^2 - 5x + 6, x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x = 2, x = 3)$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow (x < 2 \text{ ή } x > 3)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow (2 < x < 3)$$

Ο πίνακας μεταβολών της f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	-		+
$f(x)$	↑	↓		↑

T.M.

T.E.

Άρα η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f (η οποία είναι και συνεχής στα σημεία $x_1 = 2, x_2 = 3$) είναι:

- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2, 3]$.
- Γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 2]$ και στο $[3, +\infty)$.
- **Τοπικό Ελάχιστο** στο $x_1 = 3$, το $f(3) = \frac{7}{2}$.
- **Τοπικό Μέγιστο** στο $x_2 = 1$, το $f(2) = \frac{11}{3}$.

B2. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(0, f(0))$ είναι της μορφής $y = \lambda x + \kappa$ ($\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$). Θα προσδιορίσουμε τα $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$. Έχουμε:

$$f(0) = -1, \text{ επομένως το σημείο είναι } A(0, -1).$$

$$\lambda = f'(0) = 6$$

Επειδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0, -1)$ οι συντεταγμένες του A θα επαληθεύουν την εξίσωσή της. Άρα:

$$-1 = \lambda \cdot 0 + \kappa \Leftrightarrow \kappa = -1$$

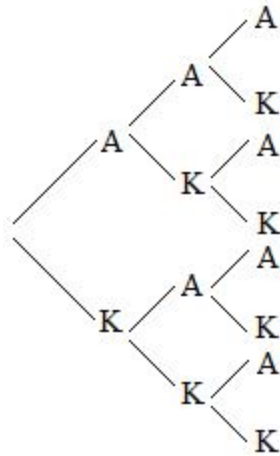
Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι $y = 6x - 1$

B3. Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x) - 12}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 5x + 6 - 12}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 5x - 6}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 6)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 6) = -1 - 6 = -7$$

ΘΕΜΑ 3^ο

Γ1. Με βάση το επόμενο δεντροδιάγραμμα παίρνουμε το δειγματικό χώρο Ω με αναγραφή των στοιχείων του:



$$\Omega = \{AAA, AAK, AKA, AKK, KAA, KAK, KKA, KKK\} \text{ με } N(\Omega)=8$$

Γ2. Τα ενδεχόμενα A, B, Γ με αναγραφή των στοιχείων τους είναι:

$$A = \{KAA, KAK, KKA, KKK\}$$

$$B = \{AKK, KAK, KKA, KKK\}$$

$$\Gamma = \{AAA, AAK, KKA, KKK\}$$

Γ3. α) Είναι:

$$\Delta = A \cap B = \{KKA, KAK, KKK\} \text{ με } N(\Delta)=3, \text{ άρα } P(\Delta) = P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{8}.$$

$$P(E) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{8} + \frac{4}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

$$E = \{KAA, KAK, KKA, KKK, AKK\} \text{ και } P(Z) = P(\Gamma - E) = \frac{N(Z)}{N(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$Z = \Gamma - E = \{AAA, AAK\}$$

Επομένως:

$$P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \frac{3}{8}$$

$$P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)} = \frac{5}{8}$$

$$P(Z) = \frac{N(Z)}{N(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

β) Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $H = (A \cup B)'$, άρα:

$$P(H) = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(E) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $\theta = (A - B) \cup (B - A)$, όπου τα A-B και B-A

είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα (έχουν τομή το κενό σύνολο) άρα:

$$\begin{aligned} P(\theta) &= P[(A-B) \cup (B-A)] = P(A-B) + P(B-A) = \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{4}{8} + \frac{4}{8} - 2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Επομένως:

$$P(H) = \frac{3}{8}$$

$$P(\theta) = \frac{1}{4}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Δ1. Οι κλάσεις είναι: $[8, 8+c)$, $[8+c, 8+2c)$, $[8+2c, 8+3c)$, $[8+3c, 8+4c)$

Στην 2^η κλάση είναι:

$$\frac{(8+2c) + (8+c)}{2} = 14 \Leftrightarrow 16 + 3c = 28 \Leftrightarrow 3c = 12 \Leftrightarrow c = 4$$

Δ2. Συμπληρώνουμε τον πίνακα προσθέτοντας μια επιπλέον στήλη $x_i \cdot v_i$ και έχουμε τον επόμενο πίνακα:

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική τιμή x_i	συχνότητα v_i	$x_i \cdot v_i$
$[8, 12)$	10	20	200
$[12, 16)$	14	15	210
$[16, 20)$	18	10	180
$[20, 24)$	22	v_4	$22v_4$
ΣΥΝΟΛΑ		$v=45+v_4$	$590+22v_4$

Με βάση τον παραπάνω πίνακα έχουμε:

$$\begin{aligned} \bar{x} = 14 &\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^4 x_i \cdot v_i}{v} = 14 \Leftrightarrow \frac{590 + 22v_4}{45 + v_4} = 14 \Leftrightarrow 590 + 22v_4 = 14(45 + v_4) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 590 + 22v_4 = 630 + 14v_4 \Leftrightarrow 8v_4 = 40 \Leftrightarrow v_4 = 5 \end{aligned}$$

Ο παραπάνω πίνακας συμπληρωμένος είναι:

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική τιμή x_i	συχνότητα v_i
$[8, 12)$	10	20

[12, 16)	14	15
[16, 20)	18	10
[20, 24)	22	5
ΣΥΝΟΛΑ		v=50

Τα έγχρωμα στοιχεία είναι αυτά που συμπληρώθηκαν

Δ3. $\frac{3}{4}v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = \frac{3}{4} \cdot 20 + 15 + 10 + 5 = 15 + 15 + 10 + 5 = 45$ υπολογιστές, αφού είναι οι συχνότητες της 2^{ης}, 3^{ης} και 4^{ης} κλάσης μαζί με το $\frac{3}{4}(9,10,11 \text{ λεπτά})$ της συχνότητας της 1^{ης} κλάσης, λόγω της ομοιόμορφης κατανομής των παρατηρήσεων στις κλάσεις.

Δ4.

Με βάση τις 2 τελευταίες στήλες του επόμενου πίνακα

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική τιμή x_i	συχνότητα v_i	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$
[8, 12)	10	20	16	320
[12, 16)	14	15	0	0
[16, 20)	18	10	16	160
[20, 24)	22	5	64	320
ΣΥΝΟΛΑ		v=50		800

Έχουμε:

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i = \frac{800}{50} = 16$$

$$s^2 = 16 \Leftrightarrow s = 4 \quad (s > 0)$$

Έχουμε:

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} > \frac{1}{10}, \text{ άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές}$$

Δ5. Αν θεωρήσουμε Y την τυχαία μεταβλητή των νέων χρόνων, μετά την αντικατάσταση του επεξεργαστή του υπολογιστή και \bar{y} η μέση τιμή των νέων χρόνων $y_i = 0,8 \cdot x_i$ και s_y η

τυπική απόκλιση των νέων χρόνων y_i έχουμε: $\bar{y} = 0,8 \cdot \bar{x}$
 $s_y = 0,8 \cdot s$. Επομένως ο νέος συντελεστής

Λύσεις των θεμάτων των Πανελλαδικών Εξετάσεων στα Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής.

μεταβολής CV_y είναι $CV_y = \frac{0,8 \cdot \bar{x}}{0,8 \cdot s} = CV > 0,1$, άρα το νέο δείγμα **δεν** είναι επίσης ομοιογενές.

Επιμέλεια λύσεων : www.mathp.gr

Συντονιστής: **Καραγιάννης Ιωάννης**, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών