ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΣΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Παρασκευή, 20/05/2016

ΘΕΜΑ 1^o

Α1. Θεωρία , σχολικό βιβλίο σελίδα 151

Α2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελίδα 87

Α3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελίδα 14

Α4.

α) Σωστό.

β) Λάθος.

γ) Σωστό.

δ) Σωστό

ε) Λάθος.

ΘΕΜΑ 2^o

Β1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με:

$$f'(x) = x^2 - 5x + 6,\ x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
&f'(x) = x^2 - 5x + 6,\ x \in \mathbb{R} \\
&f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(x = 2,\ x = 3\right) \\
&f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow \left(x < 2 \ ή \ x > 3\right) \\
&f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow \left(2 < x < 3\right)
\end{aligned}$$

Ο πίνακας μεταβολών της f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	2	3 $+\infty$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$

Τ.Μ. **Τ.Ε.**

Άρα η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f (η οποία είναι και συνεχής στα σημεία $x_1 = 2, x_2 = 3$) είναι:

- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2,\ 3]$.
- Γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,\ 2]$ και στο $[3,\ +\infty)$.
- **Τοπικό Ελάχιστο** στο $x_1 = 3$, το $f(3) = \frac{7}{2}$.
- **Τοπικό Μέγιστο** στο $x_2 = 1$,το $f(2) = \frac{11}{3}$.

Β2. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(0,\ f(0))$ είναι της μορφής $y = \lambda x + \kappa$ $(\lambda,\ \kappa \in \mathbb{R})$. Θα προσδιορίσουμε τα $\lambda,\ \kappa \in \mathbb{R}$. Έχουμε:

$$f(0) = -1, \text{ επομένως το σημείο είναι } A(0,\ -1).$$

$$\lambda = f'(0) = 6$$

Επειδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0,\ -1)$ οι συντεταγμένες του Α θα επαληθεύουν την εξίσωσή της. Άρα:

$$-1 = \lambda \cdot 0 + \kappa \Leftrightarrow \kappa = -1$$

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι $y = 6x - 1$

Β3. Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x \to -1} \frac{f'(x) - 12}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 5x + 6 - 12}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 5x - 6}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-6)}{x+1} = \lim_{x \to -1} (x-6) = -1 - 6 = -7$$

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u>

Γ1. Με βάση το δεντροδιάγραμμα παίρνουμε το δειγματικό χώρο Ω:

$$\Omega = \{\text{ΑΑΑ, ΑΑΚ, ΑΚΑ, ΑΚΚ, ΚΑΑ, ΚΑΚ, ΚΚΑ, ΚΚΚ}\} \text{ με } N(\Omega) = 8$$

Γ2. Τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ με αναγραφή των στοιχείων τους είναι:

$$A = \{KAA,\ KAK,\ KKA,\ KKK\}$$
$$B = \{AKK,\ KAK,\ KKA,\ KKK\}$$
$$\Gamma = \{AAA,\ AAK,\ KKA,\ KKK\}$$

Γ3. α) Είναι:

$\Delta = A \cap B = \{KKA,\ KAK,\ KKK\}$ με N(Δ)=3, άρα $P(\Delta) = P(A \cap B) = \dfrac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \dfrac{3}{8}$.

$$P(E) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{8} + \frac{4}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

$E = \{KAA,\ KAK,\ KKA,\ KKK,\ AKK\}$

$Z = \Gamma - E = \{AAA, AAK\}$ και $P(Z) = P(\Gamma - E) = \dfrac{N(Z)}{N(\Omega)} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

Επομένως:

$$P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \frac{3}{8}$$
$$P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)} = \frac{5}{8}$$
$$P(Z) = \frac{N(Z)}{N(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

β) Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $H = (A \cup B)'$, άρα:

$$P(H) = P\left[(A \cup B)'\right] = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(E) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $\Theta = (A - B) \cup (B - A)$,όπου τα A-B και B-A

είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα (έχουν τομή το κενό σύνολο) άρα:

$$\begin{aligned} P(\Theta) &= P\left[(A - B) \cup (B - A)\right] = P(A - B) + P(B - A) = \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{4}{8} + \frac{4}{8} - 2\frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Επομένως:

$$P(H) = \frac{3}{8}$$
$$P(\Theta) = \frac{1}{4}$$

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

Δ1. Οι κλάσεις είναι: **[8, 8+c), [8+c, 8+2c), [8+2c, 8+3c) , [8+3c, 8+4c)**

Στην 2η κλάση είναι:

$$\frac{(8 + 2c) + (8 + c)}{2} = 14 \Leftrightarrow 16 + 3c = 28 \Leftrightarrow 3c = 12 \Leftrightarrow c = 4$$

Δ2. Συμπληρώνουμε τον πίνακα προσθέτοντας μια επιπλέον στήλη $x_i \cdot v_i$ και έχουμε τον επόμενο πίνακα:

Χρόνος (σε λεπτά)	**Κεντρική τιμή** x_i	**συχνότητα** v_i	$x_i \cdot v_i$
[8, 12)	**10**	20	200
[12, 16)	14	15	210
[16, 20)	**18**	10	180
[20, 24)	**22**	v_4	$22v_4$
ΣΥΝΟΛΑ		**v=45+**v_4	590+22v_4

Με βάση τον παραπάνω πίνακα έχουμε:

$$\overline{x} = 14 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot v_i}{v} = 14 \Leftrightarrow \frac{590 + 22v_4}{45 + v_4} = 14 \Leftrightarrow 590 + 22v_4 = 14\left(45 + v_4\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 590 + 22v_4 = 630 + 14v_4 \Leftrightarrow 8v_4 = 40 \Leftrightarrow v_4 = 5$$

Ο παραπάνω πίνακας **συμπληρωμένος** είναι:

Χρόνος (σε λεπτά)	**Κεντρική τιμή** x_i	**συχνότητα** v_i
[8, 12)	**10**	20
[12, 16)	14	15
[16, 20)	**18**	10
[20, 24)	**22**	**5**
ΣΥΝΟΛΑ		**v=50**

Τα έγχρωμα στοιχεία είναι αυτά που συμπληρώθηκαν

Δ3. $\frac{3}{4}v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = \frac{3}{4} \cdot 20 + 15 + 10 + 5 = 15 + 15 + 10 + 5 = 45$ υπολογιστές, αφού είναι οι συχνότητες της $2^{ης}$,$3^{ης}$ και $4^{ης}$ κλάσης μαζί με το $\frac{3}{4}(9,10,11\ \lambda\varepsilon\pi\tau\acute{\alpha})$ της συχνότητας της $1^{ης}$ κλάσης, λόγω της ομοιόμορφης κατανομης των παρατηρήσεων στις κλάσεις .

Δ4.

Με βάση τις 2 τελευταίες στήλεςτου επόμενου πίνακα

Χρόνος (σε λεπτά)	**Κεντρική τιμή** x_i	**συχνότητα** v_i	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2\cdot v_i$
[8, 12)	10	20	16	320
[12, 16)	14	15	0	0
[16, 20)	18	10	16	160
[20, 24)	22	5	64	320
ΣΥΝΟΛΑ		**ν=50**		800

Έχουμε:

$$s^2=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2\cdot v_i=\frac{800}{50}=16$$

$$s^2=16\Leftrightarrow s=4\ (s>0)$$

Έχουμε:

$CV=\dfrac{s}{|\bar{x}|}=\dfrac{4}{14}=\dfrac{2}{7}>\dfrac{1}{10}$, άρα το δείγμα **δεν** ειναι ομοιογενές

Δ5. Αν θεωρήσουμε Υ την τυχαία μεταβλητή των νέων χρόνων, μετά την αντικατάσταση του επεξεργαστή του υπολογιστή και $\bar{y}$ η μέση τιμή των νέων χρόνων $y_i=0,8\cdot x_i$ και s_y η τυπική απόκλιση των νέων χρόνων y_i έχουμε: $\begin{matrix}\bar{y}=0,8\cdot\bar{x}\\ s_y=0,8\cdot s\end{matrix}$. Επομένως ο νέος συντελεστής μεταβολής CV_y είναι $CV_y=\dfrac{0,8\cdot\bar{x}}{0,8\cdot s}=CV>0,1$, άρα το νέο δείγμα **δεν** ειναι επίσης ομοιογενές.

Επιμέλεια λύσεων : www.mathp.gr

Συντονιστής: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών