

Λύσεις θεμάτων **ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ -1-** Πανελλαδικών Εξετάσεων 2016

Στο μάθημα: « Μαθηματικά Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και
Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής»

Γ' Λυκείου,

09/02/2016

ΘΕΜΑ 1^ο

A1. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται «1-1» σε ένα σύνολο A ;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση 1-1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\langle \text{Αν } x_1 \neq x_2, \text{ τότε } f(x_1) \neq f(x_2) \rangle$$

A2. Αν $c > 0$, τότε ποιο εμβαδόν εκφράζει το $\int_a^\beta c dx$;

Απάντηση:

Το $\int_a^\beta c dx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση $\beta - a$ και ύψος c .

A3. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Απόδειξη:

Για $x \neq x_0$, ισχύει :

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Δηλαδή:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

A4. Σωστό/Λάθος

α) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Σωστό

β) Αν η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ με $f(a) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ'ανάγκη $f(\beta) > 0$.

Λάθος

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbf{R} και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

Σωστό

δ) Αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο A είναι συνεχής στο A και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του A , τότε η f είναι πάντα σταθερή σε όλο το σύνολο A .

Λάθος

ε) Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x)dx + \int_\beta^a f(x)dx = 0$$

Σωστό

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = 2 \ln \frac{x+1}{1-x} + 3$$

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

B2. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

B3. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να μελετήσετε την f^{-1} ως προς τη συνέχεια στο πεδίο ορισμού της.

B4. Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

ΛΥΣΗ

B1. Για το πεδίο ορισμού D_f της f έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x+1}{1-x} > 0 \\ 1-x \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x+1)(1-x) > 0 \\ x \neq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Επομένως $D_f = (-1, 1)$

B2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $D_f = (-1, 1)$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων αφού οι επόμενες συναρτήσεις:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x+1}{1-x} \\ h(x) &= \ln g(x) \\ \Phi(x) &= 2 \ln g(x) + 3 \end{aligned}$$

είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού της.

B3. Έστω $x_1, x_2 \in D_f = (-1, 1)$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Θα αποδείξουμε ότι $x_1 = x_2$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow 2 \ln \frac{x_1+1}{1-x_1} + 3 = 2 \ln \frac{x_2+1}{1-x_2} + 3 \Leftrightarrow \ln \frac{x_1+1}{1-x_1} = \ln \frac{x_2+1}{1-x_2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x_1+1}{1-x_1} = \frac{x_2+1}{1-x_2} \Leftrightarrow (x_1+1)(1-x_2) = (1-x_1)(x_2+1) \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Άρα η f αντιστρέφεται.

Για την αντίστροφη της έχουμε:

Πρέπει:

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = 2 \ln \frac{x+1}{1-x} + 3 \Leftrightarrow 2 \ln \frac{x+1}{1-x} = y-3 \Leftrightarrow \ln \frac{x+1}{1-x} = \frac{y-3}{2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{1-x} = e^{\frac{y-3}{2}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x+1 = (1-x)e^{\frac{y-3}{2}} \Leftrightarrow x+1 = e^{\frac{y-3}{2}} - xe^{\frac{y-3}{2}} \Leftrightarrow x + xe^{\frac{y-3}{2}} = e^{\frac{y-3}{2}} - 1 \Leftrightarrow x \left(1 + e^{\frac{y-3}{2}} \right) = e^{\frac{y-3}{2}} - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{e^{\frac{y-3}{2}} - 1}{1 + e^{\frac{y-3}{2}}} \end{aligned}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow -1 < \frac{e^{\frac{y-3}{2}} - 1}{\left(1 + e^{\frac{y-3}{2}}\right)} < 1 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \frac{e^{\frac{y-3}{2}} - 1}{\left(1 + e^{\frac{y-3}{2}}\right)} < 1 \\ -1 < \frac{e^{\frac{y-3}{2}} - 1}{\left(1 + e^{\frac{y-3}{2}}\right)} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} e^{\frac{y-3}{2}} - 1 < 1 + e^{\frac{y-3}{2}} \\ -1 - e^{\frac{y-3}{2}} < e^{\frac{y-3}{2}} - 1 \end{array} \right)$$

Οι τελευταίες σχέσεις είναι αληθείς για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως:

$$f^{-1}(x) = \frac{e^{\frac{x-3}{2}} - 1}{1 + e^{\frac{x-3}{2}}}, x \in \mathbb{R}$$

Η $f^{-1}(x)$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} ως πηλίκo και σύνθεση των επόμενων συνεχών συναρτήσεων

$$f_1(x) = e^{\frac{x-3}{2}}$$

$$f_2(x) = \frac{e^x - 1}{1 + e^x}$$

B4. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(2 \ln \frac{x+1}{1-x} + 3 \right) = \lim_{u \rightarrow \infty} (2u + 3) = +\infty \left(u = \frac{x+1}{1-x}, \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{1-x} = +\infty \right)$$

Επίσης:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(2 \ln \frac{x+1}{1-x} + 3 \right) = \lim_{u \rightarrow 0^+} (2 \ln u + 3) = -\infty \left(u = \frac{x+1}{1-x}, \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{1-x} = 0 \right)$$

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln|x|}, & \text{αν } x \neq 0, x \neq 1 \text{ και } x \neq -1 \\ \kappa, & \text{αν } x = 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases} \quad g(x) = f(x) \ln \left(\frac{1}{x^2} \right), x > 0$$

Γ1. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ καθώς και την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{-1\}$.

Γ2. i) Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς την μονοτονία της.

ii) Να αποδείξετε ότι:

$$e^{-x^2+1} \leq \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}(\sqrt{3}-1)}{2(x-1)}, \text{ αν } x > 1$$

και

$$e^{-x^2+1} \geq \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}(\sqrt{3}-1)}{2(x-1)}, \text{ αν } 0 < x < 1$$

Γ3. i) Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς τα κοίλα της στο διάστημα $(0, +\infty)$ και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στα σημεία $A(2, g(2))$ και $B(1, g(1))$ αντίστοιχα

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$e^{-4}(7-3x) \leq e^{-x^2}(x-1), \text{ για κάθε } x \in \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right) \text{ και}$$

$$e^{-x^2} \geq e^{-1}, \text{ για κάθε } x \in \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, 1\right)$$

ΛΥΣΗ

Γ1. Η συνάρτηση f γίνεται:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x}, & \text{αν } x > 0 \text{ και } x \neq 1 \\ \frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln(-x)}, & \text{αν } x < 0 \\ \kappa, & \text{αν } x = 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Για το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ έχουμε:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x} = 0,$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} [e^{-x^2+1}(x-1)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x^2+1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) = e \cdot (-1) = -e$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln(-x)} = 0,$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 0^-} [e^{-x^2+1}(x-1)] = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-x^2+1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = e \cdot (-1) = -e$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} (\ln(-x)) = -\infty$

Επομένως είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ και άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Επίσης η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αφού $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$. Τέλος για να είναι η f συνεχής σε όλο το \mathbb{R} πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_1 = 1$.

Έχουμε, σύμφωνα με τον κανόνα του de L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{-x^2+1}(-2x^2+2x+1)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} [e^{-x^2+1}(-2x^2+2x+1)x] = 1$$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \kappa \Leftrightarrow \kappa = 1$.

Γ2. i) Η συνάρτηση $g(x) = f(x) \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $x > 0$ γίνεται διαδοχικά:

Για $x = 1$ έχουμε $g(1) = f(1) \cdot \ln 1 = 0$

$$g(x) = \frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln|x|} \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x} (\ln 1 - \ln x^2) = \frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x} (-2 \ln x) = -2e^{-x^2+1}(x-1)$$

Επομένως θα μελετήσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης $g(x) = -2e^{-x^2+1}(x-1)$, $x > 0$.

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g'(x) = -2[-2x(x-1)e^{-x^2+1} + e^{-x^2+1}] = -2e^{-x^2+1}(-2x^2+2x+1), x > 0$$

Επειδή $-2e^{-x^2+1} < 0$, για $x > 0$, το πρόσημο της $g'(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο του τριωνόμου $-2x^2+2x+1$

Ο πίνακας προσήμου της $g'(x)$ είναι ο επόμενος:

	0	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
x			
$g'(x)$		-	+
$g(x)$		↘	↗

Επομένως η συνάρτηση g είναι:

Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$ και

Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$

ii) Σύμφωνα με τον πίνακα προσήμου της $g'(x)$ του ερωτήματος (i) η συνάρτηση g έχει

ελάχιστο (ολικό) στο σημείο $x_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, το $g\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}(1-\sqrt{3})$.

Επομένως για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$g(x) \geq g\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow -2e^{-x^2+1}(x-1) \geq e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}(1-\sqrt{3}) \Leftrightarrow e^{-x^2+1}(x-1) \leq \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}(\sqrt{3}-1)}{2}$$

Άρα:

- Για $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ έχουμε:

$$e^{-x^2+1} \leq \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}(\sqrt{3}-1)}{2(x-1)}$$

- Για $x-1 < 0$ και $x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ έχουμε:

$$e^{-x^2+1} \geq \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}(\sqrt{3}-1)}{2(x-1)}$$

Γ3. i) Η $g'(x)$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$ (ή αλλιώς η $g(x)$ είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$) ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g''(x) = -4e^{-x^2+1}(2x^3 - 2x^2 - 3x + 1) = -4e^{-x^2+1}(2x^3 - 2x^2 - 3x + 1) = -4e^{-x^2+1}(x+1)(2x^2 - 4x + 1), x > 0$$

Επειδή $-4e^{-x^2+1} < 0$ για $x > 0$, το πρόσημο της $g''(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο του $(x+1)(2x^2-4x+1)$.

Ο πίνακας του προσήμου της $g''(x)$ είναι ο επόμενος:

	0	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	∞
x				
$g''(x)$	-	+	-	
$g(x)$	∩	∪	∩	

Επομένως η συνάρτηση g :

Είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο διάστημα $\left(0, \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right]$

Είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα άνω) στο διάστημα $\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right]$

Είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο διάστημα $\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

Τα σημεία καμπής της είναι το και το $A\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, g\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ ή το $A\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}e^{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}}\right)$

και το $B\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, g\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ ή το $B\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}e^{-\frac{1+2\sqrt{2}}{2}}\right)$

ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $A(2, g(2))$ είναι:

$$y - g(2) = g'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y + 2e^{-3} = 6e^{-3}(x - 2) \Leftrightarrow y = 6e^{-3}x - 14e^{-3}$$

Επειδή η g είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο διάστημα $\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ θα είναι:

$$y \geq g(x) \Leftrightarrow 6e^{-3}x - 14e^{-3} \geq -2e^{-x^2+1}(x-1) \Leftrightarrow -3e^{-3}x + 7e^{-3} \leq e^{-x^2+1}(x-1) \Leftrightarrow e^{-4}(-3x+7) \leq e^{-x^2}(x-1)$$

, για κάθε $x \in \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$.

Επίσης, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $B(1, g(1))$ είναι:

$$y - g(1) = g'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = -2(x - 1)$$

Επειδή η g είναι κυρτή (στέφει τα κοίλα άνω) στο διάστημα

$$\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}, 1\right) \subset \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}, \frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right) \text{ θα είναι:}$$

$y \leq g(x) \Leftrightarrow -2(x - 1) \leq -2e^{-x^2+1}(x - 1) \Leftrightarrow x - 1 \geq e^{-x^2+1}(x - 1) \Leftrightarrow 1 \leq e^{-x^2+1} \Leftrightarrow e^{-x^2} \geq e^{-1}$, για κάθε $x < 1$, αφού $x - 1 < 0$.

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A = (0, +\infty)$ με σύνολο τιμών $f(A) = \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$e^{f(x)}(f^2(x) - 2f(x) + 3) = x$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f .

Για τα ερωτήματα Δ2 και Δ3 δίνεται ότι:

$$f^{-1}(x) = e^x(x^2 - 2x + 3), \quad x \in \mathbb{R}$$

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f^{-1} ως προς την κυρτότητα. Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} , την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$, και την ευθεία $x = 1$.

Δ3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τα σημεία $A(x, f^{-1}(x))$, $B(f^{-1}(x), x)$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f στα σημεία A και B αντίστοιχα, είναι ίσο με 1.

β) Να βρείτε για ποια τιμή του $x \in \mathbb{R}$ η απόσταση των σημείων A, B γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή τους.

ΛΥΣΗ

Δ1. Αφού η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \infty)$, το 1° μέλος της δοθείσας σχέσης είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων), όπως προφανώς παραγωγίσιμη είναι η συνάρτηση του 2° μέλους. Παραγωγίζοντας¹ λοιπόν τα μέλη της δοθείσας σχέσης έχουμε διαδοχικά (όχι ισοδύναμα):

$$e^{f(x)}(f^2(x) - 2f(x) + 3) = x$$

$$e^{f(x)}f'(x)[f^2(x) - 2f(x) + 3] + e^{f(x)}[2f(x)f'(x) - 2f'(x)] = 1$$

$$e^{f(x)}[f'(x)f^2(x) - 2f(x)f'(x) + 3f'(x) + 2f(x)f'(x) - 2f'(x)] = 1$$

$$e^{f(x)}[f'(x)f^2(x) + f'(x)] = 1 \Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)(f^2(x) + 1) = 1$$

$$f'(x) = \frac{e^{-f(x)}}{f^2(x) + 1} > 0, x \in (0, \infty) \Rightarrow H f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (0, \infty) \text{ άρα και "1-1" και άρα αντιστρέψιμη}$$

Για την εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης θέτουμε: $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ με $x \in A = (0, \infty)$ και $y \in f(A) = \mathbb{R}$.

Άρα, θα έχουμε από την δοθείσα σχέση: $e^y(y^2 - 2y + 3) = f^{-1}(y)$, $y \in \mathbb{R}$ ή $f^{-1}(x) = e^x(x^2 - 2x + 3)$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ2. Η συνάρτηση $f^{-1}(x) = e^x(x^2 - 2x + 3)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $(f^{-1}(x))' = e^x(x^2 - 2x + 3) + e^x(2x - 2) = e^x(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση $(f^{-1}(x))'$ είναι επίσης παραγωγίσιμη \mathbb{R} (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$(f^{-1}(x))'' = e^x(x^2 + 1) + 2xe^x = e^x(x + 1)^2, x \in \mathbb{R},$$

δηλαδή $(f^{-1}(x))'' > 0$, $x \in (-\infty, -1)$ και $x \in (-1, -\infty)$ που σημαίνει ότι η $f^{-1}(x)$ είναι κυρτή στο $(-\infty, -1]$ και στο $[-1, +\infty)$ (δηλαδή στρέφει τα κοίλα άνω στο \mathbb{R}).

Η συνάρτηση $f^{-1}(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ όταν $x = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 3$ δηλαδή στο σημείο $A(0, 3)$. Αν θέσουμε $g(x) = f^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ τότε η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο A είναι :

$$y - 3 = g'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x + 3. (g'(0) = (f^{-1})'(0) = 3)$$

¹ Μπορεί να αποδειχθεί και χωρίς την παραγωγισιμότητα της f με ιδιότητες της ισότητας.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \int_0^1 |f^{-1}(x) - (x+3)| dx = \int_0^1 [e^x(x^2 - 2x + 3) - x - 3] dx = \int_0^1 x^2 e^x dx - 2 \int_0^1 x e^x dx + 3 \int_0^1 e^x dx - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - 3[x]_0^1 = 4e - \frac{21}{2} \tau. \mu.$$

(χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η f^{-1} είναι κυρτή δηλαδή ότι $f^{-1}(x) \geq x+3$, $x \in \mathbb{R}$ άρα $f^{-1}(x) - (x+3) \geq 0$, $x \in (0,1)$).

Δ3. i)² Έχουμε:

$$f'(x) = \frac{e^{-f(x)}}{f^2(x)+1}, \quad x \in (0, \infty) \quad \text{και} \quad (f^{-1}(x))' = e^x(x^2+1), \quad x \in \mathbb{R}$$

Άρα :

$$f'(f^{-1}(x)) = \frac{e^{-f(f^{-1}(x))}}{[f(f^{-1}(x))]^2+1} = \frac{e^{-x}}{x^2+1}$$

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot [f^{-1}(x)]' = \frac{e^{-x}}{x^2+1} \cdot e^x(x^2+1) = 1$$

ii) Η απόσταση των σημείων A και B είναι :

$$(AB)^2 = 2(x - f^{-1}(x))^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(AB) = \sqrt{2} |x - f^{-1}(x)|, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(AB) = \sqrt{2} (f^{-1}(x) - x), \quad x \in \mathbb{R}$$

(Χρησιμοποιήσαμε $f^{-1}(x) \geq x+3 > x$, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f^{-1}(x) - x > 0$).

Αν θέσουμε : $h(x) = \sqrt{2}(f^{-1}(x) - x) = \sqrt{2}[e^x(x^2 - 2x + 3) - x]$, $x \in \mathbb{R}$ θα έχουμε ότι η $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη (ως πράξεις παραγωγίσιμων) με $h'(x) = \sqrt{2}[e^x(x^2+1) - 1]$, $x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε: $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ μοναδικό, διότι η συνάρτηση $\varphi(x) = e^x(x^2+1) - 1$, $x \in \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση «1-1» αφού η $\varphi'(x) = e^x(x+1)^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και άρα γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Τώρα έχουμε:

- $x < 0 \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(0) \Rightarrow \varphi(x) < 0 \Rightarrow e^x(x^2+1) - 1 < 0 \Rightarrow \sqrt{2}[e^x(x^2+1) - 1] < 0 \Rightarrow$
η $h(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

² Αυτό το συμπέρασμα ισχύει και γενικότερα αφού : $f(f^{-1}(x)) = x$, $x \in D_{f^{-1}}$ και παραγωγίζοντας τα μέλη της έχουμε $f'(f^{-1}(x)) \cdot [f^{-1}(x)]' = 1$. Επίσης τα σημεία $A(x, f^{-1}(x))$ και $B(f^{-1}(x), x)$ είναι συμμετρικά ως προς την $y = x$.

- $x > 0 \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(0) \Rightarrow \varphi(x) > 0 \Rightarrow e^x(x^2 + 1) - 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{2}[e^x(x^2 + 1) - 1] > 0 \Rightarrow$
η $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \infty)$

και άρα η συνάρτηση $h(x)$ (μπορεί να φανεί πιο καθαρά από τον πίνακα προσήμου της $h'(x)$) έχει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, το $h(0) = \sqrt{2}(f^{-1}(0)) = 3\sqrt{2}$, δηλαδή $(AB)_{\min} = 3\sqrt{2}$.

Επιμέλεια λύσεων

Καραγιάννης Ιωάννης

Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών