ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΟΜΟΓΕΝΩΝ
8/9/2015

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, ορισμός σελίδα 191 σχολικό βιβλίο.

Α2. Θεωρία, απόδειξη θεωρήματος σελίδα 251 σχολικό βιβλίο.

Α3.

α. Σωστό.

β. Λάθος.

γ. Λάθος.

δ. Σωστό.

ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η εξίσωση $3x^2+ax+3=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=\alpha^2-36<0$ (αφού $-6<\alpha<6$).

Επομένως έχουμε:

$$z=\frac{-a\pm i\sqrt{36-a^2}}{6}$$

δηλαδή:

$$z_1=-\frac{a}{6}+\frac{\sqrt{36-a^2}}{6},\ z_2=-\frac{a}{6}-\frac{\sqrt{36-a^2}}{6}$$

Άρα $|z_1|^2=|z_2|^2=\left(\frac{a}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{36-a^2}}{6}\right)^2=\frac{a^2}{36}+\frac{36-a^2}{36}=\frac{36}{36}=1$

Β2. Έχουμε διαδοχικά:

$$|z-1|^2+|z+1|^2=(z-1)(\overline{z}-1)+(z+1)(\overline{z}+1)=z\overline{z}-z-\overline{z}+1+z\overline{z}+z+\overline{z}+1=$$
$$=2z\overline{z}+2=2|z|^2+2=4$$

Η σχέση $|z-1|^2+|z+1|^2=4$ εκφράζει μία έλλειψη με εστίες τα σημεία $E(1,0),E'(-1,0)$.

Β3. Έχουμε:

$$\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{a}{6}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=-3$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι η $x=0$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x - \frac{1}{x}\right) = -\infty$.

Η οριζόντια ασύμπτωτη δεν υπάρχει, αφού $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \infty}\left(\ln x - \frac{1}{x}\right) = \infty$.

Γ2. Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano για την f στο διάστημα $[1,e]$ και έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[1,e]$ (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων)
- $f(1) = -1 < 0$
  $f(e) = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$

Άρα υπάρχει $\xi \in (1,e)$, τέτοι ώστε $f(\xi) = 0$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2} > 0 \ (x > 0)$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα και άρα «1-1» δηλαδή έχει μονάδική ρίζα την $\xi \in (1,e)$

Γ3. Έχουμε

$$x > e \Rightarrow f(x) > f(e) \Rightarrow f(x) > \frac{e-1}{e} > 0$$

$$E(\Omega) = \int_e^{2e} |f(x)| dx = \int_e^{2e} f(x)dx = \int_e^{2e}\left(\ln x - \frac{1}{x}\right)dx = \int_e^{2e} \ln x dx - \int_e^{2e} \frac{1}{x} dx = \left[x\ln x - 1\right]_e^{2e} - \left[\ln x\right]_e^{2e} =$$

$$= 2e\ln 2e - e\ln e - \ln 2e + \ln e = 2e(\ln 2 + 1) - e - (\ln 2 + 1) + 1 = 2\ln 2 + e - \ln 2 \ \tau.\mu$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$f'(x) = 2xe^{-x} - f(x) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2x}{e^x} - f(x) \Leftrightarrow e^x f'(x) = 2x - e^x f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x f'(x) + e^x f(x) = 2x \Leftrightarrow \left[e^x f(x)\right]' = \left(x^2\right)' \Leftrightarrow e^x f(x) = x^2 + c \ (1)$$

, όπου c αυθαίρετη σταθερά.

Για $x = 1 \Rightarrow ef(1) = 1 + c \Rightarrow e \cdot e^{-1} = 1 + c \Rightarrow c = 0$

Επομένως έχουμε από την (1)

$$(1) \Rightarrow e^x f(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{e^x}$$

Δ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$f'(x)=\frac{2xe^x-x^2e^x}{e^{2x}}=\frac{2x-x^2}{e^x}, x\in\mathbb{R}.$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x-x^2}{e^x}=0\Leftrightarrow\left(x=0,x=2\right)$$

Για $x<0\Rightarrow f'(x)<0$, επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,0\right]$.

Για $0<x<2\Rightarrow f'(x)>0$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,2\right]$.

Για $x>2\Rightarrow f'(x)<0$, επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[2,+\infty\right)$

Το σύνολο τιμών Α της συνάρτησης f είναι $A=f\left(\left(-\infty,0\right]\right)\cup f\left(\left[0,2\right]\right)\cup f\left(\left[2,+\infty\right)\right)$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
&f\left(\left(-\infty,0\right]\right)=\left[f(0),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=\left[0,+\infty\right)\\
&f\left(\left[0,2\right]\right)=\left[f(0),f(2)\right]=\left[0,4e^{-2}\right]\\
&f\left(\left[2,+\infty\right)\right)=\left(\lim_{x\to\infty}f(x),f(2)\right]=\left(0,4e^{-2}\right]
\end{aligned}$$

(Χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα του Dl΄Hospital $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0$)

Επομένως $A=\left[0,+\infty\right)$.

Δ3. Η εξίσωση γίνεται ισοδύναμα:

$$x^2=2e^{x-2}\Leftrightarrow x^2=\frac{2e^x}{e^2}\Leftrightarrow\frac{x^2}{e^x}=\frac{2}{e^2}\Leftrightarrow f(x)=\frac{2}{e^2}$$

Έχουμε:

- $\frac{2}{e^2}\in f\left(\left(-\infty,0\right]\right)=\left[0,+\infty\right)$ και άρα υπάρχει $\xi_1\in\left(-\infty,0\right]$, τέτοιο ώστε $f\left(\xi_1\right)=\frac{2}{e^2}$, το οποίο είναι μοναδικό αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- $\frac{2}{e^2}\in f\left(\left[0,2\right]\right)=\left[0,4e^{-2}\right]$ και άρα υπάρχει $\xi_2\in\left[0,2\right]$,τέτοιο ώστε $f\left(\xi_2\right)=\frac{2}{e^2}$ το οποίο είναι μοναδικό αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.
- $\frac{2}{e^2}\in f\left(\left[2,+\infty\right)\right)=\left(0,4e^{-2}\right]$ και άρα υπάρχει $\xi_3\in\left[2,+\infty\right)$, τέτοιο ώστε $f\left(\xi_3\right)=\frac{2}{e^2}$ το οποίο είναι μοναδικό αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Δ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $\left(-1, f(-1)\right)$ είναι:

$$y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y - e = -3e\left(x+1\right) \Leftrightarrow y = -3ex - 2e$$

Αφού η f είναι κυρτή στο διάστημα $\left(-\infty, 0\right]$ θα έχουμε:

$$f(x) \geq -3ex - 2e \Leftrightarrow f(x) + 3ex + 2e \geq 0\,,\ \ x \in \left(-\infty, 0\right]$$

Μαθηματικός Περιηγητής

Γενική Επιμέλεια: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος