ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΚΑΙ ΕΠΑ.Λ. ΟΜΑΔΑ Β΄) ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΤΕΤΑΡΤΗ, 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία , απόδειξη στη σελίδα 150 του σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία, ορισμός στη σελίδα 16 του σχολικού βιβλίου.

Α3. Θεωρία, ορισμός στη σελίδα 96 του σχολικού βιβλίου.

Α4.

α. Λάθος.

β. Σωστό.

γ. Σωστό.

δ. Λάθος.

ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού η συνάρτηση f διέρχεται από το σημείο $A(-2,0)$ έχουμε:

$$f(-2)=0 \Leftrightarrow -2\alpha+\beta-1=0 \ (1)$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με παράγωγο:

$$f'(x)=3ax^2+2\beta x, x\in\mathbb{R}$$

Επίσης, αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης f εφάπτεται στο άξονα $x'x$, έχουμε:

$$f'(-2)=0 \Leftrightarrow 3\alpha-\beta=0 \ (2)$$

Οι σχέσεις (1) και (2) αποτελούν σύστημα 2 εξισώσεων με ισάριθμους αγνώστους η λύση του οποίου είναι $a=1, \beta=3$.

Β2. Η συνάρτηση f για $a=1, \beta=3$ γίνεται:

$$f(x)=x^3+3x^2-4, \ x\in\mathbb{R}.$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με $f'(x)=3x^2+6x, x\in\mathbb{R}$.

Έχουμε:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow (x=0, x=-2) \text{ και}$$

- $f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-2,0)$ και άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2,0]$.
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,2]$ και $[0,\infty)$.
- Η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x_1=-2$ το $f(-2)=0$.
- Η συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x_2=0$ το $f(0)=-4$.

Β3. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f σε οποιοδήποτε σημείο της $M(x, f(x))$, $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=3x^2+6x, x\in\mathbb{R}$. Η συνάρτηση $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη (ως πολυωνυμική) με $f''(x)=6x+6,\ x\in\mathbb{R}$. Έχουμε:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$$
$$f''(x)>0 \Leftrightarrow x>-1$$
$$f''(x)<0 \Leftrightarrow x<-1$$

Άρα η f' έχει ελάχιστο στο $x_0=-1$ το $f'(-1)=-3$. Επομένως το σημείο στο οποίο η εφαππτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης είναι το $\mathrm{K}(-1, f(-1))$ ή $K(-1,-2)$.

Β4. Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to-2}\frac{f'(x)}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}}=\lim_{x\to-2}\frac{3x^2+6x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}}=3\lim_{x\to-2}\frac{x^2+2x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}}=3\lim_{x\to-2}\frac{(x^2+2x)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}\right)}{x^2-4}=$$
$$=3\lim_{x\to-2}\frac{x(x+2)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}\right)}{(x+2)(x-2)}=3\lim_{x\to-2}\frac{x\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}\right)}{x-2}=3\sqrt{5}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Οι κλάσεις έχουν πλάτος c άρα είναι : [0,c), [c,2c), [2c,3c), [3c,4c), [4c,5c). Επομένως είναι:

$$\frac{4c+5c}{2}=18 \Leftrightarrow 9c=36 \Leftrightarrow c=4$$

Γ2. Έχουμε:

$$a_i=360^0\cdot f_5 \Leftrightarrow 36^0=360^0\cdot f_5 \Leftrightarrow f_5=\frac{36^0}{360^0} \Leftrightarrow f_5=0{,}1$$

Ακόμα έχουμε:

$$\frac{\nu_1}{4}=\frac{\nu_1+\nu_2}{9}=\frac{\nu_1+\nu_2+\nu_3}{15}=\frac{\nu_1+\nu_2+\nu_3}{18}=\frac{\nu-\nu_5}{18}=\frac{\nu-0,1\nu}{18}=\frac{0,9\nu}{18}=0,05\nu$$

$$\frac{\nu_1}{4}=0,05\nu \Leftrightarrow \frac{\nu_1}{\nu}=0,2 \Leftrightarrow f_1=0,2$$

$$\frac{\nu_1+\nu_2}{9}=0,05\nu \Leftrightarrow \nu_1+\nu_2=0,45\nu \Leftrightarrow 0,2\nu+\nu_2=0,45\nu \Leftrightarrow \frac{\nu_2}{\nu}=0,25 \Leftrightarrow f_2=0,25$$

$$\frac{\nu_1+\nu_2+\nu_3}{15}=0,05\nu \Leftrightarrow \nu_1+\nu_2+\nu_3=0,75\nu \Leftrightarrow 0,2\nu+0,25\nu+\nu_3=0,75\nu \Leftrightarrow \frac{\nu_3}{\nu}=0,30 \Leftrightarrow f_3=0,30$$

$$f_4=1-\left(f_1+f_2+f_3+f_5\right) \Leftrightarrow f_4=0,15$$

Άρα ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

Κλάσεις (σε ώρες)	**Κεντρικές τιμές x_i**	**Σχετικές συχνότητες f_i %**
[0, 4)	**2**	**20**
[4,8)	**6**	**25**
[8,12)	**10**	**30**
[12,16)	**14**	**15**
[16,20)	**18**	**10**
	Σύνολο	**100**

Γ3. Το ποσοστό των συνδρομητών που έχουν χρεωθεί τουλάχιστον 3 ώρες και λιγότερο από 10 ώρες είναι το ποσοστό του $\frac{1}{4}$ της $1^{ης}$ κλάσης,το $\frac{1}{2}$ της $3^{ης}$ κλάσης και το ποσοστό της $2^{ης}$ κλάσης , δηλαδή: $\frac{20}{4}+25+\frac{30}{2}=5+25+15=45\%$ (Υποθέσαμε ότι οι ώρες στις κλάσεις είναι ισοκατανεμημένες).

Γ4. Στο νέο δείγμα δεν συμπεριλαμβάνονται οι συνδρομητές της $1^{ης}$ κλάσης. Οι υπόλοιπες κλάσεις (αφαιρουμένων των 4 ωρών με δωρεάν χρόνο ομιλίας) είναι τώρα:

[0,4), [4,8), [8,12) και [12,16) με κεντρικές τιμές 2, 6, 10, 14 αντίστοιχα και αντίστοιχες σχετικές συχνότητες:

$$f'_2=\frac{\nu_2}{\nu_2+\nu_3+\nu_4+\nu_5}=\frac{0,25\nu}{0,80\nu}=\frac{5}{16}$$

$$f'_3=\frac{\nu_3}{\nu_2+\nu_3+\nu_4+\nu_5}=\frac{0,30\nu}{0,80\nu}=\frac{3}{8}$$

$$f'_4=\frac{\nu_4}{\nu_2+\nu_3+\nu_4+\nu_5}=\frac{0,15\nu}{0,80\nu}=\frac{3}{16}$$

$$f'_5=\frac{\nu_5}{\nu_2+\nu_3+\nu_4+\nu_5}=\frac{0,10\nu}{0,80\nu}=\frac{1}{8}$$

, αφού πλέον τώρα το μέγεθος του δείγματος είναι:

$$\nu_2+\nu_3+\nu_4+\nu_5=0,25\nu+0,30\nu+0,15\nu+0,10\nu=0,80\nu\,.$$

Επομένως η μέση τιμή τους είναι:

$$\overline{x}'=\sum_{i=2}^{5}x_i f_i'=2\cdot\frac{5}{16}+6\cdot\frac{3}{8}+10\cdot\frac{3}{16}+14\cdot\frac{1}{8}=6,5\text{ ώρες.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΚΝ ,ΚΒΛ, ΜΓΛ, ΔΝΜ είναι ίσα αφού έχουν τις κάθετες πλευρές τους αντίστοιχα ίσες (x και 4-x). Το εμβαδόν του κάθε τριγώνου είναι $E_1=\frac{1}{2}x\cdot(4-x)$ τ.μ και συνολικά το εμβαδόν των τεσσάρων τριγώνων είναι:

$$E_{\tau\rho.}=2x\cdot(4-x)\text{ τ.μ.}$$

Το εμβαδόν $E(x)$ του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ είναι:

$$E(x)=E_{\tau\varepsilon\tau\rho.}-E_{\tau\rho.}\Leftrightarrow E(x)=16-2x(4-x)\Leftrightarrow E(x)=2x^2-8x+16\Leftrightarrow E(x)=2\left(x^2-4x+8\right),$$

$x\in(0,2)$

Σημείωση: Το εμβαδόν του ΚΛΜΝ είναι $E(x)=a^2=2\left(x^2-4x+8\right), x\in(0,2)$, αφού το ΚΛΜΝ είναι τεράγωνο. Όμως σε μια τέτοια περίπτωση θα πρέπει να αποδειχθεί ότι το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο με πλευρά α.

Δ2. Η συνάρτηση $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ (ως πολυωνυμική) με

$$E'(x)=4x-8,\ x\in(0,2)$$

Έχουμε:

$$E'(x)=0\Leftrightarrow x=2$$
$$E'(x)>0\Leftrightarrow x>2$$
$$E'(x)<0\Leftrightarrow x<2$$

Άρα η συνάρτηση $E(x)$ έχει ελάχιστο στο σημείο $x_0=2$ (με τιμή $E(2)=8$ τ.μ. η οποία δεν ζητείται).

Δ3. α) Έχουμε σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος:

$$\overline{x}=2\Leftrightarrow\frac{\sum_{i=1}^{19}x_i}{19}=2\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{19}x_i=38$$

$$\overline{y}=8,02\Leftrightarrow\frac{\sum_{i=1}^{19}y_i}{19}=8,02\Leftrightarrow\frac{\sum_{i=1}^{19}E(x_i)}{19}=8,02\Leftrightarrow\frac{2\sum_{i=1}^{19}\left(x_i^2-4x_i+8\right)}{19}=8,02\Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{19}\left(x_i^2-4x_i+8\right)=76,19\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{19}x_i^2-4\sum_{i=1}^{19}x_i+19\cdot 8=76,19\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{19}x_i^2-4\cdot 38+152=76,19\Leftrightarrow\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{19}x_i^2=76,19$$

Άρα η μέση τιμή $\overline{X}$ των x_i^2 είναι:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{19} x_i^2}{19} = \frac{76,19}{19} = 4,01$$

β) Έχουμε:

$$s_x^2 = \frac{1}{19}\left\{\sum_{i=1}^{19} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{19} x_i\right)^2}{19}\right\} \Leftrightarrow s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{19} x_i^2}{19} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{19} x_i}{19}\right)^2 \Leftrightarrow s_x^2 = \overline{X} - \overline{x}^2 \Leftrightarrow$$

$$s_x^2 = 4,01 - 4 \Leftrightarrow s_x^2 = 0,01 \Leftrightarrow s_x = 0,1$$

Ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος είναι:

$$C.V = \frac{s_x}{\overline{x}} = \frac{0,1}{2} = 0.05 < 0.1$$

και επομένως το δείγμα **είναι ομοιογενές**.

γ) Το ενδεχόμενο $A = \{x_i, i = 1,2...19 / x_i \geq 2\}$. Αφού $\overline{x} = \delta = 2$ το 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες της διαμέσου ,δ ηλαδή 9 παρατηρήσεις είναι >2.

Επομένως οι ευνοικές περιπτώσεις είναι N(A)=1+9=10. Επιπλέον η διάμεσος δ είναι η μεσαία παρατήρηση (αφού το μέγεθος του δείγματος είναι περιττός αριθμός).

Επομένως $\delta = x_{10} = 2$.

Άρα:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{10}{19}.$$

Ακόμα έχουμε:

$$B = \{x_i, i = 1,2...19 / 2\left(x^2 - 4x + 8\right) \leq 8\}$$

$$B = \{x_i, i = 1,2...19 / x^2 - 4x + 8 \leq 4\}$$

$$B = \{x_i, i = 1,2...19 / \left(x_i - 2\right)^2 \leq 0\}$$

$$B = \{x_i, i = 1,2...19 / x_i = 2\} = \{x_{10}\}$$

Επομένως:

$$P(B) = \frac{\mathrm{N(B)}}{\mathrm{N}(\Omega)} = \frac{1}{19}$$

Το σύνολο A είναι το $A = \{x_{10,} x_{11}, ... x_{19}\}$. Άρα έχουμε:

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = A$$

$$\Gamma = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B})'$$

$$P(\Gamma) = P\big((\mathrm{A} \cup \mathrm{B})'\big) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{10}{19} = \frac{9}{19}$$

Επιμέλεια λύσεων: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών