ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΚΑΙ ΕΠΑ.Λ. ΟΜΑΔΑ Β΄) ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΤΕΤΑΡΤΗ, 20 ΜΑΙΟΥ 2015

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία , απόδειξη στη σελίδα 31 του σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία, ορισμός στη σελίδα 22 του σχολικού βιβλίου.

Α3. Θεωρία, ορισμός στη σελίδα 87 του σχολικού βιβλίου.

Α4.

α. Λάθος.

β. Σωστό.

γ. Λάθος.

δ. Λάθος.

ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Οι λύσεις της εξίσωσης $(3x-1)(8x^2-6x+1)=0$ είναι:

$$(3x-1)(8x^2-6x+1)=0 \Leftrightarrow (3x-1=0 \text{ ή } 8x^2-6x+1=0) \Leftrightarrow \left(x=\frac{1}{3} \text{ ή } x=\frac{1}{2} \text{ ή } x=\frac{1}{4}\right)$$

Άρα το σύνολο λύσεων της παραπάνω εξίσωσης είναι $K=\left\{\frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right\}$.

Επειδή γενικά ισχύει $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$ θα είναι $P(A\cap B)\le P(A)\le P(A\cup B)$.Επομένως έχουμε:

$$P(A\cap B)=\frac{1}{4}$$

$$P(A)=\frac{1}{3}$$

$$P(A\cup B)=\frac{1}{2}$$

Β2. Έχουμε διαδοχικά:

$$P(A'-B') = P(A') - P(A'\cap B') = (1-P(A)) - P((A\cup B)') =$$
$$1-P(A)-\left[1-P(A\cup B)\right] = P(A\cup B) - P(A) = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

Το ενδεχόμενο Δ: «πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β» είναι το αντίθετο του ενδεχομένου «πραγματοποιούνται αμφότερα τα Α και Β, οπότε είναι $\Delta = (A\cap B)'$. Επομένως έχουμε:

$$P(\Delta) = P((A\cap B)') = 1 - P(A\cap B) = 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

Β3. Από το προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων έχουμε:

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Leftrightarrow P(B) = P(A\cup B) - P(A) + P(A\cap B) = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

Άρα $P(B)=\frac{5}{12}$.

Έχουμε $E=(A-B)\cup(B-A)$ και επομένως είναι:

$$P(E) = P\left[(A-B)\cup(B-A)\right] = P(A-B)+P(B-A) = P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B) =$$
$$= P(A) - 2P(A\cap B) + P(B) = \frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{5}{12}=\frac{1}{4}$$

Β4. Η $P(\Gamma)$ ανήκει στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης $9x^2-3x-2=0$, δηλαδή στο σύνολο $\Lambda=\left\{-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right\}$. Επομένως, αφού $P(\Gamma)>0$ είναι $P(\Gamma)=\frac{2}{3}$.

Τα ενδεχόμενα Α και Γ **δεν** είναι ασυμβίβαστα , αφού αν υποθέσουμε ότι ήταν ασυμβίβαστα θα είχαμε:

$$P(B\cup\Gamma) = P(A)+P(\Gamma) = \frac{5}{12}+\frac{2}{3}=\frac{13}{12}>1$$

, που είναι άτοπο.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Κλάσεις	Κέντρα κλάσεων x_i	$f_i\%$	f_i
[8,10)	**9**	**10**	**0,1**
[10,12)	**11**	**10**	f_2
[12,14)	**13**	**30**	**0,3**
[14,16)	**15**	**20**	f_4
[16,18)	**17**	**30**	**0,3**

Στην πρώτη κλάση [8,10) ανήκουν όλες οι παρατηρήσεις του δείγματος που έχουν τιμές μικρότερες του 10, επομένως $f_1 = 10\%$.

Στην τελευταία κλάση [16,18) ανήκουν όλες οι παρατηρήσεις του δείγματος που έχουν τιμές μεγαλύτερες ή ίσες του 16, επομένως $f_5 = 30\%$.

Για την 3^{η} κλάση είναι:

$a_3 = 360^0 \cdot f_3 \Leftrightarrow f_3 = \dfrac{a_3}{360} \Leftrightarrow f_3 = \dfrac{108}{360} \Leftrightarrow f_3 = \dfrac{3}{10} \Leftrightarrow f_3 = 30\%$, όπου a_3 το τόξο που κυκλικού διαγράμματος που αντιστοιχεί στην κλάση αυτή.

Για τη μέση τιμή του δείγματος έχουμε:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i f_i \Leftrightarrow \bar{x} = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 + x_5 f_5 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Leftrightarrow 11 f_2 + 15 f_4 = 4{,}1 \ (1)$$

Ακόμα είναι:

$$\sum_{i=1}^{5} f_i = 1 \Leftrightarrow 0{,}7 + f_2 + f_4 = 1 \Leftrightarrow f_2 + f_4 = 0{,}3 \ (2)$$

Οι σχέσεις (1) και (2) αποτελούν σύστημα δύο εξισώσεων με 2 αγνώστους:

Από τη σχέση (2) έχουμε $f_2 = 0{,}3 - f_4$ και η σχέση (1) γίνεται:

$$11\left(0{,}3 - f_4\right) + 15 f_4 = 4{,}1 \Leftrightarrow f_4 = 0{,}2$$

Επομένως $f_4\% = 20$ και $f_2 = 0{,}1$ ή $f_2\% = 10$

Γ2. Έχουμε:

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{5} x_i^2 \nu_i - \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \nu_i}{\nu}\right\} = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 f_i - \overline{x}^2 = 6,6 \Leftrightarrow s = \sqrt{6,6} \cong 2,57$$

Έχουμε $C.V = \frac{s}{\overline{x}} = \frac{2,57}{14} > \frac{1}{10}$, άρα το δείγμα των παρατηρήσεων **δεν** είναι ομοιογενές.

Γ3. Έχουμε:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \nu_i}{\nu} \Leftrightarrow 14 = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i + x_5 \nu_5}{\nu} \Leftrightarrow 14 = \frac{1780 + 17 \cdot 0,3\nu}{\nu} \Leftrightarrow 14\nu = 1780 + 5,1\nu \Leftrightarrow 8,9\nu = 1780 \Leftrightarrow \nu = 200$$

Γ4. Αν θέσουμε $y_i = a_i - \overline{a}, i = 1, 2, 3, 4$ και $\beta_i = \frac{y_i}{s_a}, i = 1, 2, 3, 4$, τότε από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου (εφαρμογή 3 στη σελίδα 99) έχουμε ότι:

$\overline{y} = \overline{a} - \overline{a} = 0$, οπότε και $\overline{\beta} = \frac{1}{s_a} \cdot \overline{y} \Leftrightarrow \overline{\beta} = 0$ και ακόμα:

$$s_\beta = \left|\frac{1}{s_a}\right| \cdot s_y \Leftrightarrow s_\beta = \left|\frac{1}{s_a}\right| \cdot s_a \Leftrightarrow s_\beta = \frac{1}{s_a} \cdot s_a \Leftrightarrow s_\beta = 1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το ζητούμενο εμβαδόν ως συνάρτηση του x είναι $E(x) = (AB) \cdot (A\Delta)$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ και αφού $\text{ΑΓ} = 2\rho$ έχουμε ότι:

$$\text{ΑΔ}^2 = \text{ΑΓ}^2 - \text{ΔΓ}^2 \Leftrightarrow \text{ΑΔ}^2 = (2\rho)^2 - \text{ΑΒ}^2 \Leftrightarrow \text{ΑΔ}^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow \text{ΑΔ} = \sqrt{100 - x^2}$$

Επομένως το εμβαδό του εγγεγραμένου στο κύκλο ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι:

$$f(x) = E(x) = (AB) \cdot (A\Delta) = x \cdot \sqrt{100 - x^2},\ 0 < x < 10$$

Δ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,\ 10)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $f'(x) = \sqrt{100 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}, x \in (0,\ 10)$.

Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2}$$

Από το πρόσημο της $f'(x)$ (μπορούμε να κάνουμε πίνακα προσήμου) έχουμε ότι:

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,\ 5\sqrt{2}\right)$ και

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[5\sqrt{2},\ 10\right)$

Άρα η συνάρτηση f εχει μέγιστο στο $x_0 = 5\sqrt{2}$.

Για την τιμή αυτή έχουμε:

$$AB = x_0 = 5\sqrt{2}$$

$$A\Delta^2 = 100 - AB^2 \Leftrightarrow A\Delta^2 = 100 - \left(5\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow A\Delta^2 = 50 \Leftrightarrow A\Delta = 5\sqrt{2}$$

Επομένως ΑΒ=ΑΔ και άρα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

Δ3. Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98\cdot x} = \frac{1}{98}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-\sqrt{99}}{h} = \frac{1}{98}f'(1) = \frac{1}{98}\cdot\frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{1}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99}$$

Δ4. Ισχύει: $A - B \subseteq A \Rightarrow P(A-B) \le P(A)$ και επειδή $P(A), P(A-B) \in (0,1]$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1] \subset \left[0,\ 5\sqrt{2}\right)$ έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$f\left(P(A-B)\right) \le f\left(P(A)\right) \Leftrightarrow P(A-B)\sqrt{100-\left(P(A-B)\right)^2} \le P(A)\sqrt{100-\left(P(A)\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(A-B)}{\sqrt{100-\left(P(A)\right)^2}} \le \frac{P(A)}{\sqrt{100-\left(P(A-B)\right)^2}}$$

Όμως:

$$0 < \frac{P(A-B)}{\sqrt{100-(P(A))^2}} < \frac{1}{\sqrt{100-1}} = \frac{1}{\sqrt{99}} < 1$$

$$0 < \frac{P(A)}{\sqrt{100-\left(P(A-B)\right)^2}} < \frac{1}{\sqrt{100-1}} = \frac{1}{\sqrt{99}} < 1$$

και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1] \subset \left[0,\ 5\sqrt{2}\right)$ έχουμε:

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-(P(A))^2}}\right) \le f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100-\left(P(A-B)\right)^2}}\right)$$

Επιμέλεια λύσεων: Καραγιάννης Β. Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών