

**ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**  
**ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**  
**ΣΤΑ**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**  
**ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**  
**ΤΕΤΑΡΤΗ, 20 ΜΑΙΟΥ 2015**

---

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Θεωρία , απόδειξη στη σελίδα 31 του σχολικού βιβλίου.

**A2.** Θεωρία, ορισμός στη σελίδα 22 του σχολικού βιβλίου.

**A3.** Θεωρία, ορισμός στη σελίδα 87 του σχολικού βιβλίου.

**A4.**

**α.** Λάθος.

**β.** Σωστό.

**γ.** Λάθος.

**δ.** Λάθος.

**ε.** Σωστό.

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.** Η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 3x + 4$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  (ως πολυωνυμική) με  $f'(x) = 3x^2 - 3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 = 1 \text{ και } x_2 = -1)$$

Ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης  $f$  είναι ο επόμενος:

Άρα η συνάρτηση  $f$  είναι:

	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$	↗	↘	↗	

- Γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, -1]$
- Γνησίως φθίνουσα στο  $[-1, 1]$
- Γνησίως αύξουσα στο  $(1, +\infty)$

Επομένως η συνάρτηση  $f$  έχει

- τοπικό μέγιστο στο  $x_2 = -1$ , το  $f(-1) = 6$  και
- τοπικό ελάχιστο στο  $x_1 = 1$ , το  $f(1) = 2$ .

**B2.** Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 3(x+1) = 3 \cdot 2 = 6$$

**B3.** Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(2, f(2))$ , δηλαδή στο  $A(2, 6)$  είναι της μορφής  $y = ax + \beta$  με  $a = f'(2) = 9$ . Ακόμα επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο  $A(2, 6)$ , πρέπει  $6 = 18 + \beta \Leftrightarrow \beta = -12$ .

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι  $y = 9x - 12$ .

## ΘΕΜΑ Γ

### Γ1.

Κλάσεις	Κέντρα κλάσεων $x_i$	$f_i$ %	$f_i$
[8,10)	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>0,1</b>
[10,12)	<b>11</b>	<b>10</b>	$f_2$
[12,14)	<b>13</b>	<b>30</b>	<b>0,3</b>
[14,16)	<b>15</b>	<b>20</b>	$f_4$
[16,18)	<b>17</b>	<b>30</b>	<b>0,3</b>

Στην πρώτη κλάση [8,10) ανήκουν όλες οι παρατηρήσεις του δείγματος που έχουν τιμές μικρότερες του 10, επομένως  $f_1 = 10\%$ .

Στην τελευταία κλάση [16,18) ανήκουν όλες οι παρατηρήσεις του δείγματος που έχουν τιμές μεγαλύτερες ή ίσες του 16, επομένως  $f_5 = 30\%$ .

Για την 3<sup>η</sup> κλάση είναι:

$$a_3 = 360^0 \cdot f_3 \Leftrightarrow f_3 = \frac{a_3}{360} \Leftrightarrow f_3 = \frac{108}{360} \Leftrightarrow f_3 = \frac{3}{10} \Leftrightarrow f_3 = 30\% , \text{ όπου } a_3 \text{ το τόξο που κυκλικού}$$

διαγράμματος που αντιστοιχεί στην κλάση αυτή.

Για τη μέση τιμή του δείγματος έχουμε:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^5 x_i f_i \Leftrightarrow \bar{x} = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 + x_5 f_5 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Leftrightarrow 11f_2 + 15f_4 = 4,1 \quad (1)$$

Ακόμα είναι:

$$\sum_{i=1}^5 f_i = 1 \Leftrightarrow 0,7 + f_2 + f_4 = 1 \Leftrightarrow f_2 + f_4 = 0,3 \quad (2)$$

Οι σχέσεις (1) και (2) αποτελούν σύστημα δύο εξισώσεων με 2 αγνώστους:

Από τη σχέση (2) έχουμε  $f_2 = 0,3 - f_4$  και η σχέση (1) γίνεται:

$$11(0,3 - f_4) + 15f_4 = 4,1 \Leftrightarrow f_4 = 0,2$$

Επομένως  $f_4 \% = 20$  και  $f_2 = 0,1$  ή  $f_2 \% = 10$

**Γ2.** Έχουμε:

$$s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^5 x_i^2 v_i - \frac{\sum_{i=1}^5 x_i v_i}{v} \right\} = \sum_{i=1}^5 x_i^2 f_i - \bar{x}^2 = 6,6 \Leftrightarrow s = \sqrt{6,6} \cong 2,57$$

**Γ3.** Έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i v_i}{v} \Leftrightarrow 14 = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i + x_5 v_5}{v} \Leftrightarrow 14 = \frac{1780 + 17 \cdot 0,3v}{v} \Leftrightarrow 14v = 1780 + 5,1v \Leftrightarrow 8,9v = 1780 \Leftrightarrow v = 200$$

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Το ζητούμενο εμβαδόν ως συνάρτηση του  $x$  είναι  $E(x) = (AB) \cdot (A\Delta)$ . Από το ορθογώνιο τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$  και αφού  $A\Gamma = 2\rho$  έχουμε ότι:

$$A\Delta^2 = A\Gamma^2 - \Delta\Gamma^2 \Leftrightarrow A\Delta^2 = (2\rho)^2 - AB^2 \Leftrightarrow A\Delta^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow A\Delta = \sqrt{100 - x^2}$$

Επομένως το εμβαδό του εγγεγραμμένου στο κύκλο ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$  είναι:

$$f(x) = E(x) = (AB) \cdot (A\Delta) = x \cdot \sqrt{100 - x^2}, \quad 0 < x < 10$$

**Δ2.** Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(0, 10)$  (ως πράξεις παραγωγίσιμων

συναρτήσεων) με  $f'(x) = \sqrt{100 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}, x \in (0, 10)$ .

Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2}$$

Από το πρόσημο της  $f'(x)$  (μπορούμε να κάνουμε πίνακα προσήμου) έχουμε ότι:

Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[0, 5\sqrt{2})$  και

Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[5\sqrt{2}, 10)$

Άρα η συνάρτηση  $f$  έχει μέγιστο στο  $x_0 = 5\sqrt{2}$ .

Για την τιμή αυτή έχουμε:

$$AB = x_0 = 5\sqrt{2}$$

$$A\Delta^2 = 100 - AB^2 \Leftrightarrow A\Delta^2 = 100 - (5\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow A\Delta^2 = 50 \Leftrightarrow A\Delta = 5\sqrt{2}$$

Επομένως  $AB = A\Delta$  και άρα το  $AB\Gamma\Delta$  είναι τετράγωνο.

**Δ3.** Για να εφάπτεται η ευθεία  $y = \kappa x + \lambda$  της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(6, f(6))$  πρέπει:

$$\kappa = f'(6) = \frac{100 - 72}{\sqrt{100 - 36}} \Leftrightarrow \kappa = \frac{28}{8} \Leftrightarrow \kappa = \frac{7}{2}$$

Άρα η ευθεία γίνεται  $y = \frac{7}{2}x + \lambda$  (1)

Επειδή το σημείο  $A(6, f(6))$ , δηλαδή το  $A(6, 48)$ , ανήκει στην (1) έχουμε:

$$48 = \frac{7}{2} \cdot 6 + \lambda \Leftrightarrow 48 = 21 + \lambda \Leftrightarrow \lambda = 27$$

Επομένως  $\kappa = \frac{7}{2}$  και  $\lambda = 27$ .

**Δ4.** Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98 \cdot x} = \frac{1}{98} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - \sqrt{99}}{h} = \frac{1}{98} f'(1) = \frac{1}{98} \cdot \frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{1}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99}$$