ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΣΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΤΕΤΑΡΤΗ, 20 ΜΑΙΟΥ 2015

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία , απόδειξη στη σελίδα 31 του σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία, ορισμός στη σελίδα 22 του σχολικού βιβλίου.

Α3. Θεωρία, ορισμός στη σελίδα 87 του σχολικού βιβλίου.

Α4.

α. Λάθος.

β. Σωστό.

γ. Λάθος.

δ. Λάθος.

ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x+4$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με $f'(x)=3x^2-3,\ x\in\mathbb{R}$. Έχουμε:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \left(x_1=1 \text{ και } x_2=-1\right)$$

Ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης f είναι ο επόμενος:

Άρα η συνάρτηση f είναι:

x	$-\infty$ … -1	-1 … 1	1 … $+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↗

- Γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\ -1]$
- Γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$
- Γνησίως αύξουσα στο $(1,\ +\infty)$

Επομένως η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο (και ολικό) στο $x_2=-1$ και τοπικό ελάχιστο (και ολικό) στο $x_1=1$.

Β2. Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{3x^2-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}3(x+1)=3\cdot2=6$$

Β3. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(2, f(2))$, δηλαδή στο $A(2, 6)$ είναι της μορφής $y=ax+\beta$ με $\alpha=f'(2)=9$. Ακόμα επειδή η γραφική παράσταση της διέρχεται από το σημείο $A(2, 6)$, πρέπει $6=18+\beta \Leftrightarrow \beta=-12$.

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι $y=9x-12$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Κλάσεις	Κέντρα κλάσεων x_i	$f_i\%$	f_i
[8,10)	**9**	**10**	**0,1**
[10,12)	**11**	**10**	f_2
[12,14)	**13**	**30**	**0,3**
[14,16)	**15**	**20**	f_4
[16,18)	**17**	**30**	**0,3**

Στην πρώτη κλάση [8,10) ανήκουν όλες οι παρατηρήσεις του δείγματος που έχουν τιμές μικρότερες του 10, επομένως $f_1=10\%$.

Στην τελευταία κλάση [16,18) ανήκουν όλες οι παρατηρήσεις του δείγματος που έχουν τιμές μεγαλύτερες ή ίσες του 16, επομένως $f_5=30\%$.

Για την 3η κλάση είναι:

$a_3 = 360^0 \cdot f_3 \Leftrightarrow f_3 = \dfrac{a_3}{360} \Leftrightarrow f_3 = \dfrac{108}{360} \Leftrightarrow f_3 = \dfrac{3}{10} \Leftrightarrow f_3 = 30\%$, όπου a_3 το τόξο που κυκλικού διαγράμματος που αντιστοιχεί στην κλάση αυτή.

Για τη μέση τιμή του δείγματος έχουμε:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i f_i \Leftrightarrow \bar{x} = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 + x_5 f_5 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Leftrightarrow 11 f_2 + 15 f_4 = 4{,}1 \ (1)$$

Ακόμα είναι:

$$\sum_{i=1}^{5} f_i = 1 \Leftrightarrow 0{,}7 + f_2 + f_4 = 1 \Leftrightarrow f_2 + f_4 = 0{,}3 \ (2)$$

Οι σχέσεις (1) και (2) αποτελούν σύστημα δύο εξισώσεων με 2 αγνώστους:

Από τη σχέση (2) έχουμε $f_2 = 0{,}3 - f_4$ και η σχέση (1) γίνεται:

$$11(0{,}3 - f_4) + 15 f_4 = 4{,}1 \Leftrightarrow f_4 = 0{,}2$$

Επομένως $f_4\% = 20$ και $f_2 = 0{,}1$ ή $f_2\% = 10$

Γ2. Έχουμε:

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{5} x_i^{\,2}\nu_i - \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i\nu_i}{\nu}\right\} = \sum_{i=1}^{5} x_i^{\,2} f_i - \bar{x}^2 = 6{,}6 \Leftrightarrow s = \sqrt{6{,}6} \cong 2{,}57$$

Γ3. Έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i\nu_i}{\nu} \Leftrightarrow 14 = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i\nu_i + x_5\nu_5}{\nu} \Leftrightarrow 14 = \frac{1780 + 17 \cdot 0{,}3\nu}{\nu} \Leftrightarrow 14\nu = 1780 + 5{,}1\nu \Leftrightarrow 8{,}9\nu = 1780 \Leftrightarrow \nu = 200$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το ζητούμενο εμβαδόν ως συνάρτηση του x είναι $E(x) = (AB)\cdot(A\Delta)$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{A\Delta\Gamma}$ και αφού $\mathrm{A\Gamma} = 2\rho$ έχουμε ότι:

$$\mathrm{A\Delta}^2 = \mathrm{A\Gamma}^2 - \mathrm{\Delta\Gamma}^2 \Leftrightarrow \mathrm{A\Delta}^2 = (2\rho)^2 - \mathrm{AB}^2 \Leftrightarrow \mathrm{A\Delta}^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow \mathrm{A\Delta} = \sqrt{100 - x^2}$$

Επομένως το εμβαδό του εγγεγραμένου στο κύκλο ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι:

$$f(x) = E(x) = (AB)\cdot(A\Delta) = x \cdot \sqrt{100 - x^2},\ 0 < x < 10$$

Δ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,\ 10)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $f'(x) = \sqrt{100 - x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \dfrac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}, x \in (0,\ 10)$.

Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2}$$

Από το πρόσημο της $f'(x)$ (μπορούμε να κάνουμε πίνακα προσήμου) έχουμε ότι:

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,\ 5\sqrt{2}\right)$ και

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[5\sqrt{2},\ 10\right)$

Άρα η συνάρτηση f εχει μέγιστο στο $x_0 = 5\sqrt{2}$.

Για την τιμή αυτή έχουμε:

$$AB = x_0 = 5\sqrt{2}$$

$$A\Delta^2 = 100 - AB^2 \Leftrightarrow A\Delta^2 = 100 - \left(5\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow A\Delta^2 = 50 \Leftrightarrow A\Delta = 5\sqrt{2}$$

Επομένως ΑΒ=ΑΔ και άρα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

Δ3. Η ξίσωση της εφαπτομένης είναι της μορφής $y = \kappa x + \lambda$, με

$$\kappa = f'(6) = \frac{100-72}{\sqrt{100-36}} \Leftrightarrow \kappa = \frac{28}{8} \Leftrightarrow \kappa = \frac{7}{2}$$

Άρα η εξίσωση γίνεται $y = \frac{7}{2}x + \lambda$

Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A\left(6,\ f(6)\right)$, δηλαδή το $A\left(6,\ 48\right)$, αφού $f(6) = 48$, θα είναι $48 = \frac{7}{2}\cdot 6 + \lambda \Leftrightarrow \lambda = 27$. Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι η $y = \frac{7}{2}x + 27$.

Δ4. Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\left(1+x\right)-\sqrt{99}}{98\cdot x} = \frac{1}{98}\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+h\right)-\sqrt{99}}{h} = \frac{1}{98}f'(1) = \frac{1}{98}\cdot\frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{1}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99}$$