ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2014-2015

ΤΑΞΗ: Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α.

α. Σωστό.

β. Σωστό.

γ. Λάθος.

δ. Λάθος

ε. Σωστό.

Β. Ας θεωρήσουμε τώρα δύο διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,\ y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,\ y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντιστοίχως. Τότε έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$\vec{\alpha}//\vec{\beta}\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0\Leftrightarrow x_1y_2=x_2y_1\Leftrightarrow\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2 .$$

Επομένως, η συνθήκη παραλληλίας για δύο διανύσματα και $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 διατυπώνεται ως εξής:

$$\boxed{\vec{\alpha}//\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2}$$

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Α. Για να ορίζουν τα σημεία $A(\kappa,\ \kappa+1)$, $B(1,\ \kappa)$, $\Gamma(0,\ \kappa+2)$, $\kappa\in\mathbb{R}$ τρίγωνο πρέπει να μην είναι συνευθειακά. Επομένως τα διανύσματα $\vec{\mathrm{AB}},\ \vec{\mathrm{A\Gamma}}$ δεν πρέπει να είναι συγγραμμικά. Άρα πρέπει να ισχύει:

$$\det\left(\vec{\mathrm{AB}},\vec{\mathrm{A\Gamma}}\right)\neq 0$$

Έχουμε $\vec{AB}=(1-\kappa,\ -1)$ και $\vec{A\Gamma}=(-\kappa,\ 1)$. Έτσι έχουμε διαδοχικά:

$$\det\left(\vec{AB},\vec{A\Gamma}\right)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\kappa & -1 \\ -\kappa & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 1-\kappa-\kappa\neq 0 \Leftrightarrow \kappa\neq\frac{1}{2}$$

Β.

α. Για $\kappa=1$ τα μη συνευθειακά σημεία είναι $A(1,\ 2)$, $B(1,\ 1)$, $\Gamma(0,\ 3)$.

Οι συντεταγμένες του μέσου Μ της ΒΓ είναι $M\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$. Άρα το μήκος της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$(AM)=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+(2-2)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

β. Έχουμε:

$$\vec{AB}=(0,\ -1)$$
$$2\vec{B\Gamma}-\vec{\Gamma A}=2(-1,\ 2)-(1,\ -1)=(-3,\ 5)$$

Επομένως το ζητούμενο εσωτερικό γινόμενο είναι:

$$\vec{AB}\cdot(2\vec{B\Gamma}-\vec{\Gamma A})=0\cdot(-3)+(-1)\cdot 5=-5$$

ΘΕΜΑ 3^{o}

Α. Για να είναι οι ευθείες $\varepsilon_1:\ (\kappa+2)x-3y-24\kappa=0$ και $\varepsilon_2: 4x-3y+2=0,\ \kappa\in\mathbb{R}$ παράλληλες πρέπει:

$$\frac{\kappa+2}{3}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow \kappa+2=4\Leftrightarrow \kappa=2$$

Β.

α. Έχουμε:

$$\delta\perp\varepsilon_2\Leftrightarrow \lambda_\delta\cdot\lambda_{\varepsilon_2}=-1\Leftrightarrow \lambda_\delta\cdot\frac{4}{3}=-1\Leftrightarrow \lambda_\delta=-\frac{3}{4}$$

Επομένως η εξίσωση της ευθείας δ που είναι κάθετη στην ε_2 και διέρχεται από το σημείο $A(1,\ 2)$ είναι:

$$y-2=-\frac{3}{4}(x-1)\Leftrightarrow y=-\frac{3}{4}x+\frac{11}{4}\Leftrightarrow 3x+4y-11=0$$

Οι συντεταγμένες του σημείου τομής της ευθείας δ με την ευθεία ε_1 είναι η λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} 3x+4y-11=0 \\ 4x-3y-48=0 \end{cases}$$

Η οποία είναι $(x,\ y)=(9,\ -4)$. Άρα το ζγτούμενο σημείο είναι $B(9,\ -4)$.

β. Η απόσταση των ευθειών $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ είναι το μήκος του κάθετου τμήματος ΑΒ στις ευθείες ε_1 και ε_2. Επομένως:

$$(AB)=\sqrt{(9-1)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{64+36}=10$$

γ. Ο κύκλος ο οποίος εφάπτεται στις ευθείες $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ στα σημεία Β, Α έχει διάμετρο ΑΒ. Επομένως έχει κέντρο Κ το μέσο του ΑΒ και ακτίνα το ίση μισό του μήκους του ΑΒ.
Άρα έχουμε:

$$K\left(\frac{9+1}{2},\frac{-4+2}{2}\right) \text{ ή } K(5,\ -1) \text{ και } \rho=\frac{10}{2}=5$$

Άρα η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου είναι:

$$(x-5)^2+(y+1)^2=25$$

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Για την υπερβολή $C_1: 16x^2-9y^2=144$ έχουμε:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1, \text{ με } a=3 \text{ και } \beta=4\text{, οπότε } \gamma^2=\alpha^2+\beta^2 \Leftrightarrow \gamma^2=16+9 \Leftrightarrow \gamma=5$$

Επομένως οι εστίες της υπερβολής C_1 είναι $\mathrm{E}(5,\ 0)$ και $\mathrm{E}'(-5,\ 0)$.

Οι ασύπτωστες της υπερβολής C_1 είναι $y=\frac{4}{3}x$ και $y=-\frac{4}{3}x$.

Β. Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$x^2+y^2-6x-2y+9=0 \Leftrightarrow (x^2-6x+9)+(y^2-2y+1)=1 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=1$$

Η τελευταία εξίσωση είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο $\Lambda(3,\ 1)$ και ακτίνα $\rho=1$.

Γ. Η ασύμπτωτη της υπερβολής που σχηματίζει οξεία γωνία με τον $x'x$ είναι η $y=\frac{4}{3}x$.

Η σχετική θέση του κύκλου C_2 και της ασύμπτωτης της υπερβολής $y=\frac{4}{3}x$ προσδιορίζεται από τη λύση του επόμενου συστήματος:

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-1)^2=1 \\ y=\frac{4}{3}x \end{cases}$$

Από το σύστημα παίρνουμε (με αντικατάσταση):

$$25x^2-78x+81=0, \text{ με } \Delta=-2036<0$$

Επομένως ο κύκλος C_2 και η ασύμπτωτη $y=\frac{4}{3}x$ της υπερβολής C_1 δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Δ. Αφού οι ζητούμενες εφαπτομένες του κύκλου που διέρχονται από την αρχή των αξόνων θα είναι της μορφής $y=\lambda x,\ \lambda\in\mathbb{R}$. Τότε το μη γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-1)^2=1\\ y=\lambda x\end{cases}$$

πρέπει να έχει μόνο μία λύση (τις συντεταγμένες του σημείου επαφής). Με αντικατάσταση της $2^{ης}$ σχέσης στην εξίσωση του κύκλου έχουμε:

$$(x-3)^2+(\lambda x-1)^2=1 \Leftrightarrow (\lambda^2+1)x^2-2(\lambda+3)x+9=0$$

Έτσι για την τελευταία εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού, ως προς x, πρέπει να ισχύει:

$$\Delta=0 \Leftrightarrow -32\lambda^2+24\lambda=0 \Leftrightarrow \left(\lambda=0 \text{ ή } \lambda=\frac{3}{4}\right)$$

Επομένως:

- Για $\lambda=0$ έχουμε την εφαπτομένη στον κύκλο C_2 $y=0$, δηλαδή το άξονα $x'x$, ενώ
- Για $\lambda=\frac{3}{4}$ έχουμε εφαπτομένη στον κύκλο C_2 , την $y=\frac{3}{4}x$.

Επιμέλεα λύσεων: Κατραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών