

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2014-2015
ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

A.

α. Σωστό .

β. Λάθος .

γ. Σωστό .

δ. Λάθος .

ε. Σωστό.

B. Απόδειξη:

Έστω ότι το $x - \rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$. Τότε:

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x)$$

Από την ισότητα αυτή για $x = \rho$ παίρνουμε:

$$P(\rho) = (\rho - \rho)\pi(\rho) = 0$$

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu(\beta x)$ με $\alpha, \beta > 0$ έχει ελάχιστο το $-\alpha$ και περίοδο $T = \frac{2\pi}{\beta}$.

$$\text{Επομένως } -\alpha = -4 \Leftrightarrow \alpha = 4 \text{ και } \frac{2\pi}{\beta} = \pi \Leftrightarrow \beta\pi = 2\pi \Leftrightarrow \beta = 2$$

B. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
 f(x) - 2\sqrt{3} = 0 &\Leftrightarrow \alpha \cdot \eta\mu(\beta x) - 2\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 4\eta\mu(2x) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \eta\mu(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \eta\mu(2x) = \eta\mu\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left(2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ ή } 2x = 2k\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \text{ με } k \in \mathbb{Z} \right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left(x = k\pi + \frac{\pi}{8} \text{ ή } x = k\pi + \frac{3\pi}{8} \text{ με } k \in \mathbb{Z} \right)
 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Αφού το πολυώνυμο $P(x) = (\alpha^2 - 1)x^4 + (\alpha + 1)x^3 + x^2 + (4\beta - 1)x + 6$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι 3^{ου} βαθμού έχουμε:

$$\alpha^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ ή } \alpha = -1 \text{ και } \alpha + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -1$$

Επομένως $\alpha = 1$.

Ακόμα, επειδή το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - 1$ είναι -4 , έχουμε:

$$\begin{aligned}
 P(1) = -4 &\Leftrightarrow (\alpha^2 - 1) + (\alpha + 1) + 1 + (4\beta - 1) + 6 = -4 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha + 4\beta + 6 = -4 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha + 4\beta + 10 = 0
 \end{aligned}$$

Για $\alpha = 1$ έχουμε:

$$2 + 4\beta + 10 = 0 \Leftrightarrow 4\beta = -12 \Leftrightarrow \beta = -3$$

B. Για $\alpha = 1$ και $\beta = -3$ το πολυώνυμο γίνεται $P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$ και η προς λύση ανίσωση είναι:

$$2x^3 + x^2 - 13x + 6 < 0$$

Επειδή $P(2) = 0$, το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 2$ και η διάρεση του $P(x)$ με το $x - 2$ (ας πούμε με βάση το σχήμα Horner) δίνει:

$$P(x) = (x - 2)(2x^2 + 5x - 3) < 0$$

Στον επόμενο πίνακα φαίνεται το πρόσημο των παραγόντων και του πολυωνύμου $P(x)$

	$-\infty$	-3	$\frac{1}{2}$	2	∞
x					
$x - 2$		-	-	-	+
$2x^2 + 5x - 3$		+	-	+	+
$P(x)$		-	+	-	+

Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης $P(x) < 0$ είναι όλα τα $x \in (-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

ΘΕΜΑ 4°

A. Για τη συνάρτηση $f(x) = \log(5 \cdot 4^x - 2 \cdot 25^x)$ πρέπει να ισχύει:

$$5 \cdot 4^x - 2 \cdot 25^x > 0 \Leftrightarrow 5 \cdot 2^{2x} > 2 \cdot 5^{2x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{2x} > \frac{2}{5} \Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \text{ (αφού η}$$

$$\text{συνάρτηση } h(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R} \text{)}.$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = (-\infty, \frac{1}{2})$.

Για τη συνάρτηση $g(x) = -2 \cdot 5^{2x} + 25 \cdot 2^{x-1} - 5$ το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} .

B. Για κάθε $x < \frac{1}{2}$ έχουμε διαδοχικά:

$$10^{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow 10^{\log(5 \cdot 4^x - 2 \cdot 25^x)} = g(x) \Leftrightarrow 5 \cdot 4^x - 2 \cdot 25^x = -2 \cdot 5^{2x} + 25 \cdot 2^{x-1} - 5 \Leftrightarrow$$

$$5 \cdot 4^x = 25 \cdot 2^{x-1} - 5 \Leftrightarrow 5 \cdot (2^x)^2 - 25 \cdot \frac{2^x}{2} + 5 = 0 \Leftrightarrow 10 \cdot (2^x)^2 - 25 \cdot 2^x + 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$$

Στην τελευταία εξίσωση θέτουμε $2^x = \omega > 0$ και έχουμε την εξίσωση $2\omega^2 - 5\omega + 2 = 0$, η

οποία έχει ρίζες τις $\omega_1 = 2$ και $\omega_2 = \frac{1}{2}$. Οπότε είναι:

$$\omega_1 = 2 \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -1$$

Όμως η τιμή $x = 1$ απορρίπτεται, αφού $1 \notin A$ ενώ η τιμή $x = -1$ είναι δεκτή, αφού $-1 \in A$.

Γ. Έχουμε:

$$f(-1) = \log \frac{117}{100}$$

$$f(0) = \log 3$$

$$g(1) = -30$$

Επομένως η παράσταση K γίνεται:

$$\begin{aligned} K &= f(-1) - f(0) - \log|g(1)| - \log 13 = \log \frac{117}{100} - \log 3 - \log 30 - \log 13 = \log \frac{117}{100} - \log 90 - \log 13 = \\ &= \log \frac{117}{100} - \log(90 \cdot 13) = \log \frac{117}{90 \cdot 13} = \log \frac{117}{100 \cdot 90 \cdot 13} = \log \frac{9 \cdot 13}{100 \cdot 90 \cdot 13} = \log \frac{1}{1000} = -3 \end{aligned}$$

Επομένως $K=3$.

Επιμέλεια λύσεων: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών