ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΣΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ, 25 ΜΑΙΟΥ 2015

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία απόδειξη θεωρήματος στη σελίδα 194 του σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία, ορισμός στη σελίδα 188 του σχολικού βιβλίου.

Α3. Θεωρία, ορισμός στη σελίδα 259 του σχολικού βιβλίου.

Α4.

α. Λάθος.

β. Σωστό.

γ. Λάθος.

δ. Σωστό.

ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε διαδοχικά:

$$|z-4|=2|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2=4|z-1|^2 \Leftrightarrow (z-4)(\overline{z}-4)=4(z-1)(\overline{z}-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z}-4z-4\overline{z}+16=4z\overline{z}-4z-4\overline{z}+4 \Leftrightarrow 3z\overline{z}=12 \Leftrightarrow z\overline{z}=4 \Leftrightarrow |z|^2=4 \Leftrightarrow |z|=2$$

Β2. α. Αφού οι μιγαδικοί z_1, z_2 ικανοποιούν το ερώτημα Β1 θα είναι:

$$|z_1|=2 \Leftrightarrow z_1\overline{z}_1=2 \Leftrightarrow \overline{z}_1=\frac{2}{z_1}$$

$$|z_2|=2 \Leftrightarrow z_2\overline{z}_2=2 \Leftrightarrow \overline{z}_2=\frac{2}{z_2}$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\overline{w} = \frac{2\overline{z}_1}{\overline{z}_2} + \frac{2\overline{z}_2}{\overline{z}_1} = \frac{2\dfrac{2}{z_1}}{\dfrac{2}{z_2}} = \frac{4z_2}{2z_1} + \frac{4z_1}{2z_1} = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = w$$

Άρα $\overline{w} = w$ και επομένως ο w είναι πραγματικός αριθμός.

β. Έχουμε διαδοχικά:

$$|w| = \left|\frac{2\left(z_1^{\ 2} + z_2^{\ 2}\right)}{z_1 z_2}\right| = 2\left|\frac{z_1^{\ 2} + z_2^{\ 2}}{z_1 z_2}\right| = 2\frac{\left|z_1^{\ 2} + z_2^{\ 2}\right|}{|z_1 z_2|} = \frac{2}{4}\left|z_1^{\ 2} + z_2^{\ 2}\right| \le \frac{1}{2}\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) \le \frac{1}{2}(4+4) = 4$$

Επομένως:

$$|w| \le 4 \Leftrightarrow -4 \le w \le 4$$

Β3. Για τη σχέση των z_1, z_2 έχουμε:

$$w = -4 \Leftrightarrow \frac{2\left(z_1^{\ 2} + z_2^{\ 2}\right)}{z_1 z_2} = -4 \Leftrightarrow \frac{z_1^{\ 2} + z_2^{\ 2}}{z_1 z_2} = -2 \Leftrightarrow z_1^{\ 2} + z_2^{\ 2} = -2z_1 z_2 \Leftrightarrow \left(z_1 + z_2\right)^2 = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -z_2$$

Για το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$(\mathrm{A\Gamma}) = |z_1 - z_3| = |z_1 - 2iz_1| = |z_1(1-2i)| = |z_1||1-2i| = 2\sqrt{5}$$
$$(\mathrm{B\Gamma}) = |z_2 - z_3| = |-z_1 - 2iz_1| = |-z_1(1+2i)| = |z_1||1-2i| = 2\sqrt{5}$$

Επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, αφού (ΑΓ)=(ΒΓ).

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}, x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x) = \frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x}{x^2+1} = -\frac{x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}, x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$x > 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$$
$$x < 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$$

Ο πίνακας προσήμου της f' είναι:

x	$-\infty$	0 $+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Άρα η συνάρτηση f είναι:

Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$

Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$

Έχει ολικό μέγιστο στο $x_0=0$, το $f(0)=1$

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\le f(0)\Leftrightarrow f(x)\le 1$ και άρα το σύνολο τομών της συνάρτησης f είναι το διάστημα $(-\infty,1]$.

Γ2. Έχουμε:

Για $x>0\Leftrightarrow f(x)<f(0)\Leftrightarrow f(x)<1$(αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x>0$)

Για $x<0\Leftrightarrow f(x)<f(x)<f(0)\Leftrightarrow f(x)<1$(αφού η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x<0$)

Άρα

- $0<f(x)<1\Leftrightarrow f(0)>f(f(x))>f(1)\Leftrightarrow 1>f(f(x))>\frac{\sqrt{2}}{2}$(αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$)
- $f(x)<0\Leftrightarrow f(f(x)>f(0)\Leftrightarrow f(f(x)>1>\frac{\sqrt{2}}{2}$ (αφού η f είναι γνησίως άυξουσα στο $(-\infty,0)$)
- Για $x=0$ έχουμε $f(0)=1>\frac{\sqrt{2}}{2}$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f\left(f\left(x\right)\right)\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$

Γ3. Έχουμε:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}$$

Αν θέσουμε $x+1=h$ έχουμε $x\to 0\Leftrightarrow h\to 1$ και άρα :

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{f(h)-f(1)}{h-1}=f'(1)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Γ4. Η εφαπτομένης της C_f ε οποιοδόποτε σημείο της $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ είναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Επειδή πρέπει οι εφαπτομένες να διέρχονται απότο σημείο (3,0) θα έχουμε:

$$0 = f'(x_0)\left(3 - x_0\right) + f(x_o) \Leftrightarrow f'(x_0)\left(x_0 - 3\right) = f(x_0)$$

Και άρα οι ζητούμενες εφαπτομένες είναι:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f'(x_0)\left(x_0 - 3\right) \Leftrightarrow y = f'(x_0)\left(x - 3\right)$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε:

$$xf(x) + \sigma\upsilon\nu x = 1 - x^2\eta\mu\frac{1}{x} \Leftrightarrow xf(x) = 1 - x^2\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f(x) = \frac{1 - x^2\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu x}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} - \frac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{x} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} - x\eta\mu\frac{1}{x}, x \neq 0$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $x_0 = 0$. Επομένως έχουμε $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} = 0 \text{ και}$$

$\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq x\eta\mu\frac{1}{x} \leq |x|$, με $\lim\limits_{x\to 0}\left(|x|\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(-|x|\right) = 0$ και από το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right) = 0$.

Άρα : $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} - \lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right) = 0 - 0 = 0$

Δ2. Έχουμε:

$$f'(x) = \left(\frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x}\right)' - \left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)' = \frac{x\eta\mu x - 1 + \sigma\upsilon\nu x}{x^2} - \left(\eta\mu\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \frac{x\eta\mu x - 1 + \sigma\upsilon\nu x}{x^2} - \eta\mu\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}, x \neq 0$$

Δ3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-1$

Έχουμε:

$$\left|\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}\right|\le\frac{1+|\sigma\upsilon\nu x|}{|x|}\le\frac{1+1}{|x|}=\frac{2}{|x|}$$, δηλαδή $-\frac{2}{|x|}\le\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}\le\frac{2}{|x|}$ με

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{|x|}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{2}{|x|}\right)=0$ και από τοκριτήριο της παρεμβολη είναι $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$.

Ακόμα:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$$ (θέτοντας $u=\frac{1}{x}$, $x\to+\infty\Leftrightarrow u\to0$)

Άρα $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0-1=-1$

Δ4. Αφού $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-1<0$, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1>0$ «κοντά» $+\infty$ στο τέτοιο, ώστε $f(x_1)<0$. Εφαρμόζουμε το Θεώρηματου Bolzano στο διάστημα $\left[\frac{1}{\pi},x_1\right]$ και έχουμε:

- Η $f(x)$ συνεχής στο $\left[\frac{1}{\pi},x_1\right]$(ως συνεχής στο $\mathbb{R}$)
- $f(x_1)<0$ και $f(\frac{1}{\pi})=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\pi}}{\frac{1}{\pi}}-\frac{1}{\pi}\eta\mu\pi=\pi\left(1-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\pi}\right)>0$

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(\frac{1}{\pi},+\infty\right)$ τέυοι, ώστε $f(\xi)=0$.