ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑ.Λ.

(ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ, 15 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2015

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑ.Λ. (Β΄ ΟΜΑΔΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A;

Μονάδες 5

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ΄ ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 3

Α3. Έστω μια συνεχής συνάρτηση f σ΄ ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_a^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(a)$$

Μονάδες 7

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων Ο.

Μονάδες 2

β) Κάθε στοιχείο z του συνόλου $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών γράφεται κατά μοναδικό τρόπο με τη μορφή $z=a+\beta i$, όπου $a,\ \beta \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 2

γ) Η εικόνα $f\left(\Delta\right)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 2

δ) Αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο A είναι συνεχής στο A και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του A, τότε η f είναι πάντα σταθερή σε όλο το σύνολο A.

Μονάδες 2

ε) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ και $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει:

$$\int_{a}^{\beta} f(x)dx=\int_{a}^{\gamma} f(x)dx-\int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z,\ w,\ v$ με $z \neq -2015i$, $\left|w\right|=1$ και $w \neq -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ για τους οποίους ισχύει:

$$\left|\frac{z-2015i}{z+2015i}\right|=1 \ (1) \quad v=\frac{w-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{1+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)w} \ (2)$$

Να αποδείξετε ότι:

Β1. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 5

Β2. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών v στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται πάνω στον άξονα των φανταστικών αριθμών.

Μονάδες 8

Β3. Ο μιγαδικός αριθμός $u=(a-ai)^{2024}$, με $a\in\mathbb{R}$, ικανοποιεί τη σχέση (1).

Μονάδες 6

Να βρείτε:

Β4. Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z, v του μιγαδικού επιπέδου που ικανοποιούν τη σχέση $z^2+\frac{v^2}{2}=9$, όπου z, v οι μιγαδικοί αριθμοί των ερωτημάτων (Β1) και (Β2) αντίστοιχα.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln|x|}, & \text{αν } x\neq 0 \ \textit{και}\ x\neq 1 \\ \kappa, & \alpha\nu\ x=1 \\ 0, & \text{αν } x=0 \end{cases} \quad , \ g(x)=f(x)\ln\left(\frac{1}{x^2}\right),\ x>0$$

Γ1. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ καθώς και την τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Γ2. i) Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς την μονοτονία της.

Μονάδες 4

ii) Να αποδείξετε ότι:

$$e^{-x^2+1}\le\frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2(x-1)},\ \text{αν } x>1$$

και

$$e^{-x^2+1}\ge\frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2(x-1)},\ \text{αν } 0<x<1$$

Μονάδες 4

Γ3. i) Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς τα κοίλα της στο διάστημα $(0,\ +\infty)$ και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

Μονάδες 5

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στα σημεία $A(2,\ g(2))$ και $B(1,\ g(1))$ αντίστοιχα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$e^{-4}\left(7-3x\right)\le e^{-x^2}\left(x-1\right),\ \text{για κάθε } x\in\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right) \text{ και}$$

$$e^{-x^2}\ge e^{-1},\ \text{για κάθε } x\in\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2},\ 1\right)$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f\left(x\right)=\int_x^{2x}\frac{1+\sigma\upsilon\nu t}{\sqrt{t^4-t^2+4}}dt,\ x\in\mathbb{R}$ και η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση g για την οποία ισχύει:

$$\int_0^x g\left(t\right)dt\le e^{2015x}+x^5-1\ \ (1),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή .

Μονάδες 8

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(0,\ 1\right)$ τέτοιο, ώστε $f'\left(\xi\right)=0$

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι:

$$g(0)=f'(0)+2014$$

Μονάδες 4

Δ4. i) Αν για τη συνάρτηση g ισχύουν επιπλέον:

$$g\left(1008\right)=3023 \text{ και } g\left(2016\right)=4031$$

και η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,\ 2016)$ τέτοιο, ώστε $g''(x_0) = 0$

Μονάδες 4

ii) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$.

Μονάδες 3

Ο Δ Η Γ Ι Ε Σ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο**.**
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμο σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν . **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια , διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης : τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 1 ώρα μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Επιστημονική επιμέλεια: Καραγιάννης Ιωάννης

Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών