

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑ.Λ.

(ΟΜΑΔΑ Β΄)

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ**

ΤΕΤΑΡΤΗ, 15 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2015

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ  
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ  
ΚΑΙ ΕΠΑ.Λ. (Β΄ ΟΜΑΔΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6)

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση και  $A(x_0, f(x_0))$  ένα σημείο της  $C_f$ . Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της  $A$ ;

**Μονάδες 5**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 3**

**A3.** Έστω μια συνεχής συνάρτηση  $f$  σ' ένα διάστημα  $[a, \beta]$ . Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[a, \beta]$ , να αποδείξετε ότι:

$$\int_a^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(a)$$

**Μονάδες 7**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 6 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

α) Οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων  $O$ .

**Μονάδες 2**

β) Κάθε στοιχείο  $z$  του συνόλου  $\mathbb{C}$  των μιγαδικών αριθμών γράφεται κατά μοναδικό τρόπο με τη μορφή  $z = a + \beta i$ , όπου  $a, \beta \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 2**

γ) Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.

**Μονάδες 2**

δ) Αν μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα σύνολο  $A$  είναι συνεχής στο  $A$  και  $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $A$ , τότε η  $f$  είναι πάντα σταθερή σε όλο το σύνολο  $A$ .

**Μονάδες 2**

ε) Αν η  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση σε διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ , τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx - \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx$$

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z, w, v$  με  $z \neq -2015i$ ,  $|w| = 1$  και

$w \neq -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  για τους οποίους ισχύει:

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

$$\left| \frac{z-2015i}{z+2015i} \right| = 1 \quad (1) \quad v = \frac{w - \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)}{1 + \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)w} \quad (2)$$

Να αποδείξετε ότι:

**B1.** Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών  $z$  στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

**Μονάδες 5**

**B2.** Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών  $v$  στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται πάνω στον άξονα των φανταστικών αριθμών.

**Μονάδες 8**

**B3.** Ο μιγαδικός αριθμός  $u = (a - ai)^{2024}$ , με  $a \in \mathbb{R}$ , ικανοποιεί τη σχέση (1).

**Μονάδες 6**

Να βρείτε:

**B4.** Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των  $z, v$  του μιγαδικού επιπέδου που ικανοποιούν τη σχέση  $z^2 + \frac{v^2}{2} = 9$ , όπου  $z, v$  οι μιγαδικοί αριθμοί των ερωτημάτων (B1) και (B2) αντίστοιχα.

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  με:

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 6 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln|x|}, & \text{αν } x \neq 0 \text{ και } x \neq 1 \\ k, & \text{αν } x = 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = f(x) \ln\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x > 0$$

**Γ1.** Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  καθώς και την τιμή του  $k \in \mathbb{R}$ , ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

**Μονάδες 6**

**Γ2. i)** Να μελετήσετε την συνάρτηση  $g$  ως προς την μονοτονία της.

**Μονάδες 4**

**ii)** Να αποδείξετε ότι:

$$e^{-x^2+1} \leq \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}(\sqrt{3}-1)}{2(x-1)}, \quad \text{αν } x > 1$$

και

$$e^{-x^2+1} \geq \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}(\sqrt{3}-1)}{2(x-1)}, \quad \text{αν } 0 < x < 1$$

**Μονάδες 4**

**Γ3. i)** Να μελετήσετε την συνάρτηση  $g$  ως προς τα κοίλα της στο διάστημα  $(0, +\infty)$  και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

**Μονάδες 5**

**ii)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $g$  στα σημεία  $A(2, g(2))$  και  $B(1, g(1))$  αντίστοιχα

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 6 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$e^{-4}(7-3x) \leq e^{-x^2}(x-1), \text{ για κάθε } x \in \left( \frac{2+\sqrt{2}}{2}, +\infty \right) \text{ και}$$

$$e^{-x^2} \geq e^{-1}, \text{ για κάθε } x \in \left( \frac{2-\sqrt{2}}{2}, 1 \right)$$

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1+\sin t}{\sqrt{t^4-t^2+4}} dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και η συνεχής στο

$\mathbb{R}$  συνάρτηση  $g$  για την οποία ισχύει:

$$\int_0^x g(t) dt \leq e^{2015x} + x^5 - 1 \quad (1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι περιττή .

**Μονάδες 10**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι:

$$g(0) = f'(0) + 2014$$

**Μονάδες 4**

**Δ3. i)** Αν για τη συνάρτηση  $g$  ισχύουν επιπλέον:

$$g(1008) = 3023 \text{ και } g(2016) = 4031$$

και η  $g$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΑΠΟ 6 ΣΕΛΙΔΕΣ

## ΑΡΧΗ 6ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0, 2016)$  τέτοιο, ώστε  $g''(x_0) = 0$

**Μονάδες 7**

ii) Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ .

**Μονάδες 4**

### Ο Δ Η Γ Ι Ε Σ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμο σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης : τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 1 ώρα μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

Επιστημονική επιμέλεια: Καραγιάννης Ιωάννης

Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών