ΟΔΗΓΙΕΣ ΑΥΤΟΔΙΟΡΘΩΣΗΣ +ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
2015

Μερικές χρήσιμες οδηγίες:

1. Μετά την ολοκλήρωση της τρίωρης εξέτασης, σημείωστε τις βαθμολογικές μονάδες που λάβατε σύμφωνα με τις επόμενες υποδείξεις.

2. Επιμερίστε ισοδύναμα οποιδήποτε βήμα έχετε κάνει για τη λύση του κάθε υποερωτήματος κάθε θέματος.

3. Είναι χρήσιμο, αφού δείτε την πλήρη λύση οποιουδήποτε υποερωτήματος που δεν το ολοκληρώσατε, να ξαναπροσπαθήσετε να γράψετε την ορθή λύση μόνοι σας.

4. Συμπληρώστε τον επόμενο πίνακα, σύμφωνα με τις οδηγίες κατανομής μονάδων που βρίσκονται μέσα στις λύσεις:

ΘΕΜΑ Α	ΘΕΜΑ Β	ΘΕΜΑ Γ	ΘΕΜΑ Δ	Παρατηρήσεις
Α1	**Β1.**	**Γ1.**	**Δ1.**	
Α2	**Β2.**	**Γ2.**	**Δ2.**	
Α3	**Β3.**	**Γ3.**	**Δ3.**	
Α4 **α.** **β.** **γ.** **δ.** **ε.**		**Γ4.**	**Δ4.** **Δ4.1** **Δ4.2**	
ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ:	**ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ:**	**ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ:**	**ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ:**	**ΓΕΝΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, απόδειξη στη σελίδα 150 του σχολικού βιβλίου **(8 ΜΟΝΑΔΕΣ).**

Α2. Θεωρία, ορισμός στη σελίδα 87 του σχολικού βιβλίου **(4 ΜΟΝΑΔΕΣ).**

Α3. Θεωρία, ορισμός στη σελίδα 14 του σχολικού βιβλίου **(3 ΜΟΝΑΔΕΣ).**

Α4. (ΑΠΟ 2 ΜΟΝΑΔΕΣ Η ΚΑΘΕ ΣΩΣΤΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ)

α. Σωστό .

β. Σωστό .

γ. Λάθος .

δ. Σωστό .

ε. Λάθος **(** το σωστό είναι $0 < P(A) \le 1$, αφού αν $A = \Omega$ έχουμε $P(A) = 1$)

ΘΕΜΑ Β

Έστω τα ενδεχόμενα:

A: Το όχημα να είναι ανασφάλιστο .

B: Το όχημα να μην έχει περάσει ΚΤΕΟ .

Comment [D1]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

Από την περιγραφή των δεδομένων του προβλήματος προκύπτει ότι:

$$P(A) = \frac{100}{400} = \frac{1}{4}$$
$$P(B) = \frac{100}{400} = \frac{1}{4}$$
$$P(A \cap B) = \frac{80}{400} = \frac{1}{5}$$

Comment [D2]: ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΜΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ 1 ΜΟΝΑΔΑ

Β1. Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου: $A \cup B$ και άρα έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$

Comment [D3]: 3 ΜΟΝΑΔΕΣ

Β2. Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου: $(A - B) \cup (B - A)$ και άρα ,αφού τα ενδεχόμενα $(A - B)$ και $(B - A)$ είναι ασυμβίβαστα έχουμε:

Comment [D4]: 2 ΜΟΝΑΔΕΣ

$$P(A - B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P((B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$$

Comment [D5]: ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΜΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑ 2 ΜΟΝΑΔΕΣ

Β3. Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου: $(A \cup B)'$ και άρα έχουμε:

Comment [D6]: 2 ΜΟΝΑΔΕΣ

$$P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το πλάτος c των κλάσεων είναι:

$$c = \frac{R}{5} = \frac{20}{5} = 4.$$

Comment [D7]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

Αν $x_i\,(i = 1,...5)$ είναι τα κέντρα των κλάσεων θα έχουμε:

$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$

Comment [D8]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

$x_2 = x_1 + 4$

$x_3 = x_1 + 8$

$x_4 = x_1 + 12$

$x_5 = x_1 + 16$

Επειδή πρόκειται για παρατηρήσεις $x_i\ \ (i = 1,...5)$ περιττού πλήθους θα έχουμε ότι:

$$\delta = x_3 = x_1 + 8 = 68 \Leftrightarrow x_1 = 60$$

Comment [D9]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

Το κάτω άκρο της $1^{ης}$ κλάσης θα είναι $x_1 - \frac{c}{2} = 60 - 2 = 58$ και άρα οι κλάσεις είναι:

$[58, 62)$
$[62, 66)$
$[66, 70)$
$[70, 74)$
$[74, 78)$

Comment [D10]: ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΜΙΑ ΚΛΑΣΗ 0,4 ΜΟΝΑΔΕΣ

Γ2. Έχουμε:

$$F_3 = 0,6 \Leftrightarrow f_1 + f_2 + f_3 = 0,6\ (1)$$
$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1\ (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε: $f_4 + f_5 = 0,4$ (είναι οι κλάσεις που περιέχουν τουλάχιστον 70 τόνους ανακυκλώσιμων υλικών).

Comment [D11]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

Έχουμε $4 = (f_4 + f_5)\nu$, αφού το κριτήριο εμπορίας ενός υλικού (≥ 70) πληρούν τα υλικά που ανήκουν στην $4^η$ και $5^η$ κλάση. Άρα, θα είναι:

Comment [D12]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

$4 = (f_4 + f_5)\nu \Leftrightarrow 4 = 0,40\nu \Leftrightarrow \nu = 10$ υλικά ανακυκλώνει η επιχείρηση.

Comment [D13]: 2 ΜΟΝΑΔΕΣ

Γ3. Σύμφωνα με τα προηγούμενα οι δύο πρώτες στήλες συμπληρώνονται άμεσα.

Comment [D14]: ΓΙΑ ΤΙΣ ΔΥΟ ΠΡΩΤΕΣ ΣΤΗΛΕΣ: 0,5 ΜΟΝΑΔΕΣ
ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΜΙΑ ΕΠΟΜΕΝΗ: 1,5 ΜΟΝΑΔΕΣ
ΓΙΑ ΤΗΝ ΔΙΚΑΙΟΛΟΓΗΣΗ ΚΑΘΕ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ (5 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΙΣ fi:) 0,4 ΜΟΝΑΔΕΣ

Αναλύοντας τα δεδομένα θα έχουμε:

$$N_4 = \frac{4}{5}N_5 \Leftrightarrow N_4 = \frac{4}{5}\nu \Leftrightarrow \frac{N_4}{\nu} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow F_4 = 0,8 \Leftrightarrow f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0,8\ (3)$$
$$108^o = 360^o(f_1 + f_2) \Leftrightarrow f_1 + f_2 = 0,3\ (4)$$
$$\overline{x} = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 + x_5 f_5 = 68,8\ (5)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3) έχουμε $f_4 = 0,2$ και από την σχέση (2) έχουμε $f_5 = 0,2$
Από τις σχέσεις (1) και (4) έχουμε $f_3 = 0,3$
Η σχέση (5) γίνεται $60 f_1 + 64 f_2 = 18,8$ που με την (4) αποτελεί σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους τις f_1, f_2 και του οποίου η λύση είναι $\begin{matrix} f_1 = 0,10 \\ f_2 = 0,20 \end{matrix}$.
Σύμφωνα με τα παραπάνω ο πίνακας συμπληρωμένος φαίνεται ως ακολούθως (από τον τύπο $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$, $i = 1,\ 2,\ 2,\ 4,\ 5$ βρίσκουμε τα ν_i) :

Κλάσεις [,)	**Κέντρα κλάσεων x_i**	ν_i	N_i	f_i	$F_i\%$
[58, 62)	60	1	1	0,10	10
[62, 66)	64	2	3	0,20	30
[66, 70)	68	3	6	0,30	60
[70,74)	72	2	8	0,20	80
[74,78)	76	2	10	0,20	100

Γ4. Το ιστόγραμμα συχνοτήτων προκύπτει εύκολα και το πολύγωνο συχνοτήτων προκύπτει ενώνοντας με ευθύγραμμα τμήματα τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογωνίων που σχηματίζονται (λαμβάνοντας δύο ακόμη υποθετικές κλάσεις, στην αρχή και στο τέλος, με συχνότητα 0).

Comment [D15]: 4 ΜΟΝΑΔΕΣ

Comment [D16]: 3 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για τη συνάρτηση $f(x) = \ln\frac{1-x}{x}$ πρέπει:

Comment [D17]: 3 ΜΟΝΑΔΕΣ

$$\frac{1-x}{x} > 0 \text{ και } x \neq 0$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{1-x}{x} > 0 \Leftrightarrow x(1-x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το διάστημα $(0,\ 1)$.

Comment [D18]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

Για τη συνάρτηση $g(x)=e^{\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+1}$, το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

Comment [D19]: 2 ΜΟΝΑΔΕΣ

Δ2. Μονοτονία της συνάρτησης f:

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,\ 1)$ με παράγωγο:

$$f'(x)=\frac{x}{1-x}\cdot\left(\frac{1-x}{x}\right)'=\frac{x}{1-x}\cdot\frac{-1}{x^2}=-\frac{1}{x(1-x)}<0$$, για κάθε $x\in(0,\ 1)$ αφού ισχύει $x(1-x)>0$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,\ 1)$.

Comment [D20]: 2 ΜΟΝΑΔΕΣ

Μονοτονία της συνάρτησης g:

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο:

$$g'(x)=e^{\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+1}\cdot\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+1\right)'=e^{\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+1}\left(x^2-3x+2\right),\ x\in\mathbb{R}$$

Επειδή $e^{\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+1}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ το πρόσημο της $g'(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο του τριωνύμου x^2-3x+2 για το οποίο έχουμε:

- $x^2-3x+2>0$, αν $x\in(-\infty,\ 1)$
- $x^2-3x+2<0$, αν $x\in(1,\ 2)$
- $x^2-3x+2>0$, αν $x\in(2,\ \infty)$

Επομένως η συνάρτηση g είναι:

- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,\ 1)$
- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1,\ 2)$ και
- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(2,\ \infty)$

Στον επόμενο πίνακα φαίνεται η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης g:

	$-\infty$	1	2	$+\infty$
x				
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$	↗	↘	↗	

Ακρότατα της συνάρτησης g

Comment [D21]: 2 ΜΟΝΑΔΕΣ

Η g παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $x_1 = 1$, το $g(1) = e^{\frac{11}{6}} = \sqrt[6]{e^{11}}$

Η g παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο το $x_2 = 2$, το $g(2) = e^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{e^5}$

Δ3. Έχουμε:

$$P(A) = \lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(e^{f(x)+\ln\frac{1}{2}}\right) = \lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(e^{f(x)}\cdot e^{\ln\frac{1}{2}}\right) = \lim_{x\to\frac{1}{2}} e^{f(x)}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to\frac{1}{2}} e^{\ln\frac{1-x}{x}} = \frac{1}{2}e^{\ln 1} = \frac{1}{2}$$

$$P(A\cup B) = \lim_{x\to 0}\left(g(x)\cdot e^{-1}\right) = e^{-1}\cdot\lim_{x\to 0} g(x) = e^{-1}\cdot\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+1} = e^{-1}\cdot e^1 = e^0 = 1$$

Επομένως το ενδεχόμενο $A\cup B$ είναι βέβαιο.

Comment [D22]: 4 ΜΟΝΑΔΕΣ

Τώρα από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων έχουμε διαδοχικά:

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2}+P(B)-P(A\cap B) \Leftrightarrow P(B)-P(A\cap B) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2}+P(A\cap B)$$

Comment [D23]: 4 ΜΟΝΑΔΕΣ

Δ4. Έχουμε διαδοχικά για τη διακύμανση και την μέση τιμή του δείγματος:

Comment [D24]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

Comment [D25]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

$$s^2 = 8\left[P(B)-P(A\cap B)\right] \Leftrightarrow s^2 = 8\cdot\frac{1}{2} \Leftrightarrow s^2 = 4 \Leftrightarrow s = 2 \text{ και}$$

$$\bar{x} = P(A-B) - P(B')+1 \Leftrightarrow \bar{x} = P(A)-P(A\cap B)-\left(1-P(B)\right)+1 \Leftrightarrow \bar{x} = P(A)-P(A\cap B)-1+P(B)+1 \Leftrightarrow$$

$$\bar{x} = P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Leftrightarrow \bar{x} = P(A\cup B) \Leftrightarrow \bar{x} = 1$$

Δ4.1. Ο συντελεστής μεταβολής C.V. είναι:

$C.V = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{1} = 2 > 0{,}1$ και επομένως το δείγμα **δεν** είναι ομοιογενές.

Comment [D26]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

Δ4.2. Επειδή η τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί κανονική κατανομή θα έχουμε ότι οι τιμές που ανήκουν στο διάστημα $(3,\ 5)$ είναι αυτές που ανήκουν στο διάστημα $(\bar{x}+s,\ \bar{x}+2s)$, επομένως το $\frac{95}{2}-\frac{68}{2} = \frac{27}{2} = 13{,}5\%$, δηλαδή $P(\Gamma) = 0{,}135$ ενώ οι τιμές που ανήκουν στο διάστημα $(-1,\ 5)$ είναι αυτές που ανήκουν στο διάστημα $(\bar{x}-s,\ \bar{x}+2s)$, επομένως το $\frac{95}{2}+\frac{68}{2} = \frac{163}{2} = 81{,}5\%$. Άρα το πλήθος των τιμών του

Comment [D27]: 2 ΜΟΝΑΔΕΣ

Comment [D28]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

δείγματος των 200 παρατηρήσεων που ανήκουν στο διάστημα $(-1,\ 5)$ είναι $\frac{81,5}{100}\cdot 200 = 163$.

Comment [D29]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

Σας ευχόμαστε Καλή συνέχεια

Μαθηματικός Περιηγητής