# ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
# ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
# ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
# 2015

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Θεωρία, απόδειξη στη σελίδα 150 του σχολικού βιβλίου.

**Α2.** Θεωρία, ορισμός στη σελίδα 87 του σχολικού βιβλίου.

**Α3.** Θεωρία, ορισμός στη σελίδα 14 του σχολικού βιβλίου.

**Α4.**

**α.** Σωστό .

**β.** Σωστό .

**γ.** Λάθος .

**δ.** Σωστό .

**ε.** Λάθος **(** το σωστό είναι $0 < P(A) \le 1$, αφού αν $A = \Omega$ έχουμε $P(A) = 1$)

## ΘΕΜΑ Β

Έστω τα ενδεχόμενα:

Α: Το όχημα να είναι ανασφάλιστο .

Β: Το όχημα να μην έχει περάσει ΚΤΕΟ .

Από την περιγραφή των δεδομένων του προβλήματος προκύπτει ότι:

$$P(A) = \frac{100}{400} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{100}{400} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = \frac{80}{400} = \frac{1}{5}$$

**Β1.** Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου: $A \cup B$ και άρα έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$

**Β2.** Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου: $(A-B)\cup(B-A)$ και άρα ,αφού τα ενδεχόμενα $(A-B)$ και $(B-A)$ είναι ασυμβίβαστα έχουμε:

$$P(A-B)\cup(B-A)]=P(A-B)+P((B-A)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$$

**Β3.** Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου: $(A\cup B)'$ και άρα έχουμε:

$$P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$$

---

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Το πλάτος c των κλάσεων είναι:

$$c=\frac{R}{5}=\frac{20}{5}=4\,.$$

Αν $x_i(i=1,\ldots5)$ είναι τα κέντρα των κλάσεων θα έχουμε:

$$x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$$
$$x_2=x_1+4$$
$$x_3=x_1+8$$
$$x_4=x_1+12$$
$$x_5=x_1+16$$

Επειδή πρόκειται για παρατηρήσεις $x_i$ $(i=1,\ldots5)$ περιττού πλήθους θα έχουμε ότι:

$$\delta=x_3=x_1+8=68\Leftrightarrow x_1=60$$

Το κάτω άκρο της 1ης κλάσης θα είναι $x_1-\frac{c}{2}=60-2=58$ και άρα οι κλάσεις είναι:

$$[58,62)$$
$$[62,66)$$
$$[66,70)$$
$$[70,74)$$
$$[74,78)$$

**Γ2.** Έχουμε:

$$F_3=0,6\Leftrightarrow f_1+f_2+f_3=0,6\ (1)$$
$$f_1+f_2+f_3+f_4+f_5=1\ (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε: $f_4+f_5=0,4$ (είναι οι κλάσεις που περιέχουν τουλάχιστον 70 τόνους ανακυκλώσιμων υλικών).

Έχουμε $4=(f_4+f_5)\nu$ , αφού το κριτήριο εμπορίας ενός υλικού $(\geq 70)$ πληρούν τα υλικά που ανήκουν στην 4η και 5η κλάση. Άρα, θα είναι:

$$4=(f_4+f_5)\nu \Leftrightarrow 4=0,40\nu \Leftrightarrow \nu=10 \text{ υλικά ανακυκλώνει η επιχείρηση.}$$

**Γ3.** Σύμφωνα με τα προηγούμενα οι δύο πρώτες στήλες συμπληρώνονται άμεσα.

Αναλύοντας τα δεδομένα θα έχουμε:

$$\mathrm{N}_4=\frac{4}{5}N_5 \Leftrightarrow \mathrm{N}_4=\frac{4}{5}\nu \Leftrightarrow \frac{\mathrm{N}_4}{\nu}=\frac{4}{5} \Leftrightarrow F_4=0,8 \Leftrightarrow f_1+f_2+f_3+f_4=0,8 \ (3)$$

$$108^o=360^o(f_1+f_2) \Leftrightarrow f_1+f_2=0,3 \ (4)$$

$$\overline{x}=x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+x_4f_4+x_5f_5=68,8 \ (5)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3) έχουμε $f_4=0,2$ και από την σχέση (2) έχουμε $f_5=0,2$
Από τις σχέσεις (1) και (4) έχουμε $f_3=0,3$
Η σχέση (5) γίνεται $60f_1+64f_2=18,8$ που με την (4) αποτελεί σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους τις $f_1$, $f_2$ και του οποίου η λύση είναι $\begin{matrix} f_1=0,10 \\ f_2=0,20 \end{matrix}$.
Σύμφωνα με τα παραπάνω ο πίνακας συμπληρωμένος φαίνεται ως ακολούθως (από τον τύπο $f_i=\frac{\nu_\iota}{\nu}$, $i=1,\ 2,\ 2,\ 4,\ 5$ βρίσκουμε εύκολα τις $\nu_\iota$ ):

| **Κλάσεις [ , )** | **Κέντρα κλάσεων** $x_i$ | $\nu_i$ | $\mathrm{N}_\iota$ | $f_i$ | $F_i\%$ |
|---|---|---|---|---|---|
| [58, 62) | 60 | 1 | 1 | 0,10 | 10 |
| [62, 66) | 64 | 2 | 3 | 0,20 | 30 |
| [66, 70) | 68 | 3 | 6 | 0,30 | 60 |
| [70,74) | 72 | 2 | 8 | 0,20 | 80 |
| [74,78) | 76 | 2 | 10 | 0,20 | 100 |

**Γ4.** Το ιστόγραμμα συχνοτήτων προκύπτει εύκολα και το πολύγωνο συχνοτήτων προκύπτει ενώνοντας με ευθύγραμμα τμήματα τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογωνίων που σχηματίζονται (λαμβάνοντας δύο ακόμη υποθετικές κλάσεις, στην αρχή και στο τέλος, με συχνότητα 0).

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Για τη συνάρτηση $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{x}$ πρέπει:

$$\frac{1-x}{x}>0 \text{ και } x\neq 0$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{1-x}{x}>0 \Leftrightarrow x(1-x)>0 \Leftrightarrow x^2-x<0 \Leftrightarrow 0<x<1$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f$ είναι το διάστημα $(0,\ 1)$.

Για τη συνάρτηση $g(x)=e^{\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+1}$, το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

**Δ2. Μονοτονία της συνάρτησης $f$ :**

Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,\ 1)$ με παράγωγο:

$f'(x)=\dfrac{x}{1-x}\cdot\left(\dfrac{1-x}{x}\right)'=\dfrac{x}{1-x}\cdot\dfrac{-1}{x^2}=-\dfrac{1}{x(1-x)}<0$, για κάθε $x\in(0,\ 1)$ αφού ισχύει $x(1-x)>0$

Επομένως η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,\ 1)$.

**Μονοτονία της συνάρτησης $g$ :**

Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο:

$$g'(x)=e^{\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+1}\cdot\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+1\right)'=e^{\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+1}\left(x^2-3x+2\right),\ x\in\mathbb{R}$$

Επειδή $e^{\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+1}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ το πρόσημο της $g'(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο του τριωνύμου $x^2-3x+2$ για το οποίο έχουμε:

- $x^2-3x+2>0$, αν $x\in(-\infty,\ 1)$
- $x^2-3x+2<0$, αν $x\in(1,\ 2)$
- $x^2-3x+2>0$, αν $x\in(2,\ \infty)$

Επομένως η συνάρτηση $g$ είναι:

- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,\ 1)$
- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1,\ 2]$ και
- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2,\ \infty)$

Στον επόμενο πίνακα φαίνεται η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης $g$ :

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $1$ | $1$ $\qquad$ $2$ | $2$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | - | + |
| $f(x)$ | ↗ | ↘ | ↗ |

**Ακρότατα της συνάρτησης** $g$

Η $g$ παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $x_1 = 1$, το $g(1) = e^{\frac{11}{6}} = \sqrt[6]{e^{11}}$

Η $g$ παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο το $x_2 = 2$, το $g(2) = e^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{e^{5}}$

**Δ3.** Έχουμε:

$$P(A) = \lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(e^{f(x)+\ln\frac{1}{2}}\right) = \lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(e^{f(x)}\cdot e^{\ln\frac{1}{2}}\right) = \lim_{x\to\frac{1}{2}} e^{f(x)}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to\frac{1}{2}} e^{\ln\frac{1-x}{x}} = \frac{1}{2}e^{\ln 1} = \frac{1}{2}$$

$$P(A\cup B) = \lim_{x\to 0}\left(g(x)\cdot e^{-1}\right) = e^{-1}\cdot\lim_{x\to 0} g(x) = e^{-1}\cdot\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+1} = e^{-1}\cdot e^{1} = e^{0} = 1$$

Επομένως το ενδεχόμενο $A\cup B$ είναι βέβαιο.

Τώρα από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων έχουμε διαδοχικά:

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2}+P(B)-P(A\cap B) \Leftrightarrow P(B)-P(A\cap B) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2}+P(A\cap B)$$

**Δ4.** Έχουμε διαδοχικά για τη διακύμανση και την μέση τιμή του δείγματος:

$$s^2 = 8\left[P(B)-P(A\cap B)\right] \Leftrightarrow s^2 = 8\cdot\frac{1}{2} \Leftrightarrow s^2 = 4 \Leftrightarrow s = 2 \text{ και}$$

$$\bar{x} = P(A-B)-P(B')+1 \Leftrightarrow \bar{x} = P(A)-P(A\cap B)-\left(1-P(B)\right)+1 \Leftrightarrow \bar{x} = P(A)-P(A\cap B)-1+P(B)+1 \Leftrightarrow$$

$$\bar{x} = P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Leftrightarrow \bar{x} = P(A\cup B) \Leftrightarrow \bar{x} = 1$$

**Δ4.1**. Ο συντελεστής μεταβολής C.V. είναι:

$C.V = \dfrac{s}{\bar{x}} = \dfrac{2}{1} = 2 > 0{,}1$ και επομένως το δείγμα **δεν** είναι ομοιογενές.

**Δ4.2**. Επειδή η τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί κανονική κατανομή θα έχουμε ότι οι τιμές που ανήκουν στο διάστημα $(3,\ 5)$ είναι αυτές που ανήκουν στο διάστημα $(\overline{x}+s,\ \overline{x}+2s)$, επομένως το $\frac{95}{2}-\frac{68}{2}=\frac{27}{2}=13,5\%$, δηλαδή $P(\Gamma)=0,135$ ενώ οι τιμές που ανήκουν στο διάστημα $(-1,\ 5)$ είναι αυτές που ανήκουν στο διάστημα $(\overline{x}-s,\ \overline{x}+2s)$, επομένως το $\frac{95}{2}+\frac{68}{2}=\frac{163}{2}=81,5\%$. Άρα το πλήθος των τιμών του δείγματος των 200 παρατηρήσεων που ανήκουν στο διάστημα $(-1,\ 5)$ είναι $\frac{81,5}{100}\cdot 200=163$.