ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2015

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, ορισμός στη σελίδα 212 και ορισμός στη σελίδα 216 του σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία, ορισμός στη σελίδα 149 του σχολικού βιβλίου.

Α3. Απόδειξη θεωρήματος στη σελίδα 334.

Α4.

α. Λάθος.

β. Σωστό .

γ. Σωστό .

δ. Λάθος (ισχύει σε διάστημα Δ και όχι απαραίτητα σε σύνολο Α) .

ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε διαδοχικά:

$$\left|\frac{z-2015i}{z+2015i}\right|=1 \Leftrightarrow |z-2015i|=|z+2015i| \Leftrightarrow |z-2015i|^2=|z+2015i|^2 \Leftrightarrow$$
$$(z-2015i)(\overline{z}+2015i)=(z+2015i)(\overline{z}-2015i) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z\overline{z}+2015zi-2015\overline{z}i+2015^2=z\overline{z}-2015zi+2015\overline{z}i+2015^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2015zi-2015\overline{z}i=-2015zi+2015\overline{z}i \Leftrightarrow 4030zi=4030\overline{z}i \Leftrightarrow z=\overline{z}$$

Επομένως $z \in \mathbb{R}$.

Β2. Αρχικά θέτουμε (για ευκολία των πράξεων) $k=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ και παρατηρούμε ότι:

$$|k|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Leftrightarrow |k|=1 \Leftrightarrow |k|^2=1 \Leftrightarrow k\overline{k}=1 \Leftrightarrow \overline{k}=\frac{1}{k} \ (I)$$

Ακόμα από τα δεδομένα έχουμε:

$$|w|=1 \Leftrightarrow |w|^2=1 \Leftrightarrow w\overline{w}=1 \Leftrightarrow \overline{w}=\frac{1}{w} \ (II)$$

Έτσι είναι: $v=\dfrac{w-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{1+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)w}=\dfrac{w-k}{1+kw}$

Τώρα έχουμε διαδοχικά:

$$\bar{v}=\frac{\bar{w}-\bar{k}}{1+\bar{k}\bar{w}}=\frac{\frac{1}{w}-\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{w}}=\frac{\frac{k-w}{wk}}{\frac{kw+1}{kw}}=\frac{k-w}{kw+1}=-\frac{w-k}{1+kw}=-v$$

Επομένως $v\in\mathbb{C}$.

B3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο u είναι πραγματικός αριθμός[1] (αφού κάθε πραγματικός αριθμός $z=x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση (1) $\left|\frac{x-2015i}{x+2015i}\right|=\left|\frac{\sqrt{x^2+2015^2}}{\sqrt{x^2+2015^2}}\right|=1$). Έχουμε διαδοχικά:

$$u=(a-ai)^{2024}=\left[a(1-i)\right]^{2024}=a^{2024}(1-i)^{2024}=a^{2024}\left[(1-i)^2\right]^{1012}=$$
$$=a^{2024}\left(1-2i+i^2\right)^{1012}=a^{2024}(-2i)^{1012}=a^{2024}(-2)^{1012}i^{1012}=2^{1012}a^{2024}i^{1012}=\left(2a^2\right)^{1012}$$

, αφού $i^{1012}=1$

B4. Αφού $z=x\in\mathbb{R}$ και $v=yi,\ y\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$z^2+\frac{w^2}{2}=9\Leftrightarrow x^2+\frac{(yi)^2}{2}=9\Leftrightarrow x^2-\frac{y^2}{2}=9\Leftrightarrow\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{18}=1$$

ή $\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{\left(3\sqrt{2}\right)^2}=1$ και άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των του μιγαδικού επιπέδου που ικανοποιούν τη σχέση $z^2+\dfrac{w^2}{2}=9$ είναι υπερβολή με εστίες τις Ε(0,3) και Ε΄(0,-3).

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση f γίνεται:

---

[1] Μπορούμε, αφού βρούμε τον αριθμό $u=\left(2a^2\right)^{1012}=x\in\mathbb{R}$, να επαληθεύσουμε την σχέση (1) :

$$\left|\frac{u-2015i}{u+2015i}\right|=\left|\frac{x-2015i}{x+2015i}\right|=\frac{\sqrt{x^2+2015}}{\sqrt{x^2+2015}}=1$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x}, \text{ αν } x>0 \text{ και } x\neq 1\\ \dfrac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln(-x)}, \text{ αν } x<0\\ \kappa, \text{ αν } x=1\\ 0, \text{ αν } x=0\end{cases}$$

Για το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x}=0$,

αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[e^{-x^2+1}(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{-x^2+1}\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)=e\cdot(-1)=-e$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln(-x)}=0$,

αφού $\lim\limits_{x\to 0^-}\left[e^{-x^2+1}(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{-x^2+1}\cdot\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=e\cdot(-1)=-e$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}(\ln(-x))=-\infty$

Επομένως είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ και άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{0,\ 1\}$ ώς πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Επίσης η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, αφού $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$. Τέλος για να είναι η f συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_1=1$.

Έχουμε, σύμφωνα με τον κανόνα του de L΄ Hospital:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{e^{-x^2+1}\left(-2x^2+2x+1\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\left[e^{-x^2+1}\left(-2x^2+2x+1\right)x\right]=1$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=\kappa\Leftrightarrow\kappa=1$.

Γ2.

i) Η συνάρτηση $g(x)=f(x)\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, $x>0$ γίνεται διαδοχικά:

Για $x=1$ έχουμε $g(1)=f(1)\cdot\ln 1=0$

$$g(x)=\frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln|x|}\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x}\left(\ln 1-\ln x^2\right)=\frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x}(-2\ln x)=$$
$$=-2e^{-x^2+1}(x-1)$$

Επομένως θα μελετήσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης $g(x)=-2e^{-x^2+1}(x-1),\ x>0$.

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ \infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g'(x)=-2\left[-2x(x-1)e^{-x^2+1}+e^{-x^2+1}\right]=-2e^{-x^2+1}\left(-2x^2+2x+1\right),\ x>0$$

Επειδή $-2e^{-x^2+1}<0$, για $x>0$, το πρόσημο της $g'(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο του τριωνύμου $-2x^2+2x+1$

Ο πίνακας προσήμου της $g'(x)$ είναι ο επόμενος:

x	0 $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$	$+$
$g(x)$	↘	↗

Επομένως η συνάρτηση g είναι:

Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$ και

Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2},\ +\infty\right)$

ii) Σύμφωνα με τον πίνακα προσήμου της $g'(x)$ του ερωτήματος (i) η συνάρτηση g έχει ελάχιστο (ολικό) στο σημείο $x_2=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, το $g\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)=e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1-\sqrt{3}\right)$.

Επομένως για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$g(x)\geq g\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\Leftrightarrow -2e^{-x^2+1}(x-1)\geq e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1-\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow e^{-x^2+1}(x-1)\leq\frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$$

Άρα:

- Για $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$ έχουμε:

$$e^{-x^2+1} \le \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\left(x-1\right)}$$

- Για $x-1<0 \; \kappa\alpha\iota \; x>0 \Leftrightarrow 0<x<1$ έχουμε:

$$e^{-x^2+1} \ge \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\left(x-1\right)}$$

Γ3.

i) Η $g'(x)$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ (ή αλλιώς η $g(x)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$) ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g''(x) = -4e^{-x^2+1}\left(2x^3-2x^2-3x+1\right) = -4e^{-x^2+1}\left(2x^3-2x^2-3x+1\right) = -4e^{-x^2+1}\left(x+1\right)\left(2x^2-4x+1\right),\; x>0$$

Επειδή $-4e^{-x^2+1}<0 \; \gamma\iota\alpha \; x>0$, το πρόσημο της $g''(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο του $\left(x+1\right)\left(2x^2-4x+1\right)$.

Ο πίνακας του προσήμου της $g''(x)$ είναι ο επόμενος:

x	0 — $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ — $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ — ∞
$g''(x)$	$-$	$+$	$-$
$g(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Επομένως η συνάρτηση g:

Είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο διάστημα $\left(0,\; \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right]$

Είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα άνω) στο διάστημα $\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2},\; \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right]$

Είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο διάστημα $\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2},\; +\infty\right)$

Τα σημεία καμπής της είναι το και το $A\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, g\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ ή το $A\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{2}e^{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}}\right)$

και το $B\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ g\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ ή το $B\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ -\sqrt{2}e^{-\frac{1+2\sqrt{2}}{2}}\right)$

ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $A(2,\ g(2))$ είναι:

$$y-g(2)=g'(2)(x-2)\Leftrightarrow y+2e^{-3}=6e^{-3}(x-2)\Leftrightarrow y=6e^{-3}x-14e^{-3}$$

Επειδή η g είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο διάστημα $\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right)$ θα είναι:

$$y\ge g(x)\Leftrightarrow 6e^{-3}x-14e^{-3}\ge -2e^{-x^2+1}(x-1)\Leftrightarrow -3e^{-3}x+7e^{-3}\le e^{-x^2+1}(x-1)\Leftrightarrow$$
$$e^{-4}(-3x+7)\le e^{-x^2}(x-1)$$

, για κάθε $x\in\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right)$.

Επίσης, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $B(1,\ g(1))$ είναι:

$$y-g(1)=g'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=-2(x-1)$$

Επειδή η g είναι κυρτή (στέφει τα κοίλα άνω) στο διάστημα

$\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2},\ 1\right)\subset\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2},\ \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$ θα είναι:

$y\le g(x)\Leftrightarrow -2(x-1)\le -2e^{-x^2+1}(x-1)\Leftrightarrow x-1\ge e^{-x^2+1}(x-1)\Leftrightarrow 1\le e^{-x^2+1}\Leftrightarrow e^{-x^2}\ge e^{-1}$, για κάθε $x<1$, αφού $x-1<0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$f(x)=-f(-x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Για την $f(-x)=\int_{-x}^{-2x}\frac{1+\sigma\upsilon\nu t}{\sqrt{t^4-t^2+4}}dt$ θέτουμε $t=-\omega$ και έχουμε:

$$dt=-d\omega$$
$$t=-x\Leftrightarrow \omega=x$$
$$t=-2x\Leftrightarrow \omega=2x$$

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(-x) = -\int_{x}^{2x} \frac{1+\sigma\upsilon\nu(-\omega)}{\sqrt{(-\omega)^4 - (-\omega)^2 + 4}} d\omega = -\int_{x}^{2x} \frac{1+\sigma\upsilon\nu\omega}{\sqrt{\omega^4 - \omega^2 + 4}} d\omega = -f(x)$$

Δ2. Θέτοντας για ευκολία $h(t) = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu t}{\sqrt{t^4 - t^2 + 4}}$, $t \in \mathbb{R}$ έχουμε διαδοχικά:

$$f(x) = \int_{x}^{2x} h(t)dt = \int_{x}^{0} h(t)dt + \int_{0}^{2x} h(t)dt = \int_{0}^{2x} h(t)dt - \int_{0}^{x} h(t)dt,\ x \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση $h(t) = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu t}{\sqrt{t^4 - t^2 + 4}}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) και άρα οι συναρτήσεις $\int_{0}^{x} h(t)dt$ και $\int_{0}^{2x} h(t)dt$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ (ως σύνθεση παραγωγίσιμων). Επομένως η συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f'(x) = h(2x)\cdot(2x)' - h(x) = 2h(2x) - h(x) = K(x),\ x \in \mathbb{R}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano για την $K(x)$ στο διάστημα $[0,\ 1]$ και έχουμε:

- Η $K(x)$ είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο $[0,\ 1]$
- $K(0) = 1 > 0$
- $K(1) = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2}{2} - \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 1}{2} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu 2 - \sigma\upsilon\nu 1}{2} < 0$, αφού $2 > 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2 < \sigma\upsilon\nu 1$, διότι η συνάρτηση $\sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,\ \pi]$.

Άρα $K(0)\cdot K(1) < 0$ και επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,\ 1)$ τέτοιο, ώστε $K(\xi) = 0$ ή $f'(\xi) = 0$.

Δ3. Από τη σχέση $\int_{0}^{x} g(t)dt \le e^{2015x} + x^5 - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε διαδοχικά:

$$\int_{0}^{x} g(t)dt \le e^{2015x} + x^5 - 1 \Leftrightarrow \int_{0}^{x} g(t)dt - e^{2015x} - x^5 + 1 \le 0 \Leftrightarrow \varphi(x) \le 0 = \varphi(0)$$

,όπου $\varphi(x) = \int_{0}^{x} g(t)dt - e^{2015x} - x^5 + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Άρα ισχύει $\varphi(x) \le \varphi(0)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επομένως η συνάρτηση $\varphi(x)$ έχει μέγιστο στο σημείο $x_0 = 0$. Ακόμα η $\varphi(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$, αφού η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (δεδομένο) με:

$$\varphi'(x) = g(x) - 2015e^{2015x} - 5x^4,\ x \in \mathbb{R}$$

Συνεπώς, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, θα έχουμε:

$$\varphi'(0) = 0 \Leftrightarrow g(0) - 2015e^0 = 0 \Leftrightarrow g(0) = 2015$$

Όμως είναι (βρέθηκε παραπάνω):

$$f'(x) = h(2x)\cdot(2x)' - h(x) = 2h(2x) - h(x) = K(x),\ x \in \mathbb{R}$$

Επομένως $f'(0) = 2h(0) - h(0) = h(0) = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 0}{\sqrt{4}} = \dfrac{2}{2} = 1$

Άρα:

$$g(0) = 2015 \Leftrightarrow g(0) = 1 + 2014 \Leftrightarrow g(0) = f'(0) + 2014$$

Δ4. i) Εφαρμόζουμε το θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση g στα διαστήματα $[0,\ 1008]$ και $[1008,\ 2016]$. Έχουμε:

- Η g είναι συνεχής στα διαστήματα $[0,\ 1008]$ και $[1008,\ 2016]$ (δεδομένο).
- Η g είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $[0,\ 1008]$ και $[1008,\ 2016]$ (δεδομένο)

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (0,\ 1008)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (1008,\ 2016)$ τέτοια, ώστε:

$$g'(\xi_1) = \frac{g(1008) - g(0)}{1008} = \frac{3023 - 2015}{1008} = 1 \text{ και}$$

$$g'(\xi_2) = \frac{g(2016) - g(1008)}{1008} = \frac{4031 - 3023}{1008} = 1$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Rolle για τη συνάρτηση g' στο διάστημα $[\xi_1,\ \xi_2]$. Έχουμε:

- Η g' είναι συνεχής στο $[\xi_1,\ \xi_2]$, ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $(\xi_1,\ \xi_2)$, ως δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- $g'(\xi_1) = g'(\xi_2)$

Επομένως, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\xi_1,\ \xi_2) \subset (0,\ 2016)$ τέτοιο, ώστε $g''(x_0) = 0$

ii) Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ και άρα έχουμε την απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{0}{0}$ οπότε , σύμφωνα με τον κανόνα του de L΄ Hospital (η $f(x)$ και x είναι παραγωγίσιμες), έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2h(2x) - h(x)}{1} = \lim_{x\to 0}\left[2h(2x) - h(x)\right] = 2h(0) - h(0) = h(0) = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 0}{\sqrt{4}} = 1$$ (η συνάρτηση $h(x)$ είναι συνεχής $\mathbb{R}$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων, άρα συνεχής και στο 0)