

ΘΕΜΑΤΑ ΕΝΔΟΣΧΟΛΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ: 2013-2014

Επιμέλεια: Καραγιάννης Ιωάννης – Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η συλλογή των θεμάτων των προαγωγικών εξετάσεων στη Α΄τάξη του Γενικού Λυκείου αποτελεί συνέχεια παρόμοιας προσπάθειας που έγινε κατά τα προηγούμενα δύο σχολικά έτη. Τα θέματα προέρχονται από Λύκεια του Νομού Δωδεκανήσου. Τα θέματα επιλέχθηκαν αφενός με βάση το τεχνικό κριτήριο της δυνατότητας επεξεργασίας και αφετέρου το κριτήριο της λιγότερης παρέμβασης. Όμως φέτος τα θέματα που παραθέτουμε έχουν υποστεί, στο μέτρο του δυνατού, αξιολόγηση ως προς:

- A.** Το υφιστάμενο νομικό πλαίσιο επιλογής και διάρθρωσης των θεμάτων,
- B.** Το περιεχόμενο τους καθώς και την επιστημονική τους ορθότητα ,
- Γ.** Την διαβαθμισμένη δυσκολία τους ,
- Δ.** Την αισθητική τους καθώς και την ηλεκτρονική τους σελιδοποίηση,
- Ε.** Την φιλολογική τους επιμέλεια.

Έτσι , πολλά από τα θέματα που ακολουθούν, έχουν υποστεί κάποιας μορφής «παρέμβαση» , χωρίς ωστόσο να αλλοιωθεί ο χαρακτήρας και η δομή τους.

Παραδίδουμε λοιπόν στους αγαπητούς μαθητές μας και στους αξιόμαχους συναδέλφους μας μαθηματικούς, αλλά και σε όποιον ενδιαφέρεται για την μαθηματική εκπαίδευση, το υλικό που ακολουθεί και ελπίζουμε να τους βοηθήσει.

Μάρτιος 2015

Καραγιάννης Ιωάννης

Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Ν. Δωδεκανήσου

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

β. Για κάθε $\alpha, \beta > 0$ και n φυσικός με $n \geq 2$ ισχύει $\sqrt[n]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta}$.

γ. Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

δ. Για τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' του ίδιου δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A) + P(A') = 2014$.

ε. Ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου a_n με πρώτο όρο a_1 και διαφορά ω δίνεται από το τύπο $a_n = a_1 + (n-1)\omega$.

(Μονάδες 2x5=10)

B. Δίνεται ότι η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2 .

Αν με S συμβολίσουμε το άθροισμα των ριζών $x_1 + x_2$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$S = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2$ και $\Lambda = 2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

A. Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 12)

B. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3^ο

Σε μια αριθμητική πρόοδο a_n ισχύει: $a_1 = 5$ και $a_4 = 14$.

A. Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της αριθμητικής προόδου είναι 3.

(Μονάδες 8)

B. Να βρείτε τον 10^ο όρο της αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 7)

Γ. Να υπολογίσετε το άθροισμα των πρώτων 10 όρων της προόδου.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4^ο

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0 \quad , \quad \lambda \in (0, 4) .$$

A. Να βρείτε:

i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ .

(Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου.

(Μονάδες 6)

B. Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda \in (0, 4)$.

(Μονάδες 7)

Γ. Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16;

Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

(Μονάδες 6)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $\gamma > 0$, τότε $a > \beta \Leftrightarrow a \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$.

β. Αν $\theta > 0$ τότε: $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$.

γ. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $|a|^2 = a^2$.

δ. Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς a και $\beta \neq 0$ ισχύει: $\left| \frac{a}{\beta} \right| \leq \frac{|a|}{|\beta|}$.

(Μονάδες 2x4=8)

ε. Να αντιστοιχίσετε κάθε γραμμή της στήλης Α με την αντίστοιχη της στήλης Β, ώστε να προκύπτουν αληθείς σχέσεις ή προτάσεις.

στήλη Α	Στήλη β
1. $ax > -\beta \Leftrightarrow x > -\frac{\beta}{a}$	α. $a = 0$
2. $ax > -\beta \Leftrightarrow x < -\frac{\beta}{a}$	β. $a > 0$
3. Αν $\beta > 0$ η ανίσωση $ax > -\beta$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$	γ. $a < 0$
	δ. $a \neq 0$

(Μονάδες 2)

B. Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς a και β ισχύει ότι:

$$|a \cdot \beta| = |a| \cdot |\beta|$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η εξίσωση: $\frac{x^2 - 2x}{x + 2} = \frac{16x}{x^2 - 4}$, $x \in \mathbb{R}$

A. Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού x ορίζεται η εξίσωση.

(Μονάδες 10)

B. Να λύσετε την εξίσωση.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(15 - 5x)(x^2 - 5x + 6)}{x^2 - 9}$

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 5)

B. Να απλοποιήσετε τον τύπο $f(x)$ της συνάρτησης.

(Μονάδες 5)

Γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 0$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ και $B = \sqrt{x^2}$.

A. Να λύσετε την ανίσωση $A > 1$.

(Μονάδες 5)

B. Να λύσετε την εξίσωση $B = -8$.

(Μονάδες 5)

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{A}{B} = 1$.

(Μονάδες 5)

Δ. Να λύσετε την εξίσωση $A = x$.

(Μονάδες 10)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 3

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

β. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$.

γ. Το άθροισμα των δύο ριζών x_1, x_2 εξισώσεων δευτέρου βαθμού δίνεται από την σχέση

$$S = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

δ. Το άθροισμα των πρώτων v -όρων αριθμητικής προόδου (a_n) με διαφορά ω είναι :

$$S_v = \frac{v(v-1)}{2} + va_1$$

ε. Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f και του άξονα $y' y$.

(Μονάδες 5x2=10)

Β. Αν $A \subseteq B$, όπου A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , τότε να αποδείξετε ότι $P(A) \leq P(B)$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α , β , με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

A. $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$

(Μονάδες 12)

B. $(\alpha + \frac{4}{\alpha}) \cdot (\beta + \frac{4}{\beta}) \geq 16$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x - \lambda^2 - 5 = 0$, με $\lambda \neq 0$

A. Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

B. Να υπολογίσετε το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών συναρτήση του λ .

(Μονάδες 6)

Γ. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης :

Γ1. Να λύσετε την ανίσωση $(x_1 - 1) \cdot (x_2 - 1) \geq 0$

(Μονάδες 6)

Γ2. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε $(x_1 - 1) \cdot (x_2 - 1) = -4$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

A. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 10)

B. Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες;

(Μονάδες 6)

Γ. Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε :

Γ1. να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$

(Μονάδες 4)

Γ2. να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$f(x_2), f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), f(x_2 + 1)$$

(Μονάδες 5)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 4

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ισχύει $a^0=1$ για κάθε $a \neq 0$.

β. Ισχύει $a^m \cdot a^n = a^{m \cdot n}$.

γ. Ισχύει $|a| < 0$ για κάθε a πραγματικό αριθμό.

δ. Ισχύει $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ όπου a, b μη αρνητικοί αριθμοί.

ε. Αν Δ η διακρίνουσα της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ να γίνει η σωστή αντιστοίχιση

Τιμή Διακρίνουσας	Πλήθος Λύσεων Εξίσωσης
1. $\Delta > 0$	A. Μία διπλή λύση
2. $\Delta = 0$	B. Καμία λύση
3. $\Delta < 0$	Γ. Δύο άνισες λύσεις

(Μονάδες 5x2=10)

B. Εστω Ω ένας δειγματικός χώρος, με απλά ενδεχόμενα ισοπίθανα. Αν τα A και B είναι δύο ενδεχόμενα του Ω , να αποδείξετε ότι: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Να λυθούν οι εξισώσεις

α. $|x|=9$

β. $|x+4|=7$

γ. $|x-13|=-1$

(Μονάδες 15)

B. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 8x + 2 = 0$ τότε χωρίς να βρεθούν οι ρίζες αυτές να υπολογιστούν οι παραστάσεις

α. $x_1 + x_2$

β. $x_1 \cdot x_2$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος 3, 7, 11,.....

A. Να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 και την διαφορά ω της αριθμητικής προόδου

(Μονάδες 8)

B. Να βρείτε τον εικοστό τέταρτο όρο a_{24} της αριθμητικής προόδου

(Μονάδες 8)

Γ. Να υπολογίσετε το άθροισμα των πρώτων τριάντα όρων της αριθμητικής προόδου

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 3$

A. Να υπολογιστούν οι τιμές της συνάρτησης $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$

(Μονάδες 9)

B. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$

(Μονάδες 9)

Γ. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) \geq 0$

(Μονάδες 7)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 5

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Το τριώνυμο $ax^2 + bx + c$ με $a, b, c \in \mathbb{R}$, είναι πάντα θετικό, όταν η διακρίνουσα του Δ , είναι μικρότερη του μηδενός.

β. Ισχύει ότι $|x| \geq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$, όπου θ θετικός αριθμός.

γ. Αν $a \neq 0$ τότε η εξίσωση $ax + b = 0$ έχει ακριβώς μια λύση.

δ. Αν τρεις μη μηδενικοί αριθμοί a, b, c είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε ισχύει $b^2 = a \cdot c$.

ε. Για τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' του ίδιου δειγματικού χώρου Ω ισχύει

$$P(A) + P(A') = 2014.$$

(Μονάδες 5x2=10)

B. Να αποδείξετε ότι ισχύει $|a + b| \leq |a| + |b|$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η εξίσωση $\lambda(\lambda - 1)x = \lambda^2 + \lambda$

A. Αν η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα να βρείτε το λ .

(Μονάδες 12)

B. Για $\lambda=0$ να βρείτε την μικρότερη ακέραια λύση της ανίσωσης $d(x, \lambda - 4) < 2$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η ευθεία (ϵ) με εξίσωση $y = ax + b$

A. Να βρείτε τα a και b , ώστε η ευθεία να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\hat{\omega} = 45^\circ$ και να τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, 1)$.

(Μονάδες 14)

Β. Για $\alpha = 1$ να βρείτε τα $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία (ε) να είναι παράλληλη στην ευθεία με

$$\text{εξίσωση } y = \left| \frac{\mu}{\mu+1} \right| x - 2$$

(Μονάδες 11)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x - 6$, $x \in \mathbb{R}$

Α. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

(Μονάδες 6)

Β. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f .

(Μονάδες 6)

Γ. Να βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να βρίσκεται πάνω από την ευθεία με εξίσωση $\psi = -6$ και κάτω από τον άξονα $\chi\chi$.

(Μονάδες 7)

Δ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$

(Μονάδες 6).

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 6

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η εξίσωση $|2011x - 2012| = -2013$ είναι αδύνατη.

β. Για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει $|a|^2 > a^2$

γ. Αν $\alpha, \beta \geq 0$ και n θετικός ακέραιος, ισχύει ότι $\sqrt[n]{\alpha + \beta} = \sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\beta}$

δ. $\frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$

ε. Αν $\theta > 0$, τότε $|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$

(Μονάδες 2x5=10)

Β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ριζών της δίνεται από τον τύπο:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Α. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \lambda x - 3 = 0$. Αν έχει ρίζα τον αριθμό 1, να δείξετε ότι $\lambda = 2$

(Μονάδες 10)

Β. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση που προκύπτει για $\lambda = 2$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 3^ο

Α. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 12 < 7x$.

(Μονάδες 15)

B. Αν ο x είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (A) , να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση:

$$|x-3|-|x-4|-2|x|$$

(Μονάδες10)

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Να λυθεί η εξίσωση $x^5 - 81x = 0$.

(Μονάδες 10)

B. Αν a η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος (A) να δείξετε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{a-1}} = \sqrt{a} .$$

(Μονάδες 15)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 7

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για κάθε $\alpha, \beta > 0$ ισχύει: $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

β. Αν θεωρήσουμε δύο αριθμούς α και β που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία

A και B αντίστοιχα, τότε το μήκος (AB) είναι: $(AB) = d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$

γ. Αν η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($\alpha \neq 0$) έχει δύο ρίζες και ισχύουν: $S < 0$ και $P > 0$, τότε οι ρίζες είναι θετικές

δ. Για τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' του ίδιου δειγματικού χώρου Ω

ισχύει $P(A) + P(A') = 1$.

ε. Να αντιστοιχίσετε τις πιθανότητες της στήλης A με τους κατάλληλους τύπους της στήλης B , ώστε να προκύπτουν αληθείς ισότητες.

Στήλη A	Στήλη B
1. $P(A \cup B)$	α) $1 - P(A)$
2. $P(A - B)$	β) $P(A) - P(A \cap B)$
3. $P(A')$	γ) $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
	δ) $P(A) - P(B)$

(Μονάδες 2x5=10)

B. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $ax + \beta = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει ακριβώς μία λύση, την $x = -\frac{\beta}{\alpha}$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι ανισώσεις $|2x+1| \geq 5$ (1) και $x^2 + x - 12 < 0$ (2)

A. Να λύσετε την ανίσωση (1)

(Μονάδες 10)

B. Να λύσετε την ανίσωση (2)

(Μονάδες 10)

Γ. Κατόπιν να βρείτε τις κοινές λύσεις των (1) και (2) και να τις γράψετε σε μορφή συνόλων.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4 + \mu - x^2}$ με $\mu \geq 0$.

A. Να βρείτε την τιμή του μ , ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(2,0)$

(Μονάδες 5)

B. Για $\mu=0$:

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

(Μονάδες 7)

B2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $B(0, f(0))$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση $y = x + 1$

(Μονάδες 8)

B3. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{1}{f^2(x)} + \frac{2}{x+2} = 1$, αν $-2 < x < 2$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 3\lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ η οποία έχει δυο άνισες πραγματικές λύσεις.

A. Να αποδείξετε ότι $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (12, +\infty)$

(Μονάδες 8)

B. Για $\lambda = -4$

B1. Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 3\lambda = 0$

(Μονάδες 6)

B2. Αν x_1 η θετική ρίζα και x_2 η αρνητική ρίζα της, τότε

i. Να λυθεί η ανίσωση $|x + 2013| \leq -x_2$

(Μονάδες 6)

ii. Να δείξετε ότι $\sqrt[3]{x_1} \sqrt{x_1} = \sqrt{2}$

(Μονάδες 5)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 8

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ισχύει ότι $(-a - \beta)^2 = a^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

β. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = x - 3$

γ. Αν $a < 2$, τότε $a - 2 > 0$.

δ. Τα σύνολα $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 4\}$ και $B = \{-2, 2\}$ είναι ίσα.

ε. Οι ευθείες $y = \frac{\sqrt{3}}{6}x + 2$ και $y = \frac{\sqrt{6}}{2}x - 1$ είναι παράλληλες

(Μονάδες 2x5=10)

Β. Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Α. Αν οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .

(Μονάδες 9)

Β. Αν οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .

(Μονάδες 9)

Γ. Να βρεθεί ο αριθμός x , ώστε οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3⁰

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \sqrt{\sqrt[3]{2^5}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2}}$ και $B = \frac{8^7 \cdot 27^{11}}{6^{20} \cdot 9^6}$

A. Να αποδείξετε ότι $A = 2$ και $B = 6$.

(Μονάδες 8)

B. Να λύσετε την εξίσωση $x^3 = \frac{1}{A - \sqrt{A}} + \frac{1}{A + \sqrt{A}}$

(Μονάδες 6)

Γ. Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B .

(Μονάδες 2)

Δ. Αν $2 \leq x \leq 4$ και $1 \leq y \leq 2$ α βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της παράστασης $K = Ax - By$.

(Μονάδες 4)

Ε. Αν $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 8x + 12}}{x - 2}$ να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τη μορφή

διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4⁰

Δίνονται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

A. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 5)

B. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$.

(Μονάδες 10)

Γ. Έστω $M(x, y)$ σημείο της C_f . Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει $|2x + 1| < 3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$.

(Μονάδες 10)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 9

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

β. Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ έχει δύο πραγματικές διαφορετικές ρίζες αν $\Delta < 0$, όπου $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$.

γ. Μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό του ίδιου πάντοτε μη μηδενικού αριθμού.

δ. Αν $A(a, \beta)$ σημείο του καρτεσιανού επιπέδου, τότε το συμμετρικό του ως προς την αρχή των αξόνων είναι το σημείο $B(-a, -\beta)$

ε. Αν με S συμβολίσουμε το άθροισμα $x_1 + x_2$ και με P το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$ των ριζών x_1, x_2 της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$, τότε ισχύει:

$$S = -\frac{\beta}{a} \quad \text{και} \quad P = \frac{\gamma}{a}$$

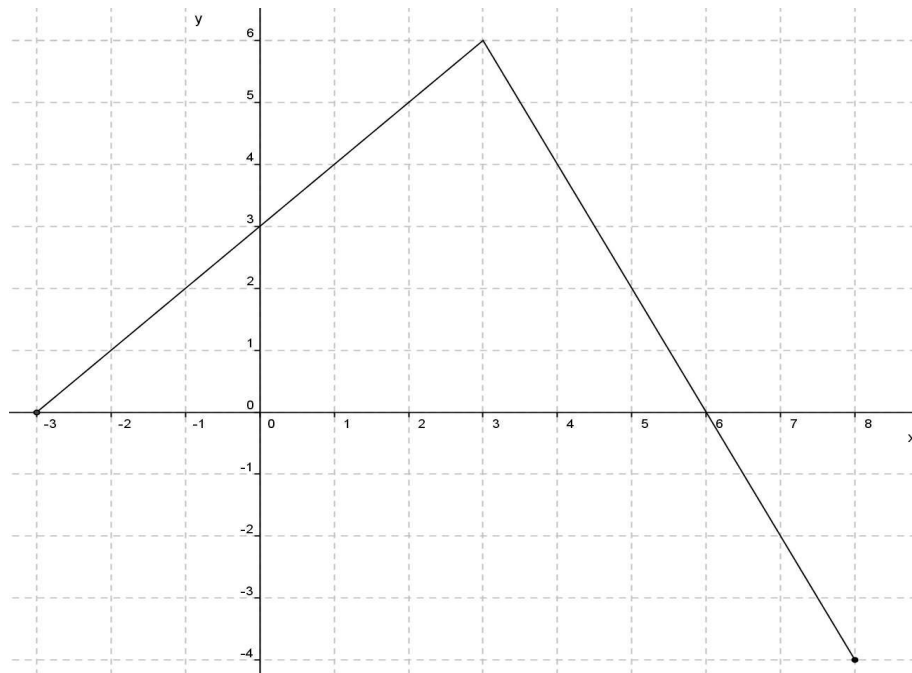
(Μονάδες 2x5=10)

B. Να αποδείξετε ότι για δύο οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει η ισότητα:

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|.$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2°



Στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

A. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 6)

B. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
y					-2	4

(Μονάδες 6)

Γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες. (Μονάδες 6)

Δ. Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3^ο

Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω δίνεται $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ και $P(A \cap B) = 0,15$. Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

A. $P(A \cup B)$

(Μονάδες 6)

B. $P(A')$

(Μονάδες 6)

Γ. $P(A - B)$

(Μονάδες 6)

Δ. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα ενδεχόμενα A και B .

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4^ο

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x, y τέτοια, ώστε $x + y = 10$.

A. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο:

$$E(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x), \quad x \in (0,10)$$

(Μονάδες 9)

B. Να αποδείξετε ότι:

$$E(x) \leq \frac{25}{2} \text{ για κάθε } x \in (0,10)$$

(Μονάδες 8)

Γ. Για ποια τιμή του $x \in (0, 10)$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$; Τι

παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο $AB\Gamma$;

(Μονάδες 8)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 10

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν x_1, x_2 ρίζες του τριωνύμου $ax^2 + bx + c = 0$, με $a \neq 0$, τότε:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

β. Ισχύει $|-a| = |a|$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

γ. Δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω , αν είναι ξένα μεταξύ τους τότε είναι αντίθετα.

δ. Για κάθε ενδεχόμενο A, ενός δειγματικού χώρου Ω , ισχύει $P(A) > 1$.

ε. Αν $a \geq 0$ και $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{a}} = \sqrt[\mu\nu]{a}$

(Μονάδες 2x5=10)

B. Αν x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$, με $a \neq 0$, να αποδείξετε ότι :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Να λύσετε την ανίσωση: $\left|x - \frac{1}{2}\right| < 4$

(Μονάδες 9)

B. Να λύσετε την ανίσωση: $|x + 5| \geq 3$

(Μονάδες 9)

Γ. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις γράψετε με τη μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3^ο

Αν $x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda = 0$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

A. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

B. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της (1), να βρείτε τον αριθμό λ , ώστε:

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10$$

(Μονάδες 9)

Γ. Για $\lambda = 3$ να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες $2x_1, 2x_2$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (a_n) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

$$a_3 = 4, a_5 = 16 \text{ και } \lambda > 0$$

A. Να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 και το λόγο λ της προόδου.

(Μονάδες 8)

B. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_n) , με $\beta_n = \frac{1}{a_n}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με

λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (a_n)

(Μονάδες 9)

Γ. Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων αντίστοιχα, να

αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση $S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}$

(Μονάδες 8)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 11

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ισχύει ότι: $a^κ \cdot a^λ = a^{κ+λ}$

β. Ισχύει: $(a + β)^2 = a^2 - 2αβ + β^2$

γ. Ισχύει: $\sqrt{a^2} = |a|$

δ. Ισχύει ότι: $(a^κ)^λ = a^{κ+λ}$

ε. Αν σε μία δευτεροβάθμια εξίσωση $ax^2 + bx + γ = 0$, $a \neq 0$ η διακρίνουσα Δ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο \mathbb{R} .

(Μονάδες 10)

B. Θεωρούμε την εξίσωση: $ax^2 + bx + γ = 0$ ($a \neq 0$) και τη διακρίνουσά της $\Delta = b^2 - 4αγ$.

Να αποδείξετε ότι αν $\Delta > 0$, τότε η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες τις $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα.

Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$, τότε:

A. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 10)

B. Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Να λυθεί η ανίσωση:

$$2(3x-4) - 2(x-3) < 6$$

(Μονάδες 10)

B. Να λυθεί η ανίσωση:

$$\frac{x-5}{2} - \frac{2x-3}{3} < \frac{5}{6}$$

(Μονάδες 10)

Γ. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4^ο

Μια μπάλα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω, αφού διαγράψει μια τροχιά, μετά από κάποιο χρόνο θα πέσει στο έδαφος. Το ύψος h (σε m) από το έδαφος, στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t (σε sec) κατά την κίνησή της, προσδιορίζεται από τη συνάρτηση: $h(t) = -5t^2 + 10t + 1,05$

A. Να βρείτε τις τιμές $h(0)$, $h(1)$, $h(2)$ και να εξηγήσετε τι παριστάνουν στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 6)

B. Να βρείτε μετά από πόσο χρόνο η μπάλα θα φτάσει στο έδαφος.

(Μονάδες 8)

Γ. Να αποδείξετε ότι το ύψος στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t μπορεί να προσδιοριστεί και από τον τύπο: $h(t) = 5[1,21 - (t-1)^2]$

(Μονάδες 5)

Δ. Να εξετάσετε αν υπάρχει χρονική στιγμή t_1 (σε sec) που το ύψος h της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από 6,65 m

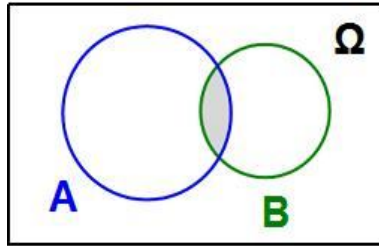
(Μονάδες 6)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 12

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Στο παρακάτω διάγραμμα Venn, το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν παριστάνει το σύνολο $A \cap B$.

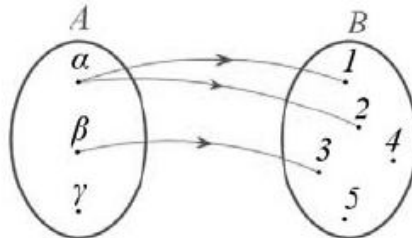


β. Μπορούμε πάντα να διαιρούμε κατά μέλη δύο ανισότητες της ίδιας φοράς και προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς.

γ. Ισχύει $|a|^2 = a^2$ για κάθε πραγματικό αριθμό a .

δ. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$.

ε. Το βελοδιάγραμμα που φαίνεται στην παρακάτω εικόνα παριστάνει συνάρτηση.



(Μονάδες 2x5=10)

B. Έστω A και B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και $P(A)$, $P(B)$ οι αντίστοιχες πιθανότητες. Να αποδείξετε ότι αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Σε μία αριθμητική πρόοδο ισχύουν:

$$a_1 = 2 \text{ και } a_{25} = a_{12} + 39$$

A. Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$.

(Μονάδες 12)

B. Να βρείτε ποιός όρος της προόδου είναι ίσος με 152.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3^ο

Σε ένα λύκειο οι αίθουσες χαρακτηρίζονται πρώτα με ένα από τα γράμματα A , B και Γ (ανάλογα με την τάξη που φοιτά στη συγκεκριμένη αίθουσα) και κατόπιν με τους αριθμούς 1, 2, 3 και 4 (ανάλογα με το τμήμα της τάξης που φοιτά στη συγκεκριμένη αίθουσα).

Στο συγκεκριμένο σχολείο δεν υπάρχουν τα τμήματα $B4$ και $\Gamma4$, διότι οι τάξεις B και Γ Λυκείου αποτελούνται από τρία τμήματα η κάθε μία.

Θεωρούμε ως πείραμα τύχης την επιλογή μίας αίθουσας του σχολείου για να διενεργηθεί σε αυτήν η εξέταση του μαθήματος της Άλγεβρας A Λυκείου.

A. Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

(Μονάδες 10)

B. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

B1. A : Η εξέταση να γίνει σε αίθουσα της A τάξης.

B2. B : Η εξέταση να γίνει σε αίθουσα με περιττό (μονό) αριθμό.

(Μονάδες 8)

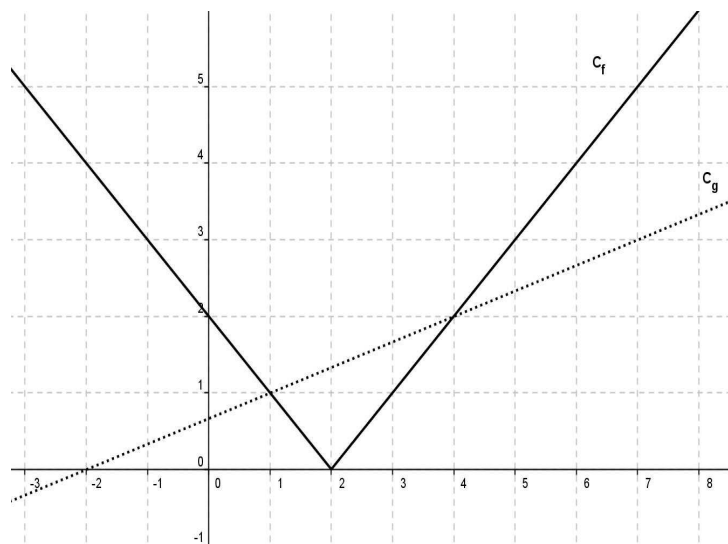
Γ. Να περιγράψετε με λόγια το ενδεχόμενο $A \cup B$ και να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησής του.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4^ο

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και

g αντίστοιχα, με $f(x) = |x - 2|$ και $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$



A. Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g

(Μονάδες 6)

B. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α).

(Μονάδες 8)

Γ. Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g .

(Μονάδες 6)

Δ. Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση: $K = \sqrt{3|2 - x| - (x + 2)}$

(Μονάδες 5)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 13

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ο n -οστός όρος μιας αριθμητικής προόδου (a_n) με πρώτο όρο a_1 και διαφορά ω είναι $a_n = a_1 + (n-1)\omega$

β. Αν $a \geq 0$, τότε $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

γ. Αν $\theta > 0$, τότε $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$.

δ. Το κενό σύνολο \emptyset που δεν πραγματοποιείται σε καμία εκτέλεση ενός πειράματος τύχης λέγεται βέβαιο ενδεχόμενο.

ε. Αν με S συμβολίσουμε το άθροισμα $x_1 + x_2$ και με P το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$ των ριζών

$$x_1, x_2 \text{ της εξίσωσης } ax^2 + bx + \gamma = 0, a \neq 0, \text{ τότε } S = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ και } P = \frac{\gamma}{\alpha}$$

(Μονάδες 2x5= 10)

B. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε την ισότητα $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν:

$$2 \leq \alpha \leq 4 \text{ και } -4 \leq \beta \leq -3$$

Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

A. $\alpha - 2\beta$

(Μονάδες 12)

B. $\alpha^2 - 2\alpha\beta$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5x + 3, x \in \mathbb{R}$

A. Να βρείτε τα $f(0), f(2)$.

(Μονάδες 8)

B. Να λύσετε την εξίσωση $|f(x)| = 8$

(Μονάδες 8)

Γ. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + f(x) + 3 < 0$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο $\Pi = 34cm$ και διαγώνιο $\delta = 13cm$

i. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = 60cm^2$

(Μονάδες 5)

ii. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

(Μονάδες 5)

iii. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

(Μονάδες 5)

B. Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν $40cm^2$ και διαγώνιο $8cm$

(Μονάδες 10)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 14

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει $P(A') = 1 + P(A)$.

β. Αν $\alpha \geq 0$, η $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha$.

γ. Η ανίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$ ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$) με $\alpha > 0$ και διακρίνουσα $\Delta < 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$

ε. Ως συντελεστή διεύθυνσης ή ως κλίση μιας ευθείας ε ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 2x5=10)

B. Να αποδείξετε ότι ισχύει $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (a_n) για την οποία ισχύει ότι: $a_1 = 19$ και $a_{10} - a_6 = 24$

A. Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$

(Μονάδες 9)

B. Να βρείτε τον a_{20}

(Μονάδες 9)

Γ. Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 3^ο

Αν για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω έχουμε

$$[2P(A)-1]^2 + [3P(B)-1]^2 = 0 \text{ και } P(A \cup B) = \frac{3}{4} \text{ τότε:}$$

A. Να δείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{1}{3}$.

(Μονάδες 9)

B. Να βρείτε την $P(A \cap B)$

(Μονάδες 8)

Γ. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να πραγματοποιηθεί μόνο το B.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

A. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

B. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:

i. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 \cdot x_2)^{24} = 0$$

(Μονάδες 9)

ii. Για $\lambda = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2$$

(Μονάδες 9)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 15

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν ο β είναι ο αριθμητικός μέσος των a, γ τότε ισχύει $\beta = \frac{a + \gamma}{2}$.

β. Η εξίσωση $ax + \beta = 0$ είναι αδύνατη, όταν $a = 0$ και $\beta = 0$.

γ. Το συμμετρικό ενός σημείου $M(a, \beta)$ ως προς τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $M'(-a, \beta)$.

δ. Το τριώνυμο $ax^2 + \beta x + \gamma$, με $a \neq 0$ και $\Delta < 0$, είναι ομόσημο του a για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε. Οι ευθείες με εξισώσεις $y = a_1x + \beta_1$ και $y = a_2x + \beta_2$ με $a_1 \neq a_2$ είναι πάντα παράλληλες.

(Μονάδες 2x5 = 10)

B. Να αποδείξετε ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς a, β ισχύει η ισότητα $|a \cdot \beta| = |a| \cdot |\beta|$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = (\sqrt{2})^6, B = (\sqrt[3]{3})^6, \Gamma = (\sqrt[6]{6})^6$$

A. Να δείξετε ότι $A + B + \Gamma = 23$

(Μονάδες 13)

B. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$

(Μονάδες 12)

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

ΘΕΜΑ 3^ο

Για τα ενδεχόμενα A, B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω είναι γνωστό ότι:

$$P(A) = 0,65, P(B) = 0,4 \text{ και } P(B - A) = 0,25$$

Να υπολογίσετε:

A. Την $P(A \cap B)$.

(Μονάδες 7)

B. Την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A, B .

(Μονάδες 9)

Γ. Την πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα ενδεχόμενα A, B .

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται το τριώνυμο:

$$\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

A. Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(Μονάδες 8)

B. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

(Μονάδες 5)

Γ. Αν $\lambda > 0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

Δ. Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνετε τους

αριθμούς $\frac{x_1 + x_2}{2}$ και 1.

(Μονάδες 6)