ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Η εξίσωση $x^2+(a-2)x-(a-1)(2a-3)=0$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\left(\alpha-2\right)^2+4(\alpha-1)(2\alpha-3)=9\alpha^2-24\alpha+16=\left(3\alpha-4\right)^2$$

και ρίζες τις $x_1=a-1$ και $x_2=3-2a$.

Αφού η μία ριζα είναι το τετραγωνο της άλλης θα έχουμε:

1η περίπτωση:

$x_1=x_2^2 \Leftrightarrow a-1=\left(3-2a\right)^2 \Leftrightarrow 4a^2-13a+10=0$, οπότε $\left(a=2 \text{ ή } a=\dfrac{5}{4}\right)$

2η περίπτωση:

$x_2=x_1^2 \Leftrightarrow 3-2a=\left(a-1\right)^2 \Leftrightarrow \alpha^2=2 \Leftrightarrow \left(\alpha=\sqrt{2} \text{ ή } \alpha=-\sqrt{2}\right)$

Επομένως οι τιμές της παραμέτρου α είναι: $a=2$, $a=\dfrac{5}{4}$, $\alpha=\sqrt{2}$, $\alpha=-\sqrt{2}$

ΘΕΜΑ 2ο

Έχουμε:

$$A=(m+n)^3=m^3+3m^2n+3mn^2+n^3 \ (1)$$

Έστω:

$$\Gamma=\left(m-n\right)^3=m^3-3m^2n+3mn^2-n^3 \ (2)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$A-\Gamma=6m^2n+2n^3=2n(3m^2+n^2)=B-8 \text{ ή}$$
$$A=B+\Gamma-8$$

Για να διαιρεί ο αριθμός Α τον αριθμό Β πρέπει να ισχύει:

$$A\le B \Leftrightarrow B+\Gamma-8\le B \Leftrightarrow \Gamma\le 8 \Leftrightarrow \left(m-n\right)^3\le 8 \Leftrightarrow m-n\le 2$$

Επομένως έχουμε:

- $m-n=0 \Leftrightarrow m=n$, δηλαδή τα ζευγάρια $(m,\ n)=(k,\ k), k\in\{0,1,2,3...\}$. Από αυτά διαπιστώνουμε ότι μόνο το ζευγάρι (1,1) είναι τέτοιο, ώστε ο Α=8 να διαιρεί τον Β=16.
- $m-n=1 \Leftrightarrow m=n+1$, δηλαδή τα ζευγάρια $(m,\ n)=(k+1,\ k), k\in\{0,1,2,3...\}$. Από αυτά διαπιστώνουμε ότι μόνο το ζευγάρι (1,0) για k=0 είναι τέτοιο, ώστε ο Α=1 διαιρεί το Β=8.
- $m-n=2 \Leftrightarrow m=n+2$, δηλαδή τα ζευγάρια $(m,\ n)=(k+2,\ k), k\in\{0,1,2,3...\}$. Διαπιστώνουμε ότι για όλα αυτά τα ζευγάρια ο $A=(2k+2)^3=8(k+1)^3$ διαιρεί τον $B=8(k+1)^3$.

Επομένως τα ζευγάρια των μη αρνητικών ακεραίων $(m,\ n)$ που ο Α διαιρεί τον Β είναι: $(1,1),\ (1,0),\ (k+2,\ k), k\in\{0,1,2,3...\}$.

ΘΕΜΑ 3ο

Αν πάρουμε δύο παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ που απέχουν μεταξύ τους απόσταση ίση με 1 μονάδα και σε κάθε μία από αυτές τις ευθείες πάρουμε 1007 διαδοχικά σημεία που η απόσταση τους το ένα από το άλλο είναι επίσης 1 μονάδα (συνολικά δηλαδή 2014 σημεία) ,τότε στην ευθεία ε_1 σχηματίζονται 1006 διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα μήκους 1 μονάδας όπως το ίδιο συμβαίνει και στην ευθεία ε_2.

Τώρα αν ενώσουμε τα 1006 διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα της ευθείας ε_1 με τα αντίστοιχα 1006 διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα της ευθείας ε_2 συνδυαστικά θα σχηματιστούν συνολικά 1006^2 παραλληλόγραμμα (οι απέναντι πλευρές τους θα είναι παράλληλες).

Το κάθε παραλληλόγραμμο θα έχει εμβαδόν $\mathrm{E} = \beta άση x ύψος = 1x1 = 1$ τετραγωνική μονάδα.

ΘΕΜΑ 4ο

α) Έχουμε (με ένα σχετικό σχήμα):

$\tau\rho ίγ.\mathrm{A\Gamma\Delta} = \tau\rho\iota\gamma.\mathrm{AM\Gamma}$

$\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}(\delta\varepsilon\delta o\mu έ\nu o)$

$\mathrm{A\hat{M}\Gamma} = \mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma} = 90^0(\mathrm{AM}\ \varepsilon ί\nu\alpha\iota\ \kappa\alpha\iota\ ύ\psi o\varsigma\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{A\Delta} \perp \varepsilon\varphi\alpha\pi\tau o\mu έ\nu\eta)$

$\mathrm{A\hat{\Gamma}\Delta} = \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = \mathrm{A\hat{\Gamma}M}(\gamma\omega\nu ί\alpha\ \chi o\rho\delta ή\varsigma - \varepsilon\varphi\alpha\pi\tau o\mu έ\nu\eta\varsigma\ \kappa\alpha\iota\ \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma})$

Επομένως έχουμε $\Gamma\Delta = \mathrm{M}\Gamma = \dfrac{\mathrm{B}\Gamma}{2}$

β) Έχουμε:

$$\Gamma\Delta = \frac{\mathrm{B}\Gamma}{2} \Leftrightarrow \mathrm{A}\Gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{A\hat{\Gamma}\Delta} = \frac{\mathrm{B}\Gamma}{2} \Leftrightarrow \beta\sigma\upsilon\nu\hat{\mathrm{B}} = \frac{\alpha}{2}\ \ (1)$$

Από το Νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{B} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\mathrm{B} = \frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma}\ \ (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε διαδοχικά:

$$\beta\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma}=\frac{\alpha}{2}\Leftrightarrow\beta\left(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2\right)=2\alpha^2\gamma\Leftrightarrow\beta\alpha^2+\beta\gamma^2-\beta^3-\alpha^2\gamma=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha^2(\beta-\gamma)-\beta(\beta^2-\gamma^2)=0\Leftrightarrow(\beta-\gamma)(\alpha^2-\beta^2-\beta\gamma)=0$$

Άρα θα είναι: $\beta-\gamma=0$ ή $\alpha^2-\beta^2-\beta\gamma=0\Leftrightarrow\alpha^2=\beta^2+\beta\gamma$ (3).

Όμως η σχέση (3) δίνει άτοπο αφού τότε έχουμε:

Επειδή θα είναι:

$$\mathrm{A}<90^0\Leftrightarrow\alpha^2<\beta^2+\gamma^2\Leftrightarrow\beta^2+\beta\gamma<\beta^2+\gamma^2\Leftrightarrow\beta\gamma<\gamma^2\Leftrightarrow\beta<\gamma$$

Η τελευταία σχέση είναι άτοπο αφού από τα δεδομένα έχουμε $\beta\geq\gamma$.

Επομένως είναι $\beta=\gamma$ ή $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$