ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Κεφάλαιο 3^{ο}: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ (Παράγραφοι: 3.1-3.7)

Σχολικό έτος: 2013-2014

ΘΕΜΑ 1^{ο}

α) Λάθος.

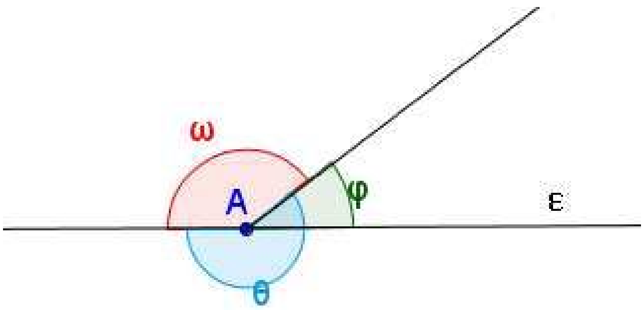
β) Λάθος.

γ) Σωστό.

δ) Σωστό.

ε) Λάθος.

ΘΕΜΑ 2^{ο}



α) Έχουμε διαδοχικά:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{16}{25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{4}{5} \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{4}{5}\right)$$

Όμως αφού η φ είναι οξεία γωνία (1^{ο} τεταρτημόριο) δεκτή τιμή είναι η $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{4}{5}$.

β) Για την γωνία ω έχουμε:

Οι γωνίες ω και φ είναι παραπληρωματικές (όπως προκύπτει από το παραπάνω σχήμα) και άρα έχουμε:

$$\eta\mu\omega = \eta\mu\varphi = \frac{3}{5} \text{ και } \sigma\upsilon\nu\omega = -\sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{4}{5}$$

Για την γωνία θ έχουμε $\theta = 180^0 + \varphi$ (όπως προκύπτει από το παραπάνω σχήμα) και άρα έχουμε:

$$\eta\mu\theta = \eta\mu\left(180^0 + \varphi\right) = -\eta\mu\varphi = -\frac{3}{5} \text{ και } \sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\upsilon\nu\left(180^0 + \varphi\right) = -\sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{4}{5}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α) Έχουμε διαδοχικά:

$$\varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} \cdot \frac{\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6\eta\mu\alpha\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = 6\frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

αφού από την υπόθεση έχουμε $\eta\mu\alpha\eta\mu\beta = \frac{\sqrt{2}}{10}$

β) Έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\left(\alpha + \beta\right) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta = \frac{3\sqrt{2}}{5} - \frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{5\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

γ) Έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\left(\alpha + \beta\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \alpha + \beta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \ \ (\kappa \in \mathbb{Z})$$

Άρα :

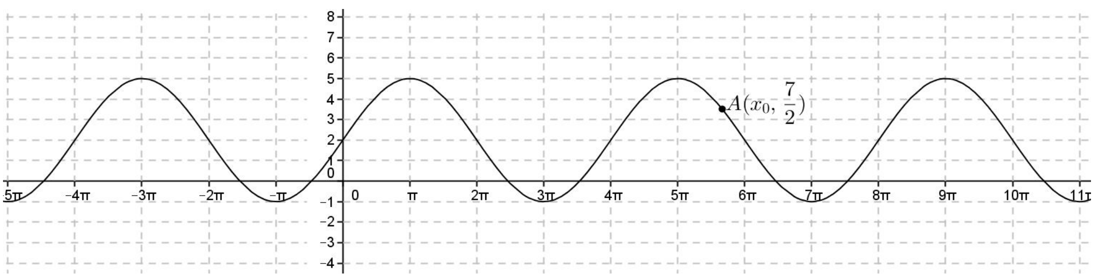
$$\alpha + \beta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2\left(\alpha + \beta\right) = 4\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\alpha = 4\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - 2\beta$$

, οπότε:

$$\varepsilon\varphi 2\alpha = \varepsilon\varphi\left(4\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - 2\beta\right) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - 2\beta\right) = \sigma\varphi 2\beta = \frac{1}{\varepsilon\varphi 2\beta}$$

Επομένως $\varepsilon\varphi 2\alpha \cdot \varepsilon\varphi 2\beta = \frac{1}{\varepsilon\varphi 2\beta} \cdot \varepsilon\varphi 2\beta = 1$

ΘΕΜΑ 4ο



α) Με βάση τη γραφική παράσταση, έχουμε:

i) Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f είναι 5

Η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f είναι -1

ii) Η περίοδος της συνάρτησης f είναι Τ=4π

β) Είναι:

$$T=4\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\omega}=4\pi \Leftrightarrow \omega=\frac{1}{2}$$

Από το σχήμα προκύπτει ότι:

$$f(0)=2 \Leftrightarrow \rho\cdot \eta\mu 0+k=2 \Leftrightarrow k=2 \text{ και}$$

$$f(3\pi)=-1 \Leftrightarrow \rho\eta\mu\frac{3\pi}{2}+2=-1 \Leftrightarrow -\rho=-3 \Leftrightarrow \rho=3$$

γ) Αφού $\rho=3,\ \omega=\frac{1}{2},\ \mathrm{k}=2$ η συνάρτηση f γίνεται $f(x)=3\eta\mu\frac{1}{2}x+2,\ x\in\mathbb{R}$

Επειδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A\left(x_o,\ \frac{7}{2}\right)$ έχουμε $f(x_o)=\frac{7}{2}$. Τώρα έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$f(x_o)=\frac{7}{2} \Leftrightarrow 3\eta\mu\frac{1}{2}x_o+2=\frac{7}{2} \Leftrightarrow 3\eta\mu\frac{1}{2}x_o=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\frac{1}{2}x_o=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\frac{1}{2}x_o=\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x_o=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\ \acute{\eta}\ \frac{1}{2}x_o=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6},\ \mu\varepsilon\ \kappa\in\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(x_o=4\kappa\pi+\frac{\pi}{3}\ \acute{\eta}\ x_o=4\kappa\pi+\frac{5\pi}{3},\ \mu\varepsilon\ \kappa\in\mathbb{Z}\right)$$

Επειδή[1] $5\pi<x_0<6\pi$ (όπως προκύπτει από το δοθέν σχήμα) έχουμε:

- $5\pi<x_0<6\pi \Leftrightarrow 5\pi<4\kappa\pi+\frac{\pi}{3}<6\pi \Leftrightarrow \frac{14\pi}{3}<4\kappa\pi<\frac{17\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{14}{12}<\kappa<\frac{17}{12}$. Όμως δεν υπάρχει τέτοιος ακέραιος κ.
- $5\pi<x_0<6\pi \Leftrightarrow 5\pi<4\kappa\pi+\frac{5\pi}{3}<6\pi \Leftrightarrow \frac{10\pi}{3}<4\kappa\pi<\frac{13\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{10}{12}<\kappa<\frac{13}{12}$.

Επομένως $\kappa=1$, οπότε $x_o=4\pi+\frac{5\pi}{3} \Leftrightarrow x_o=\frac{17\pi}{3}$

[1] Μπορούμε και εμπειρικά να δοκιμάσουμε τιμές του κ για να πάρουμε το μοναδικό x_0 με $x_0\in(5\pi,\ 6\pi)$.