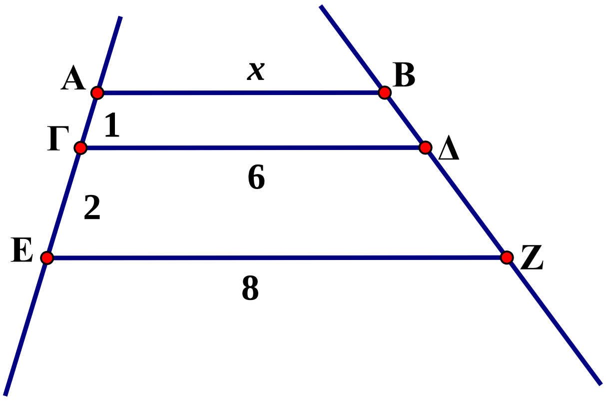
Ασκήσεις στο Θαλή (Β' Λυκείου Γεωμετρία)

Ρουμελιώτης – Ηρακλείδης

Άσκηση 1

Αν ΑΒ // ΓΔ // ΕΖ, ΑΓ=1, ΓΕ=2, ΓΔ=6, ΕΖ=8
να βρεθούν :
α) οι λόγοι $\frac{\Delta Z}{B\Delta}$ **και** $\frac{BZ}{B\Delta}$
β) το μήκος x

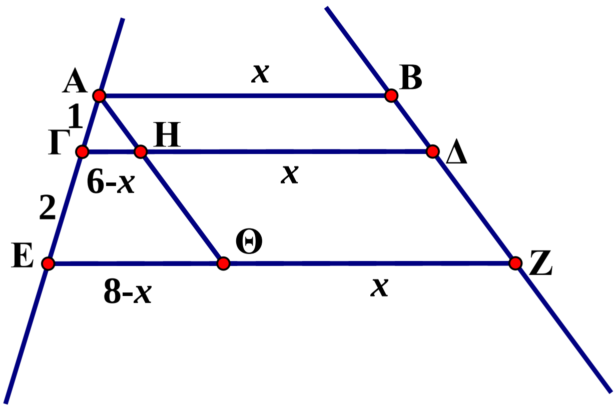


Λύση

α) Από το θ. Θαλή για τις παράλληλες ΑΒ//ΓΔ//ΕΖ έχουμε

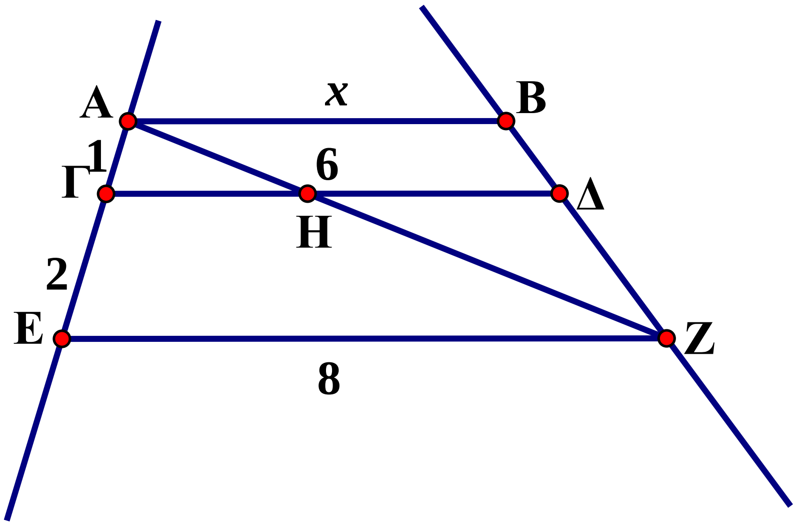
$$\frac{\Delta Z}{B\Delta}=\frac{\Gamma E}{A\Gamma}=\frac{2}{1}=2 \quad \text{και} \quad \frac{BZ}{B\Delta}=\frac{AE}{A\Gamma}=\frac{3}{1}=3$$

β) (<u>1^ος^ τρόπος):</u> Απ' το σημείο Α φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΖ, η οποία τέμνει τις ΓΔ και ΕΖ στα σημεία Η, Θ αντίστοιχα



Τότε ΓΗ=6–x και ΕΘ=8–x και απ' το Θ. Θαλή στο τρίγωνο ΑΕΘ (ΓΗ//ΕΘ) έχουμε $\frac{1}{1+2}=\frac{6-x}{8-x}\Leftrightarrow 8-x=3(6-x)\Leftrightarrow x=5$

(2^{ος} τρόπος): Απ’ το σημείο Α φέρουμε την διαγώνιο ΑΖ του τραπεζίου ΑΒΖΕ.



Απ’ το Θ. Θαλή στο τρίγωνο ΑΕΖ (ΓΗ//ΕΖ) έχουμε $\frac{1}{1+2}=\frac{\Gamma H}{8} \Leftrightarrow 8=3\Gamma H \Leftrightarrow \Gamma H=\frac{8}{3}$

Απ’ το Θ. Θαλή στο τρίγωνο ΖΑΒ (ΗΔ//ΑΒ) έχουμε $\frac{H\Delta}{AB}=\frac{Z\Delta}{ZB}=\frac{E\Gamma}{EA}=\frac{2}{3}$

Επίσης $H\Delta=\Gamma\Delta-H\Gamma=6-\frac{8}{3}=\frac{10}{3}$

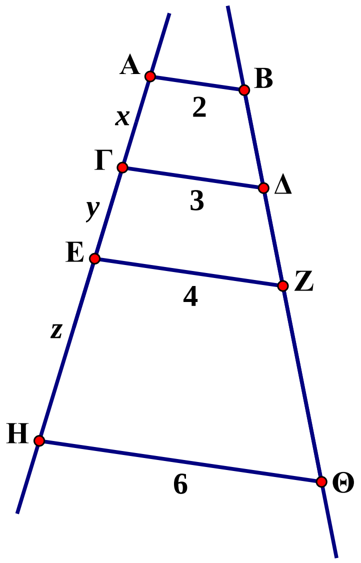
Επομένως $\frac{H\Delta}{AB}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow 3H\Delta=2x \Leftrightarrow 3\cdot\frac{10}{3}=2x \Leftrightarrow x=5$

Άσκηση 2

Αν ΑΒ // ΓΔ // ΕΖ // ΗΘ, ΑΒ=2, ΓΔ=3, ΕΖ=4, ΗΘ=6 και ΑΗ=8

α) Να βρεθεί ο λόγος $\frac{\text{ΒΖ}}{\text{ΖΘ}}$ συναρτήσει του z

β) Να βρεθούν τα μήκη x, y, z

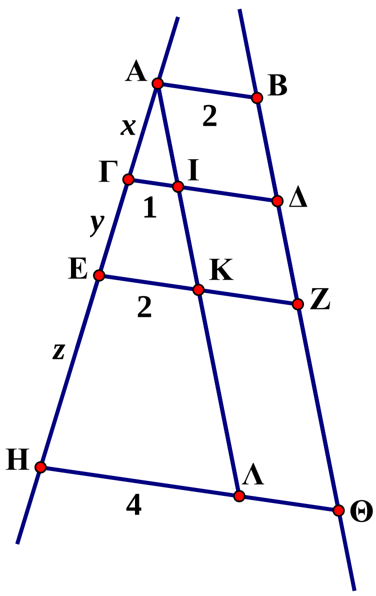


Λύση

α) Από το θ. Θαλή για τις παράλληλες ΑΒ//ΕΖ//ΗΘ έχουμε

$$\frac{\text{ΒΖ}}{\text{ΖΘ}}=\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΗ}}=\frac{x+y}{z}=\frac{x+y+z-z}{z}=\frac{8-z}{z}$$

β) Απ' το σημείο Α φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΘ, η οποία τέμνει τις ΓΔ, ΕΖ και ΗΘ στα σημεία Ι, Κ και Λ αντίστοιχα



Τότε ΓΙ=1, ΕΚ=2 και ΗΛ=4 και απ' το Θ. Θαλή στο τρίγωνο ΑΗΛ (ΓΙ//ΗΛ) έχουμε $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΗ}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{8} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 2$ (1)

Επίσης απ' το Θ. Θαλή στο τρίγωνο ΑΕΚ (ΓΙ//ΕΚ) έχουμε $\frac{x}{x+y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = x + y \Leftrightarrow x = y$ (2)

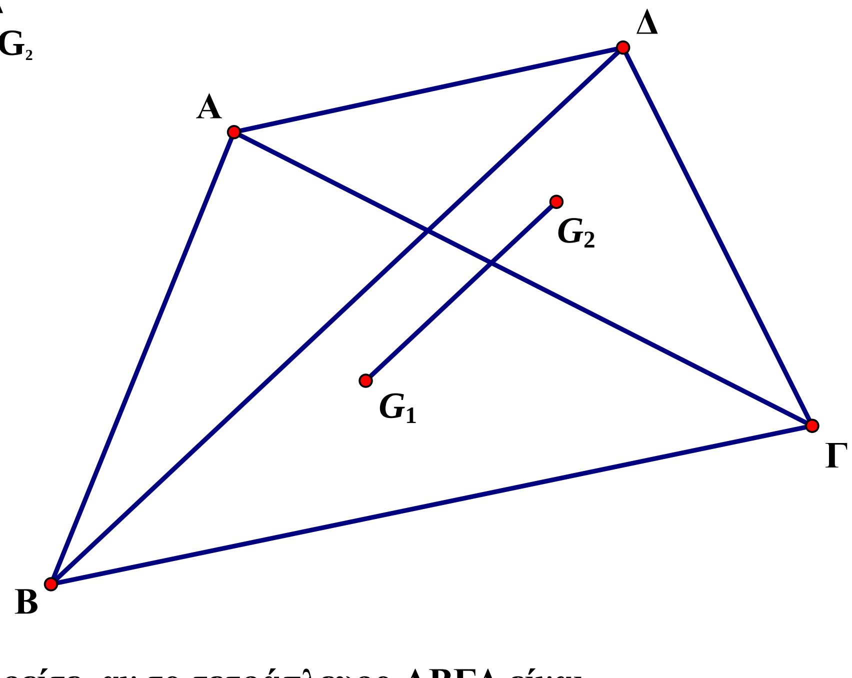
Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι x=y=2

Όμως $\text{ΑΗ} = 8 \Leftrightarrow x + y + z = 8 \Leftrightarrow 2 + 2 + z = 8 \Leftrightarrow z = 4$

Άρα **x=2, y=2, z=4**

Άσκηση 3

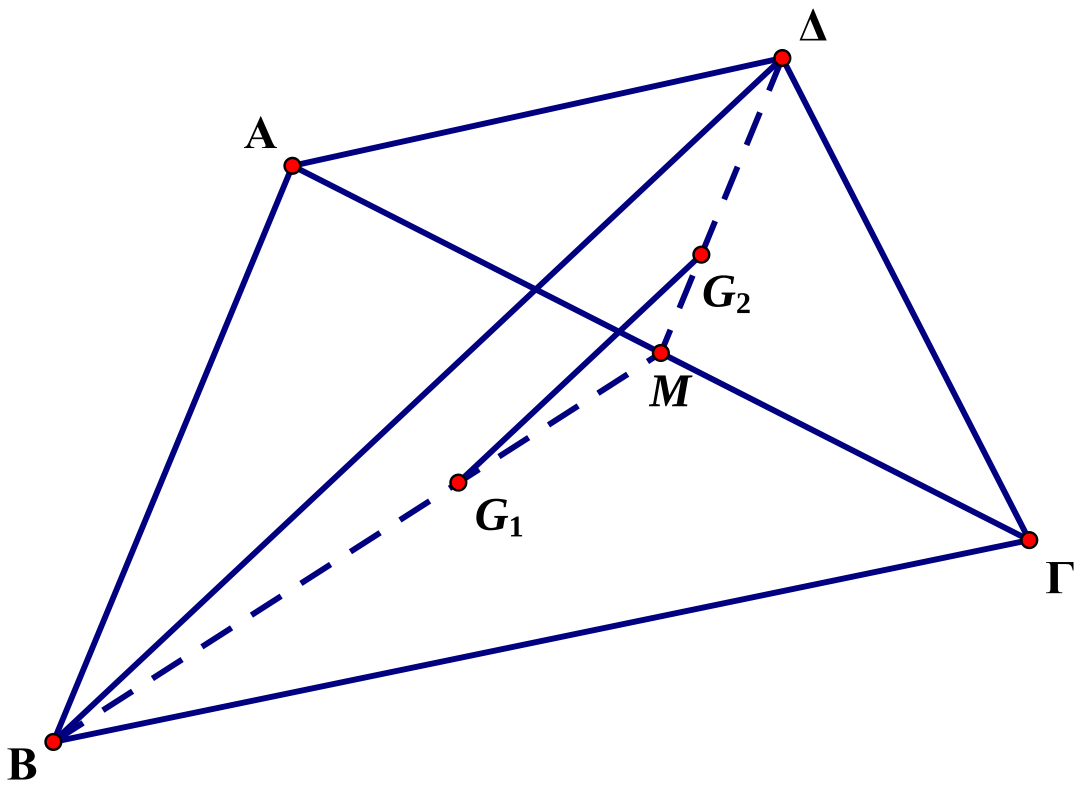
Στο παρακάτω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ τα σημεια G_1, G_2 είναι τα βαρύκεντρα των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΓΔ αντίστοιχα :
α) Να δείξετε ότι ισχύει:
i) G_1G_2 // ΒΔ
ii) ΒΔ = $3G_1G_2$



β) Τι παρατηρείτε, αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο;

Λύση

α) Έστω Μ το μέσο της διαγωνίου ΑΓ



i) Το G_1 είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ οπότε $G_1B = 2G_1M$ ή $\frac{G_1B}{G_1M} = 2$ (1)

Το G_2 είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΔΓ οπότε $G_2\Delta = 2G_2M$ ή $\frac{G_2\Delta}{G_2M} = 2$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι $\frac{G_1B}{G_1M} = \frac{G_2\Delta}{G_2M}$ και από το αντίστροφο του Θ. Θαλή συμπεραίνουμε ότι $G_1G_2 // B\Delta$

ii) Απ’ το Θ. Θαλή στο τρίγωνο ΜΒΔ ($G_1G_2 // B\Delta$) έχουμε $\frac{MG_1}{MB} = \frac{G_1G_2}{B\Delta} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{G_1G_2}{B\Delta} \Leftrightarrow B\Delta = 3G_1G_2$

β) Αν σχεδιάσουμε ένα παραλληλόγραμμο θα διαπιστώσουμε ότι τα βαρύκεντρα G_1, G_2 τριχοτομούν την διαγώνιο ΒΔ